

物体を過ぎる自由表面流に発生する非線形波動

(資源環境研) 永翁 龍一 (国立環境研) 花崎 秀史

1. 緒言

自由表面を有する流れは、海洋・河川などの自然環境中や、熱や物質の移動を目的としたガス吸収装置・蒸発装置などの化学工業装置において観察される^{(7),(8)}。これらの自由表面のある流れでは、自由表面上に作用する外力の効果(たとえば浮体の存在や底壁面の突起や陥没、あるいは気流側にも流れが存在する場合)などによって水面波が発生する^{(1),(9)}。この水面波は、自由表面での熱や物質の移動に大きな影響を及ぼす。このため自由表面を有する工業装置の最適設計や制御の問題を解決するためには、水面波の時間発展、及び水面波と流れの関連性を精度よく予測することが必要不可欠である。また上で述べたような実用的な目的のみならず、表面重力波の力学は非線形性を有する基礎的な問題であるため、流体力学的・数理解析的にも非常に興味深い問題である^{(1),(9),(10),(12)}。

浅い自由表面流の底壁面に物体が存在する場合、この物体によって自由表面上に励起され、特にフルード数が1の場合には共鳴が生じて水面波の振幅が最大になる。一般にこの水面波の時間発展は外力項のある Korteweg-de Vries(fKdV)方程式によって良好に記述できることが指摘されている⁽⁹⁾。しかしこの fKdV 方程式は弱非線形性及び浅水波近似の2つの仮定を含んでおり、実際の水面波の時間発展をどの程度記述できるのか明らかではない。そこで本研究では Navier-Stokes 方程式の数値計算を行うことによって物体によって励起される比較的波高の大きい水面波の非線形時間発展を追跡する。この結果と fKdV 方程式及び高次項の効果を考慮した方程式の時間発展解とを比較・検討することによって fKdV 方程式に代表される弱非線形理論の有効性の検証を試みる。

2. 数値計算法の概要

2.1 支配方程式

非圧縮性で密度一定のニュートン流体を仮定した場合、流体運動は連続の式と Navier-Stokes 方程式で記述することができる。これらの方程式を物理座標系 (x_1, x_2, t) から計算座標系 (ξ_1, ξ_2, τ) に時空間ともに座標変換し、一般座標系で表示すると以下のようなになる⁽⁷⁾。

$$a^i \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi^i} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} = & - \left\{ a^i \cdot (u - u_g) \right\} \frac{\partial u}{\partial \xi^i} + \frac{\mu}{\rho} \left\{ G^{ij} \frac{\partial^2}{\partial \xi^i \partial \xi^j} + \left(a^i \cdot \frac{\partial a^j}{\partial \xi^i} \right) \frac{\partial}{\partial \xi^j} \right\} u \\ & - a^i \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \xi^i} + g \end{aligned} \quad (2)$$

ここで $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$ は速度ベクトル、 $\mathbf{u}_g = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \tau}, \frac{\partial x_2}{\partial \tau} \right)$ は計算座標系から見た物理座標の移流速

度、 μ は粘性係数、 ρ は密度、 p は圧力、 $\mathbf{g}$ は重力よる外力ベクトルである。また $\mathbf{a}^i$ 、 G^{ij} は各々 $\mathbf{a}^i = \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial x_1}, \frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} \right)$ 、 $G^{ij} = \mathbf{a}^i \cdot \mathbf{a}^j$ で定義される反変計量ベクトル及び反変計量テンソル

である。これらの支配方程式を代表長さ D と代表速度 U を用いて無次元化した後に、有限差分法を用いて離散化する。空間微分項については、粘性項と圧力項は2次精度の中心差分で、慣性項は(3)式で示される3次精度の風上差分(UTOPIA スキーム)を用いて差分近似する。

$$\begin{aligned} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i &= c_i \frac{-(u_{i+2} - u_{i-2}) + 8(u_{i+1} - u_{i-1})}{12\Delta x} \\ &+ |c_i| \frac{(u_{i+2} + u_{i-2}) - 4(u_{i+1} + u_{i-1}) + 6u_i}{12\Delta x} \end{aligned} \quad (3)$$

