

Invariant groups of cellular automata

東洋大学 総合情報学部 佐藤 忠一

Tadakazu Sato

Department of Information Science and Arts

Toyo University

1. まえがき

一次元セルオートマトンを大きく分類するとは定数対1写像、全射、非全射の3つのクラスに分類される。本論文では定数対1写像の不変群について論じる。

2. 諸定義

一次元セルオートマトン CA とは $CA = \langle Z, Q, n, f \rangle$ の四組で与えられる。ここで Z は整数の集合で各オートマトンが配置されている位置の集合を表す。 Q は各オートマトンの状態を表す記号列の有限集合、 n は正の整数でスコープ幅と呼ばれる。局所関数 $f: Q^n \rightarrow Q$ は $Q = \{a_1, \dots, a_m\}$ のとき m 状態スコープ幅 n の局所関数という。 $c: Z \rightarrow Q$ なる写像 c を様相といい各オートマトンの状態の分布を表す。この様相に局所関数 f で一斉に変換すると新しい様相 c' は

$$c'(i) = f(c(i), c(i+1), \dots, c(i+n-1)) \quad \text{for all } i \in Z$$

で与えられる。 $c \rightarrow c'$ なる対応を $f_\infty(c) = c'$ と書く。 $C(Q)$ で様相の集合を表すとシフト写像 $\sigma: C(Q) \rightarrow C(Q)$ は $\sigma(c)(i) = c(i+1)$ で定義される。 $k \in Z$ に対して、写像 $\sigma^k f_\infty: C(Q) \rightarrow C(Q)$ を並列写像という。

写像 $\varphi: C \rightarrow C$ が k 対1写像であるとは任意の $y \in C$ に対して $\varphi^{-1}(y) \neq \emptyset$ ならば $|\varphi^{-1}(y)| = k$ が成り立つことである。写像 $\varphi: C \rightarrow C$ が定数対1写像であるとは適当な正の整数 k が存在して k 対1写像になることである。セルオートマトンの並列写像では定数対1写像は全射である。

3. 局所関数の行列表示

m 状態スコープ幅 n の局所関数 $f: Q^n \rightarrow Q$ からド・ブルーチンググラフを次のように作る。グラフのノードの集合は Q^{n-1} とする。ノード $x_1 \dots, x_{n-1}$ からノード $x_2 \dots, x_n$ のエッジに $f(x_1 \dots, x_n)$ の値を付ける。グラフは有向グラフである。このグラフの状態遷移行列を $A(f)$ と書く。この行列のサイズは $m^{n-1} \times m^{n-1}$ 。モノイドに加法 (or) を入れ、加法, 乗法に分配の法則を用いて Q^* から記号列上の非可換環 $R(Q)$ が自然に定義される。 $A(f)$ は $R(Q)$ 上の行列である。

定理 1 m 状態 ($|Q| = m$)、スコープ幅 n の局所関数 $f: Q^n \rightarrow Q$ に対して m^{n-1} 状態 ($|Q'| = m^{n-1}$)、スコープ幅 2 の局所関数 $g: Q' \times Q' \rightarrow Q'$ が存在して $A(g) \cong A(f)^{n-1}$ が成立する。ここで $A(g) \cong A(f)^{n-1}$ とは $\psi: Q^{n-1} \rightarrow Q'$ なるコーディング (全単射写像) に対して $A(g) = \psi(A(f)^{n-1})$ かつ $g_\psi = \psi f_\psi \psi^{-1}$ が成り立つことである。

例 1. m 状態スコープ幅 2 の局所関数 $f(x, y)$ の行列表現 $A(f)$ は

$$A(f) = \begin{pmatrix} f(a_1, a_1) & \cdots & f(a_1, a_m) \\ \vdots & & \vdots \\ f(a_m, a_1) & \cdots & f(a_m, a_m) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m a_j \mu(a_j)$$

