

重力場で鉛直に落下する軸対称ジェット

阪大・基礎工

吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)

湯木哲生 (Tetsuo Yuki)

角谷典彦 (Tsunehiko Kakutani)

§ 1. 前置き

液柱(ジェット)表面に立つ表面張力波, 及びそれによる液柱の安定性に関する問題は, 流体力学における代表的な問題の一つであるばかりでなく, 化学工学をはじめとする工学の諸分野でも, 実用上非常に重要である.

この問題の数学的取り扱い, 既に19世紀後半 Rayleigh¹⁾により始められており, 液柱は軸対称の線形攪乱に対して, 液柱の半径で無次元化された波数 k が1よりも小さいときにのみ不安定になることが示されている. さらに, 最近, この問題に対する非線形効果を考慮した研究が行われている. 攪乱が線形不安定領域 ($0 < k < 1$, 長波長)にある場合²⁻⁴⁾, インクジェットプリンターへの応用にも関連して, ジェットの液滴への崩壊やサテライトの発生の様子が高次の非線形性を考慮することにより示された. 一方, 線形安定領域 ($k > 1$, 短波長)においても液柱を伝播する攪乱を記述する非線形 Schrödinger (N.L.S)方程式が得られ⁵⁾, その平面波解が $k > 1.28$ の波数をもつ短波長の波に対しては再び不安定となることが示された. これは, 液柱半径に比べて十分小さい半径の液滴への崩壊

$$\left. \begin{aligned} UR_0^2 &= \text{const}, \\ \frac{1}{2} U^2 - gz + \frac{p}{\rho} &= \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、 R_0 はジェットの半径、 U は主流の速度、 p, ρ, g はそれぞれジェット内の圧力、流体密度、重力加速度を示す。ジェットの表面で圧力 p が大気圧 p_0 と表面張力(係数 σ)による法線力と釣り合うことから、境界条件として、 $p - p_0 = \sigma R_0^{-1}$ なる近似式が得られる(準一次元流れを仮定していることから、 R_0 の z 微分が十分小さく圧力及び速度は半径によらないとしている)。この境界条件と(1)式より、半径 R_0 及び速度 U の z 依存性は次式解くことにより得られる:

$$\left. \begin{aligned} UR_0^2 &= 1, \\ \frac{1}{2} U^2 + \frac{1}{W_b} \frac{1}{R_0} - \frac{1}{2} \frac{z}{F^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{W_b} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここで、 R_0, U はそれぞれ、 $z=0$ での半径 a 及び流速 U_0 で規格化されており、Weber数 $W_b = U_0^2 \rho a / \sigma$ 、Froude数 $F = U_0 (2ag)^{-1/2}$ の二つの無次元パラメーターが導入されている。

2.2 攪乱を支配する方程式と分散関係

主流に加わる攪乱が、軸対称渦なしであると仮定すれば、速度ポテンシャル $\phi(r, z, t)$ が導入でき、 ϕ は以下のLaplace方程式を満たす:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi = 0, \quad \begin{matrix} 0 < R < R_0 + \eta(z, t) \\ 0 < z < \infty \end{matrix} \quad (3)$$

ここで、液柱の半径は $R(z, t) = R_0(z) + \eta(z, t)$ であり (図 1 参照), この R 上で以下の二つの境界条件, すなわち運動学的条件 (4) と動力学的条件 (5), が課される:

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\partial R}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial R}{\partial z}, \quad \text{at } R = R_0(z) + \eta(z, t), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{W_b} \left[R^{-1} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right\} \right]^{- (1/2)} \\ - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right\}^{- (3/2)} - \frac{1}{2} \frac{z}{F^2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{W_b} = 0, \\ \text{at } R = R_0(z) + \eta(z, t) \quad (5) \end{aligned}$$

但し, (3) ~ (5) 式は, a と U_0 で規格化されている.