また(1),(2)式で示される支配方程式を連立させるための数値解法として、以下に示す fractional step 法を用いる。

$$(\text{第1ステップ}) \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u}^n + \Delta\tau \cdot H(\mathbf{u}^n) \quad (4)$$

$$(\text{第2ステップ}) \quad \nabla^2 \Pi^{n+1} = -\frac{1}{\Delta\tau} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (5)$$

$$(\text{第3ステップ}) \quad \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \Delta\tau \cdot \nabla \Pi^{n+1} \quad (6)$$

ここで、添字 n は時間ステップ、 $\Delta\tau$ は時間刻み、 H は慣性項と粘性項の和、 Π は圧力項と重力項の和を示す。この解法では連続の式は第3ステップで陰的に満足される。第1ステップの時間積分には2次精度の Runge-Kutta 法⁽⁷⁾を、第2ステップの Poisson 方程式の解法には SOR 法を用い、各時間ステップで100回の収束計算を行う。

2.2 計算条件

図1に計算領域の概略図を示す。計算領域の大きさは水深方向に D 、流れ方向に $160D$ とし、底壁面に(7)式で示される物体を設置した。

$$h(x_1) = h_0 \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{\zeta(x_1 - 60D)}{D} \right\}; \quad \zeta = 0.3 \quad (7)$$

ここで h_0 は物体の高さを示す。また ζ は物体の幅を調整するためのパラメータであり、 $\zeta=0.3$ の場合では物体の幅は水深とほぼ同じとなる。この領域に流れ方向に801点、鉛直方向に61点の格子点を設ける。なお、格子点の間隔は流れ方向は等間隔、鉛直方向は底壁面近傍と自由表面近傍にクラスタリングを施し不等間隔格子とする。

支配方程式を代表長さ D 、及び代表速度 U で無次元化した場合、レイノルズ数 $Re=(\rho UD/\mu)$ 及びフルード数 $Fr=(U^2/gD)$ の2つの無次元数が現れるが、これらについてはそれぞれ $Re=1.2 \times 10^4$ 、 $Fr=1.0$ とする。また無次元時間刻みは $\Delta U\tau/D=0.002$ として $U\tau/D=200$ まで100,000

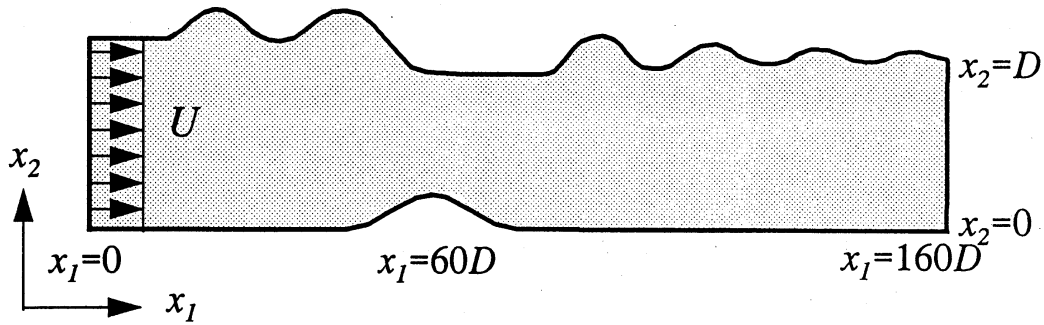


図1: 計算領域の概略図

ステップにわたって計算を行う。

速度と圧力の境界条件については底壁面、流入口及び流出口では以下のように設定する。

・底壁面 $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_t = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ (8)

・流入口 $\mathbf{u} = (U, 0), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ (9)

・流出口 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0$ (10)

ここで $\mathbf{n}$ は境界における法線方向外向きの単位ベクトルを、 n は境界における法線方向を、 $\mathbf{u}_t$ は境界での速度ベクトルの接線方向成分を示す。底壁面で粘着条件を用いると境界層が発達し、渦なし流れの仮定が成立しなくなる。このため Navier-Stokes 方程式の解と弱非線形理論との比較を行うことが困難となる。そこで底壁面における速度の境界条件は、底壁面での境界層の発達を防ぐために滑り壁とする。