ここで $\mu(a_j)$ は a_j の隣接行列である。

4. 局所関数の不変式と不変群

$\{1, 2, \dots, m\}$ 上の置換の集合を S_m とする。 $\sigma \in S_m$ に対して m 状態スコープ幅 2 の局所関数 $f(x, y)$ を作用させる方法はいろいろある。例えば $\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_\sigma, a_{\sigma j})$ と定義すると $\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_i, a_j)$ のとき $\sigma * f = f$ と書き置換 σ に関して不変という。

適当な置換に対して不変のとき f は不変式を持つという。

f は置換 σ に関して不変ならば σ によって生成される巡回群の各元に対しても不変でこのとき f はこの群に対して不変であるといいこの群を f の不変群または単に不変群といい $G(f)$ で表す。明らかに 2 つの不変群によって生成される群も不変群である。

局所関数 $f(x, y)$ が不変式を持つとその行列表現 $A(f)$ も何らかの不変量を持つはずである。

例 2. $Q = \{a_1, a_2\}$ 上のスコープ幅 2 の局所関数 f の行列表現が以下で与えられていると

$$\text{する。 } A(f) = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 \mu(a_1) + a_2 I \quad \text{ここで } I \text{ は単位行列で } \mu(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{1, 2\}$ 上の置換 $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 1$ を $\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_\sigma, a_{\sigma j})$ のように作用させると

$A(f)_{11} = A(f)_{22} = a_2, A(f)_{12} = A(f)_{21} = a_1$ であるから $\sigma * f = f$ が成立する。

従って f は群 $G(f) = \{\sigma, \sigma^2\}$ の作用に対して不変である。一方 $A(f)$ の不変量は 2×2 の置換行列 P に対して集合 $G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\} = \{P \mid PA(f)P = A(f)\}$

$= \{\mu(a_1), \mu(a_2)\}$ は隣接行列の群と一致する。また $G(A_f)$ は $G(f) = \{\sigma, \sigma^2\}$ と同型である。並列写像 f_σ は 2 対 1 写像である。

例 3. $Q = \{a_1, a_2, a_3\}$ 上のスコープ幅 2 の局所関数 f の行列表現が次のように与えられて

$$\text{いるとする。 } A(f) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = a_1 \mu(a_1) + a_2 \mu(a_2) + a_3 I$$

$$\text{ここで } \mu(a_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu(a_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \{1, 2, 3\} \text{ 上の置換 } \sigma(1)=2, \sigma(2)=3,$$

$\sigma(3)=1$ を f に $\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_{\sigma i}, a_{\sigma j})$ のように作用させると $\sigma * f = f$ が成立。

従って $f(a_i, a_j)$ は群 $G(f) = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ の作用に対して不変である。一方 $A(f)$ を不変にする置換行列 P の集合 $G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\} = \{\mu(a_1), \mu(a_2), \mu(a_3)\}$

は隣接行列の群であり、 $G(f) = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ と同型である。並列写像 f_{∞} は 3 対 1 写像である。また、 $A(f)$ が以下で与えられていると

$$A(f) = \begin{pmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix} = a_1 \mu(a_1) + a_2 \mu(a_2) + a_3 I$$

$\{1, 2, 3\}$ 上の置換 $\sigma(1)=2, \sigma(2)=3, \sigma(3)=1$ を f に $\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_{\sigma i}, a_{\sigma j})$ の

ように作用させると $\sigma * f = f$ なので f は群 $G(f) = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ の作用に対して不変である。

一方、 $A(f)$ を不変にする置換行列集合 $G(A_f)$ は $G(A_f) = \{P \mid PA(f)P = A(f)\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

であり、 $G(A_f)$ は隣接行列の群の真部分群である。 $G(A_f)$ と $G(f) = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$ は同型である。並列写像 f_{∞} は 3 対 1 写像である。

5. セルオートマトンの直和と不変群

2 つの 1 次元セルオートマトン $CA_1 = \langle Z, Q_1, n_1, f_1 \rangle$ と $CA_2 = \langle Z, Q_2, n_2, f_2 \rangle$ の直和は以下のように与えられる。 $CA_1 \oplus CA_2 = \langle Z, Q_1 \times Q_2, (n_1, n_2), f_1 \oplus f_2 \rangle$