本研究では, 弱非線形準単色波の自己変調を調べるので, 多重尺度 (multiple scales) $[z_n (\equiv \varepsilon^n z), t_n (\equiv \varepsilon^n t), n = 0, 1, 2, \dots]$ を導入すると便利である⁸⁾. ここで, ε は微小パラメータであり, n が $0, 1, 2, \dots$ と大きくなるほど緩やかな変動を示す. U, R_0 が z 方向には ε^2 程度で緩やかに変化すると仮定すれば ($U = U(z_2), R_0 = R_0(z_2) = 1/\sqrt{U(z_2)}$), 速度ポテンシャル ϕ と半径 R は次のように ε 展開される:

$$\begin{aligned} \phi(r, z, t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \phi_0(z_2) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \phi_n(r; z_0, \dots, z_N; t_0, \dots, t_N) \\ + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (6) \end{aligned}$$

$$R(z, t) = R_0(z_2) + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \eta_n(z_0, \dots, z_N; t_0, \dots, t_N) + O(\varepsilon^{N+1}), \quad (7)$$

ここで, $\phi_0 \equiv \int U dz_2$ である. さらに, 微分オペレータは次の

ように微分展開される:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= k \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial z_n} + O(\varepsilon^{N+1}), \\ \frac{\partial}{\partial t} &= -\omega \frac{\partial}{\partial \theta} + \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n} + O(\varepsilon^{N+1}). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 θ は搬送波の位相で波数 k と角振動数 ω を用いて $\theta = kz_0 - \omega t_0$ と表される。主流 U が z_2 の程度で変化するので、 k, ω もそれと同程度の非一様性をもつ（すなわち z_2 の関数）と仮定できる。しかし (8) から得られる関係 $\partial k / \partial t_2 + \partial \omega / \partial z_2 = 0$ より、 $k = k(z_2)$ であるのに対して ω は z_2 にはよらず一定である。かくして、(6)~(8) を方程式 (3) と境界条件 (4), (5) に用いて、 ε のべきで整理することにより、 $O(\varepsilon^3)$ までの ϕ_n と η_n に対する方程式系を得ることができる。

出発解として準単色波解を考えるので、最低次の $O(\varepsilon)$ で次の η_1, ϕ_1 を得る:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= A(z_1, \dots; t_1, \dots) e^{i\theta} + \text{C.C.}, \\ \phi_1 &= i \frac{kU - \omega}{kI_1(kR_0)} I_0(kr) \{ A(z_1, \dots; t_1, \dots) e^{i\theta} + \text{C.C.} \} \\ &\quad + B_1(z_1, \dots; t_1, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 A はジェット表面の“もりあがり”の複素振幅で、 I_n は n 次の第一種変形ベッセル関数、 C.C. は複素共役を示す。 B_1 は、非線形性のために誘起される速度ポテンシャルである。この

とき、解(9)が得られるためには次の線形分散関係式が満足されねばならない:

$$(kU - \omega)^2 = \frac{k}{Wb \alpha(kR_0)} \left(k^2 - \frac{1}{R_0^2} \right), \quad (10)$$

ここで、 $\alpha(kR_0) =$

$I_0(kR_0)/I_1(kR_0)$ で

ある。(10)より、

実数の波数 $k < 1/R_0$

に対して ω が複素

数となり攪乱は不

安定(時間不安定)

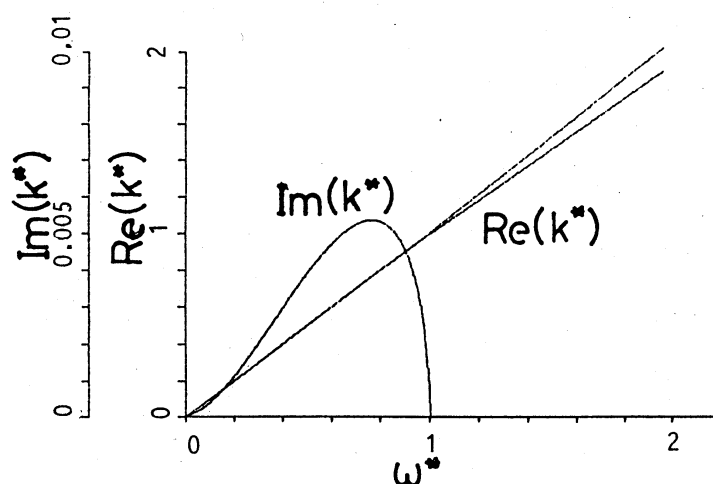


図2.線形分散関係

となることがわかる。しかし、いま考えている空間的に非一

様な問題では、実数の ω に対して複素数の k を求める(空間不

安定)問題を考える必要がある。このとき、(10)は k の超越方

程式となるためその解を求めることはたやすすくないが、 $Wb \gg$

1の場合には、 k は以下のように得られる⁹⁾:

$$k^* = \omega^* \pm \left[\frac{\omega^* (\omega^{*2} - 1)}{Wb^* \alpha(\omega^*)} \right]^{1/2} + O(1/Wb^*), \quad (11)$$