2.3 自由表面での境界条件

自由表面での境界条件は、自由表面上に作用する接線方向及び法線方向の応力の釣り合いを取ることにによって以下のように設定する⁽²⁾。

$$\mathbf{a}^2 \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^1} + g^{2i} \left(\mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \right) = 0 \quad (11)$$

$$p = p_0 \quad (12)$$

ここで p_0 は気相側圧力であり、また共変計量ベクトルを $\mathbf{a}_i = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^i}, \frac{\partial x_2}{\partial \xi^i} \right)$ と定義する。(11)

式は自由表面での接線方向に働く粘性応力が0であることを、また(12)式は自由表面上の圧力は気相側圧力に等しいことを示す。(11)式と連続の式((1)式)とを連立させることによって、自由表面上の速度の境界条件は以下に示すような Neumann 型⁽²⁾で与えられる。

$$A \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} \end{pmatrix} = B \quad (13)$$

$$\text{ただし } A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad B = - \begin{pmatrix} \frac{1}{g^{22}} \left\{ a^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi^1} + g^{21} \left(a_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi^1} \right) \right\} \\ a^1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \xi^1} \end{pmatrix} \text{である。}$$

2.4 自由表面の形状の決定

自由表面の時間発展は、以下に示す運動学的境界条件によって記述される⁽⁷⁾。

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = u_2 - \left\{ a^1 \cdot (u - u_s) \right\} \frac{\partial f}{\partial \xi^1} \quad (14)$$

ここで f は座標軸 ξ^2 に沿って評価した自由表面の高さである。fractional step 法に従って速度及び圧力を計算した後に(14)式を用いて自由表面の形状を決定し、自由表面形状の変化に従って格子の再生成を行う。Navier-Stokes 方程式同様に(14)式の慣性項は(3)式に示す3次精度の風上差分を用いて近似し、時間進行には2次精度の Runge-Kutta 法を用いる。

支配方程式を連立させて解くためのアルゴリズムを、以下に簡単に要約する。ただし $\tau = n\Delta\tau$ における u^n 、 Π^n 及び f^n は既知とする。

- (1) (4)式を用いて u^* を計算する。時間進行には2次精度の Runge-Kutta 法を用いる。
 - (2) (5)式を用いて Π^{n+1} を計算する。数値解法にはSOR法を用いる。
 - (3) (6)式を用いて u^{n+1} を計算する。連続の式はこの時点で陰的に満足される。
 - (4) (14)式を用いて f^{n+1} を計算する。時間進行には2次精度の Runge-Kutta 法を用いる。
 - (5) 自由表面形状の変化に合わせて計算格子を再生成する。
- 以上(1)～(5)を希望の時間ステップまで繰り返す。

3. 弱非線形理論

フルード数が1の場合、共鳴が生じて物体によって励起される水面波の振幅は最大となる。この水面波の振幅が比較的小さい場合には、この時間発展は以下に示す forced Korteweg-de Vries (fKdV)方程式

$$\begin{aligned} -A_T + b_1 A A_X + b_2 A_{XXX} + G_X &= 0 \\ b_1 &= \frac{3}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (15)$$

で良好に表現することができる(水深 D は1としてある)⁽¹⁾。ここで $G(X)$ は外力項を示す。また X, T はそれぞれ微小パラメータ ε を用いて

$$X = \varepsilon^{1/2} x_1, \quad T = \varepsilon^{3/2} \tau \quad (16)$$

と rescaling されている。この fKdV 方程式は ε^2 の order で得られるが、さらに高次の ε^3 の order から次に示す forced full extended Korteweg-de Vries (fFEKdV) 方程式^{(3),(10)}が得られる。

$$\begin{aligned} & -A_T + b_1 A A_X + b_2 A_{XXX} \\ & + \varepsilon (b_3 A^2 A_X + b_4 A_X A_{XX} + b_5 A A_{XXX} + b_6 A_{XXXXX}) + G_X = 0 \\ & b_1 = \frac{3}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = -\frac{3}{8}, \quad b_4 = \frac{23}{24}, \quad b_5 = \frac{5}{12}, \quad b_6 = \frac{19}{360} \end{aligned} \quad (17)$$