その状態遷移行列は $A(f_1 \oplus f_2) = A(f_1) \otimes A(f_2)$ で与えられる。ここで右辺はテンソル積である[2]。

性質 1. $(f_1)_{\infty}$ を k_1 対 1 写像, $(f_2)_{\infty}$ を k_2 対 1 写像とすると $(f_1 \oplus f_2)_{\infty}$ は $k_1 k_2$ 対 1 写像である

性質 2. $G(f_1 \oplus f_2) = G(f_1) \times G(f_2)$

例 4. $Q = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 上のスコープ幅 2 の局所関数 f の行列表現が以下のように与えられているとする。

$$A(f) = \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_4 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 a_i \mu(a_i)$$

$\{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 つの置換 σ と τ を $f(a_i, a_j)$ に次のように作用させる。

$$\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_{\sigma i}, a_{\sigma j}), \quad \tau * f(a_i, a_j) = f(a_{\tau i}, a_{\tau j})$$

ただし、 $\sigma(1)=2, \sigma(2)=1, \sigma(3)=4, \sigma(4)=3, \tau(1)=3, \tau(2)=4, \tau(3)=1, \tau(4)=2$

$\sigma * f = f$ かつ $\tau * f = f$ が成立するので $(\tau\sigma) * f = f, (\sigma\tau) * f = f$ 。

従って f は群 $G(f) = \{\sigma, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\}$ の作用に対して不変である。一方 $A(f)$ を不変にする置換行列の集合 $G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\}$

$$= \{\mu(a_1), \mu(a_2), \mu(a_3), \mu(a_4)\}$$

は群をなし、隣接行列の群と同じで不変群 $G(f) = \{\sigma, \tau, \sigma\tau, \sigma^2\}$ と同型である。 $G(f)$ はクラインの 4 元群であるから位数の巡回群の直積である。

従って並列写像 f_{∞} は 2 つの 2 対 1 写像の直和なので 4 対 1 写像になる。

例 5. $Q = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 上のスコープ幅 2 の局所関数 f の行列表現が以下のように与えられているとする。

$$A(f) = \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 a_i \mu(a_i)$$

$\{1, 2, 3, 4\}$ 上の置換 $\sigma(1)=2, \sigma(2)=3, \sigma(3)=4, \sigma(4)=1$ を f に $\sigma * f(a_i, a_j) = f(a_{\sigma i}, a_{\sigma j})$ のように作用させる。 $\sigma * f = f$ より $G(f) = \{\sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$ で $G(f)$ は位数 4 の巡回群である。一方、 $A(f)$ を不変にする置換行列 P の集合 $G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\} = \{\mu(a_1), \mu(a_2), \mu(a_3), \mu(a_4)\}$ は隣接行列の群で不変群 $G(f)$ と同型である。

並列写像 f_{∞} は 4 対 1 写像であるが 2 対 1 写像の直和に分解されない。

例 6. $Q = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 上の局所関数 f の行列表現が以下のように与えられているとする。

$$A(f) = \begin{pmatrix} a_4 & a_1 & a_3 & a_2 \\ a_1 & a_4 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 & a_4 \\ a_3 & a_2 & a_4 & a_1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^4 a_i \mu(a_i)$$