但し、 $k^* = kR_0$, $\omega^* = R_0 \omega / U$, $Wb^* = Wb / R_0^3$ である。図2は $Wb =$

300, $F = 3.405$, $\omega = 10$ に対する ω^* と k^* の関係を示したものであ

る。図より $\omega^* \geq 1$ で k^* が実数 ($kR_0 \geq 1, kU - \omega \neq 0$) となることが

分かる。また、 $\omega^* = 1$ が $z \sim 240$ に対応することから、 z がそれ

より大きいジェット下方では攪乱は線形不安定となる。

§ 3. 進行波の振幅変調

複素振幅 A を支配する式を得るためには更に高次の近似に進む必要がある。 $O(\varepsilon^2)$ から、群速度 ($Vg = d\omega/dk$) に乗った系で A は一定であるという式:

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + Vg \frac{\partial A}{\partial z_1} = 0, \quad (12)$$

を得る。そして、 $O(\varepsilon^3)$ で変数係数の N.L.S 方程式:

$$i \left\{ \frac{\partial A}{\partial t_2} + Vg \frac{\partial A}{\partial z_2} \right\} + P \frac{\partial^2 A}{\partial z_1^2} = Q|A|^2 A + SA + iTA, \quad (13)$$

が得られる。但し、 Vg 及び係数 $P[(1/2)(dVg/dk)]$, Q, S, T は z_2 の緩やかに変化する関数である。それらの具体的な表示は省略するが、図 3 に z に対する P, Q, T の典型的な変化の様子を示

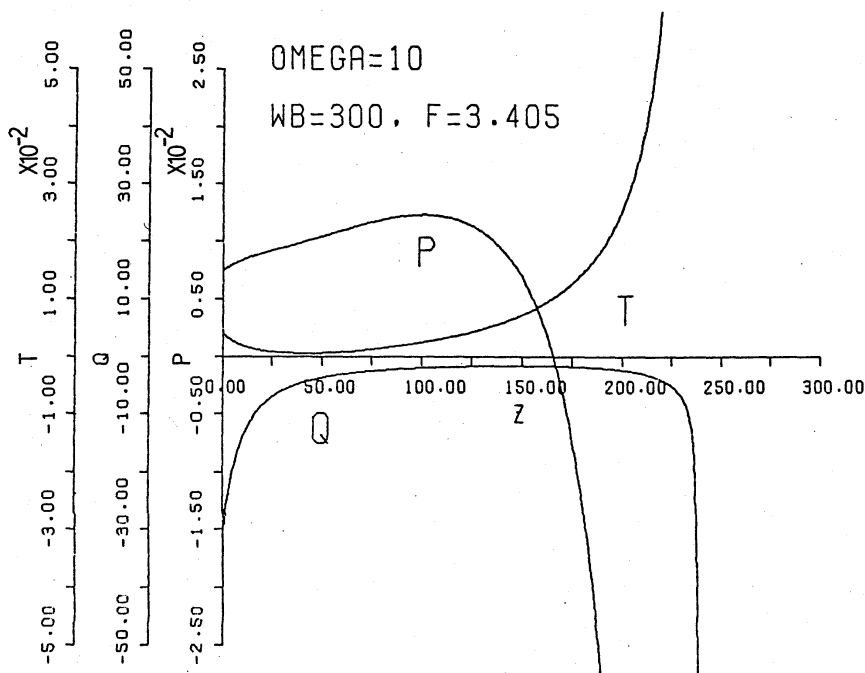


図 3.
 z に対する
 P, Q, T の変
化

す (Wb, F, ω の値は図 2 の場合と同じである). 図より分かるように, 常に $Q < 0, T > 0$ であるのに対して, P は $z \sim 165$ でその符号を変える. このことは, T を無視すれば, 局所的には平面波解が変調不安定から安定に変わることを意味する. $z \sim 240$ が $kU - \omega \sim 0$ に対応するが, その値に近づくにつれて P, Q, T の絶対値は急激に大きくなる. 事実, 簡単な計算により, $kU - \omega \rightarrow 0$ で Vg や係数 P, Q, T, S が発散することがわかる. そのため, その様な領域では (13) 式はもはや有効でなくなる. そこで, 以下ではこの臨界領域 ($k \sim 1/R_0, kU - \omega \sim 0$) での解析を改めて行う. このとき, 搬送波の位相 θ は $\theta = z_0/R_0 - Ut_0/R_0$ となり, $O(\varepsilon)$ での出発解 (9) は $\psi_1 = A(z_1, \dots; t_1, \dots)e^{i\theta} + C.C.$, 及び $\phi_1 = B_1(z_1, \dots; t_1, \dots)$ と書ける. さらに, 先と同様な解析を行うことにより $O(\varepsilon^2)$ 及び $O(\varepsilon^3)$ から次式を得る:

$$\frac{\partial A}{\partial z_1} = 0, \quad (14)$$

$$i \frac{\partial A}{\partial z_2} + P_0 \frac{\partial^2 A}{\partial t_1^2} = Q_0 |A|^2 A + S_0 A + iT_0 A, \quad (15)$$

ここで, $P_0 = -(1/2)WbR_0^2\alpha(1) (< 0)$, $Q_0 = -R_0^{-3} (< 0)$, $S_0 = WbC$ (C は無限遠での A の値から決まる定数), $T_0 =$

$-(3/2)(Wb\alpha(1)/R_0^4)(\partial R_0/\partial z_2) (> 0)$ である. (15) 式は,

右辺第 2 項第 3 項が無ければ, プラズマ^{10, 11)} や流体^{5, 12)} において "時間と空間の入れ替わった N.L.S 方程式" として知られ

ており、その時間発展が線形不安定であることから“不安定 N.L.S方程式”とも呼ばれている（この場合でも、厳密解としてソリトン解¹³⁾を持つことが知られている）。

ところで、重力の影響によりジェット下方に進むに従いその半径が小さくなり、速度が速くなる。たとえば、上方で $k > 1/R_0$ ($kU - \omega \neq 0$) でも、下方に進むにしたがってある z 付近で $k \sim 1/R_0$ ($kU - \omega \sim 0$) となる場合が起こり得る。この時(13), (15)の2種類の N.L.S方程式がどの様に接続されるかを調べる必要がある。(12), (13)式に次の座標系を用いる:

$$\xi_j = \varepsilon_j \left[\int \frac{1}{Vg} dz - t \right] = \left[\frac{dz_j}{Vg} - t_j \right], \quad \eta_j = \varepsilon_j z = z_j. \quad (16)$$

その結果、(12)式は

$$\frac{\partial A}{\partial \eta_1} = 0, \quad (17)$$

(13)式は、

$$i \frac{\partial A}{\partial \eta_2} + \frac{P}{Vg^3} \frac{\partial^2 A}{\partial \xi_1^2} = \frac{Q}{Vg} |A|^2 A + \frac{S}{Vg} A + i \frac{T}{Vg} A, \quad (18)$$

と書き直すことができる。このとき、 $kU - \omega \rightarrow 0$ で $P/Vg^3 \rightarrow Pc$, $Q/Vg \rightarrow Qc$, $S/Vg \rightarrow Sc$, $T/Vg \rightarrow Tc$ となることを示すことができる。さらに、 $Vg \rightarrow \infty$ より $\partial / \partial \eta_j \rightarrow \partial / \partial z_j$, $\partial / \partial \xi_j \rightarrow -\partial / \partial t_j$ となることに注意すれば、(17), (18)式はそれぞれ(14), (15)式に帰着する。従って、(17), (18)式は線形安定及び臨界領域

を含む広い範囲において成り立つことが分かる。これら二つの方程式は元の座標系に戻して次式の様に一つにまとめることができる:

$$i \frac{\partial a}{\partial \eta} + \frac{P}{Vg^3} \frac{\partial^2 a}{\partial \xi^2} = \frac{Q}{Vg} |a|^2 a + i \frac{T^*}{Vg} a, \quad (19)$$

但し, $a = \varepsilon A \exp(i \int [S/Vg] dz_2)$, $T^* = \varepsilon^2 T$ であり, $\xi_j = \varepsilon^{-1} \xi$, $\eta_j = \varepsilon^{-1} \eta$ が導入されている。 $z=0$ で緩やかな正弦変調 $a = 0.1[1 - 0.05 \cos(\Omega t)]$ を受けた攪乱の臨界領域付近まで ($0 \leq z \leq 210$) の発展が, (19) 式を数値的に解くことにより図 4 に示されている (周期境界条件を用いて, 有限差分法で計算を行い, パラメータは図 2 の場合と同じである)。ここで, $PQ < 0$ のとき局所的には平面波が変調不安定領域にあるように $\Omega = 2$ と取っている。図より分かるように, 緩やかな正弦変調波は不安定であり, z が大きくなるにつれて一つから二つのソリトンのような波が現れる。しかし, z が 165 を越えると P の符号が反転する