ここでこれらの高次項の中で、 $A^2 A_X$ の項のみを考慮したもの(つまり $b_4=b_5=b_6=0$ の場合)は forced extended Korteweg-de Vries (fEKdV) 方程式と呼ばれる。これらの fKdV, fEKdV 及び fFEKdV 方程式を、pseudospectral 法を用いて離散的に解く^{(4),(10)}。離散変数 A の Fourier 変換を $F\{A\}$ 、また逆 Fourier 変換を $F^{-1}\{A\}$ と記述し、(17)式を離散的に表現すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & A(X, T + \Delta T) - A(X, T - \Delta T) = \\ & 2i\Delta T b_1 A F^{-1}\{k F\{A\}\} - 2ib_2 F^{-1}\{\sin(k^3 \Delta T) F\{A\}\} \\ & + \varepsilon [2i\Delta T b_3 A^2 F^{-1}\{k F\{A\}\} - 2i\Delta T b_4 F^{-1}\{k F\{A\}\} F^{-1}\{k^2 F\{A\}\} \\ & - 2ib_5 A F^{-1}\{\sin(k^3 \Delta T) F\{A\}\} + 2ib_6 F^{-1}\{\sin(k^5 \Delta T) F\{A\}\}] \\ & + 2i\Delta T F^{-1}\{k F\{G\}\} \end{aligned} \quad (18)$$

離散変数 A を高速 Fourier 変換(FFT)を用いて波数空間へ変換し、周期境界条件を用いてこれらの方程式の非線形時間発展を(18)式に従って計算する。その結果得られる水面波の時間発展解を Navier-Stokes 方程式の解から得られる水面波の時間発展解と比較・検討する。

4. 結果及び考察

4.1 水面波内部の構造

以下に示す結果は全て物体の高さを $h_0/D=0.1$ として計算したものである。図 2 に Navier-Stokes 方程式によって得られた物体近傍における瞬間速度ベクトルの主流方向成分と鉛直方向成分、及び圧力分布を示す。時刻はいずれも $Ut/D=200$ であり、数値シミュレーションの最終段階で評価したものである。これらの図から主流方向速度 u_1 は鉛直方向に殆ど分布を持たないことがわかる。一方、鉛直方向速度 u_2 は緩やかな鉛直方向分布を持つ。そこで図 2 の矢印で示した A, B 部での鉛直方向速度分布を評価した結果を図 3 に示す。この図は、波の頂点となる A では、鉛直方向速度は殆ど直線的に変化すること、一方波の谷間となる B では鉛直方向速度は殆ど一定であり分布を持たないことがわかる。通常水面波の内部構造は直線的に変化することが仮定されるが、この図からそれらの仮定は定量的にかなりの妥当性を持つことがわかる。

4.2 水面波の時間発展解

図 4(a)に Navier-Stokes 方程式によって得られた水面波の時間発展解を示す。この図から、物体の前方には上流側に伝播する孤立波的な波が周期的に発生する。また物体の後方には lee wave と呼ばれる波が発生すること、及び物体の直後では水面は平らとなることもわかる。さらにこの図から上流側へ伝播する孤立波の高さは $\varepsilon A \sim 0.5D$ にも達し、比較的振幅の大きい水面波が励起されることが明らかとなった。これらの挙動は実験的事実⁽⁹⁾とも定性的には一致する。

図 4(b)～(d)に fKdV、fEKdV 及び fFEKdV 方程式から得られる水面波の時間発展解をそれぞれ示す。時間発展解の定性的な傾向は Navier-Stokes 方程式から得られるものとほぼ一致する。このことからこれらの弱非線形理論でも比較的振幅の大きい水面波の時間発展解をある程度予測することが可能であることがわかる。しかしこれらの弱非線形理論から得られた解を比較すると、上流側に伝播する孤立波については、その振幅はいずれの場合もほぼ等しいが、波の位相速度は fKdV 方程式の解が最も速く、fFEKdV 方程式の解が最も遅い。つまり高次の非線形項や分散項の効果を考慮することによって上流側に伝播する孤立波の位相速度が小さく評価されることがわかる。以上のことから、水面波の振幅が大きい場合には、fKdV 方程式には現れない高次項の効果が孤立波の振幅よりもむしろ位相速度に顕著な影響を及ぼすことを示す。なおこの傾向は、内部重力波の場合⁽¹⁰⁾にも同様に見られる。