$\{1, 2, 3, 4\}$ 上の 2 つの置換 σ と τ を f に $(\sigma, \tau) * f(a_i, a_j) = f(a_{\sigma i}, a_{\tau j})$ のように作用させる。ただし、 $\sigma(1)=3, \sigma(2)=4, \sigma(3)=1, \sigma(4)=2, \tau(1)=4, \tau(2)=3, \tau(3)=2, \tau(4)=1$ $(\sigma, \tau) * f = f, (\tau, \sigma) * f = f$ であるから、 $(\sigma\tau, \tau\sigma) * f = f$ が成立する。 f の不変群は $G(f) = \{(\sigma, \tau), (\tau, \sigma), (\sigma\tau, \tau\sigma), (\sigma^2, \tau^2)\}$ である。一方、 P, Q を置換行列とするとき $A(f)$ を不変にする左不変群 $G_{\ell}(A_f) = \{P \mid P^3 Q, PA(f)Q = A(f), \}$

$$= \left\{ I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

同様に $A(f)$ を不変にする右不変群 $G_r(A_f) = \{Q|^3 P, PA(f)Q = A(f)\}$

$$= \left\{ I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

はそれぞれ群となり、この例では左不変群 $G_l(A_f)$ と右不変群 $G_r(A_f)$ は一致し $G(f)$ と同型である。また、この不変群は隣接行列の集合 $\{\mu(a_i) \mid 1 \leq i \leq m\}$ によって生成される群の真部分群である。並列写像 f_∞ は 4 対 1 写像である。

注意 1. 左不変群と右不変群が一致しない場合（但し、同型にはなっている）もある。

不変群を表でまとめると表 1 のようになる。

状態数	不変群のタイプ
m = 2	$G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\}$
m = 3	$G(A_f) = \{P \mid PA(f)P = A(f)\}$
m = 4	$G(A_f) = \{P \mid PA(f)P^{-1} = A(f)\}$ $G(A_f) = \{P \mid PA(f)P = A(f)\}$ $G_l(A_f) = \{P ^3 Q, PA(f)Q = A(f)\}$ $G_r(A_f) = \{Q ^3 P, PA(f)Q = A(f)\}$

表 1. 置換行列による $A(f)$ の不変群

6. 定数対 1 並列写像と同値関係

文献[1] において Hedlund は並列写像が定数対 1 写像になるための必要十分条件を与えている。異なる $c, c' \in C(Q)$ と正の整数 k に対して c と c' が totally k -separated であるとは $\forall i \in \mathbb{Z}$ に対して $c_i c_{i+1} \cdots c_{i+k-1} \neq c'_i c'_{i+1} \cdots c'_{i+k-1}$ が成立する事である。

定理 2 [1]. スコープ幅 n の局所関数 f による並列写像 f_∞ が定数対 1 写像になるための必要十分条件は $\forall c \in C(Q)$ に対して $f_\infty^{-1}(c)$ に属する任意の 2 つの様相は totally $(n-1)$ -separated である。

定数対 1 写像は全射であるので定理 2 より Q^{n-1} に次のような同値関係を導入する。
 f_∞ を定数対 1 写像とする。 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} = b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ のとき $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \sim b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ とする。
 $a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \neq b_1 b_2 \cdots b_{n-1}$ のとき

$$a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \sim b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \Leftrightarrow Q \text{ 上の任意のワード } y_1 \cdots y_\ell \text{ に対して異なるワード } a_1 \cdots a_{\ell+n-1} \text{ と } b_1 \cdots b_{\ell+n-1} \text{ に対して } y_j = f(a_j \cdots a_{j+n-1}) = f(b_j \cdots b_{j+n-1}) \quad (1 \leq j \leq \ell)$$

明らかにこの関係は同値関係である。従って集合 Q^{n-1} を同値類に分類できる。

故に、 k 対 1 写像ならば $k \times |Q^{n-1}/\sim| = m^{n-1}$ が成り立つ。

このことから次の定理が成り立つ。

定理 3. $Q = \{a_1, \dots, a_m\}$ 上のスコープ幅 n の局所関数 $f: Q^n \rightarrow Q$ による
並列写像が定数対 1 写像ならば定数は m の約数である。

7. 参考文献

- [1] G. A. Hedlund, Endomorphisms and automorphisms of shift dynamical systems.
Mathematical systems Theory 3 (1969), 320-375.
- [2] 佐藤, 「セルオートマトンの直和とテンソル積」 電子情報通信学会ソサエティ大会,
回路とシステム, A-1-9, 2016 年 9 月