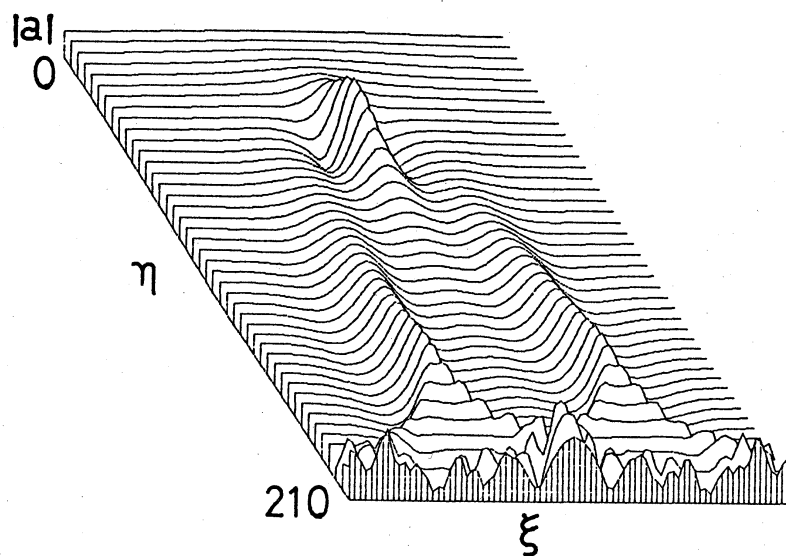


図 4. $|a|$ の η 発展

ことに対応して波形は次第に崩れ出し、臨界領域付近 ($z = 210$) では複雑な波形変化を示す。 $T^* > 0$ のため波は常に増幅され、また、重力により半径が小さくなるため、図 4 では $z \sim 155$ で攪乱の振幅が半径よりも大きくなる (物理的にはジェット の崩壊に対応する) 様子が示されている。

§ 4. まとめ

これまで得られた結果をまとめて以下に示す:

- (i) 本研究で得られた変数係数 N.L.S 方程式により、線形安定領域から弱い線形不安定領域までを含む広い範囲にわたって弱非線形攪乱の発展が記述できた。このとき、不安定領域では、方程式の係数は一般に複素数となる、
- (ii) 方程式の導出にあたり、重力による影響が小さいと仮定したため、その効果は主として方程式の非一様項 (T や T^*) に現れる。この項を除けば、局所的には、既に得られている円柱ジェットにおける N.L.S 方程式⁵⁾と一致する、
- (iii) 非定常の攪乱を仮定した結果、 T や T^* は常に正であるので、重力による効果は常に攪乱を増幅させるように働く。このことは、定常線形攪乱を仮定した場合と大きく異なっている点である。

参 考 文 献

- 1) Lord Rayleigh: Proc. Lond. Math. Soc. 10(1878)4.
- 2) D.D. Bogy: Ann. Rev. Fluid Mech. 11(1979)207.
- 3) K.C. Chaudhary and L.C. Redecopp: J. Fluid Mech. 96(1980) 257.
- 4) D.P. Busker: Fluid Dynamics Research 5(1989)159.
- 5) T. Kakutani, Y. Inoue and T. Kan: J. Phys. Soc. Jpn. 37(1974) 529.
- 6) R.D. Reitz and F.V. Bracco: Phys. Fluids 25(1982)1730.
- 7) K. Takemura: 大阪大学基礎工学部, 特別研究(1985).
- 8) T. Kawahara: J. Phys. Soc. Jpn. 35(1973)1537.
- 9) J.B. Keller, S.I. Rubinow and Y.O. Tu: Phys. Fluids 16 (1973)2052.
- 10) T. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. 27(1969)1314.
- 11) N. Yajima and M. Tanaka: Prog. Theor. Phys. Suppl. no. 94 (1988)138.
- 12) T. Iizuka and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. 59(1990)3182.
- 13) T. Yajima and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. 59(1990)3237.