次に Navier-Stokes 方程式の解と弱非線形理論から得られた解とを比較した結果を図 5 に示す。時刻はすべて $U\tau/D=200$ で比較した。この図より、上流側に伝播する孤立波については、Navier-Stokes 方程式の解と弱非線形理論から得られる解とは比較的よく一致する。しか

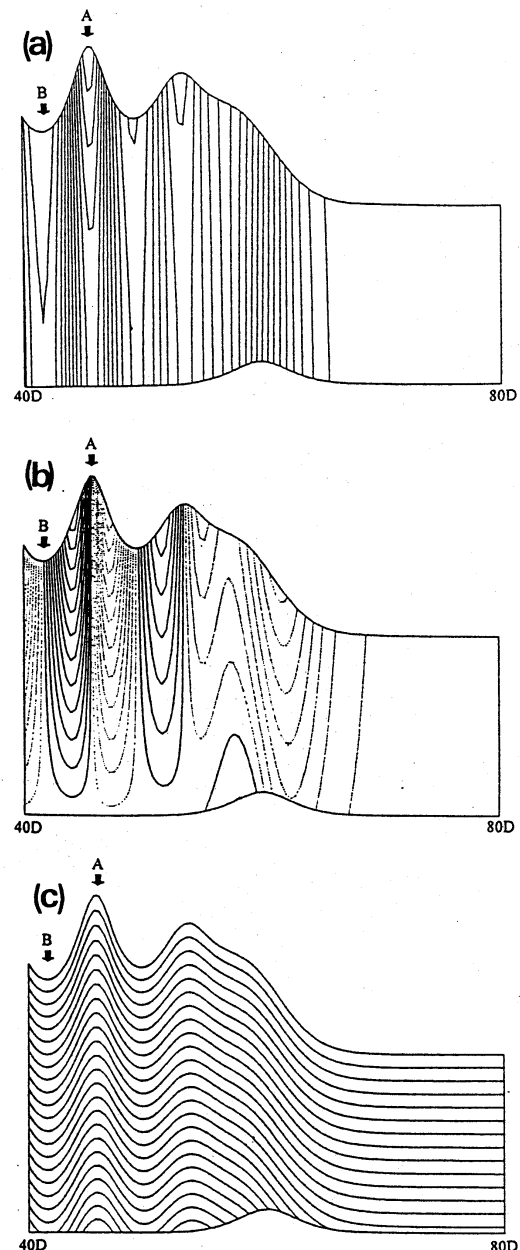


図2: 水面波の内部構造
(a)主流方向速度 (b)鉛直方向速度
(c)圧力

しその位相速度については、高次項の効果を無視した fKdV 方程式や fEKdV 方程式よりも、むしろ fFEKdV 方程式の方が Navier-Stokes 方程式の解とよく一致する。また物体の下流側に発生する lee wave については、弱非線形理論から予測される振幅は Navier-Stokes 方程式の解から振幅よりも大きい。本研究で行った Navier-Stokes 方程式の数値シミュレーションには、流体と底壁面との摩擦は考慮されていないが、粘性による流体内部の摩擦が含まれる。そのため、流体内部の摩擦(粘性)の効果が lee wave のダンピングを引き起こした可能性がある。

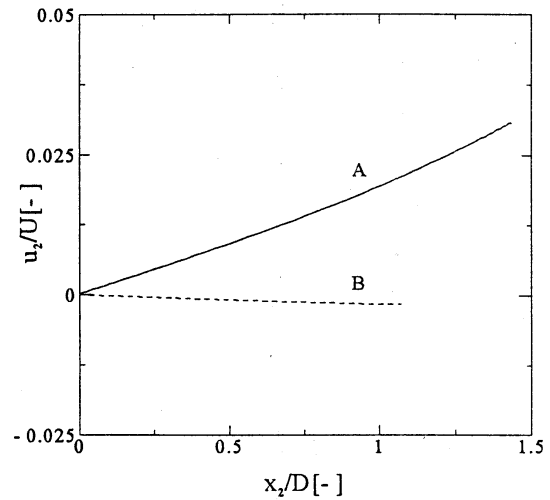


図3: 水面波内部の鉛直方向速度分布

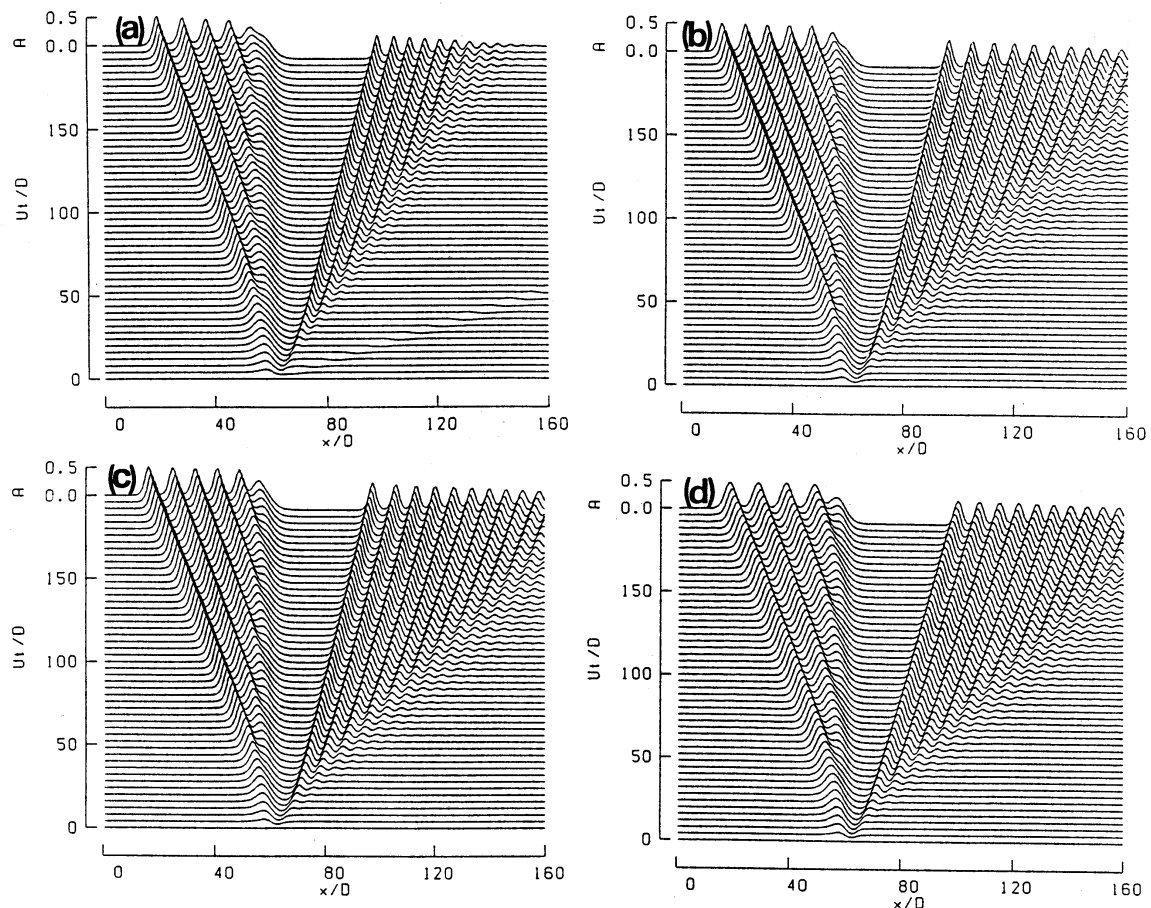


図4: 水面波の時間発展解 (a) Navier-Stokes方程式の解 (b) fKdV方程式の解 (c) fEKdV方程式の解 (d) fFEKdV方程式の解

このような流体内部の摩擦の効果を考察するためには、弱非線形理論に水平方向の流体の粘性の効果を考慮した fKdV-Burgers 方程式⁽¹²⁾を用いて、流体の粘性の効果を考慮することが必要となる。

4.3 水面波と内部重力波

以上 4.1 で示したように、上流側へ伝播する孤立波の位相速度や物体の下流側の lee wave のダンピングなどの差異が存在するものの、定性的には弱非線形理論を用いることによって自由表面波の非線形時間発展を予測できることがわかった。これに対して内部重力波の場合には、高次項を全く考慮しない fKdV 方程式ではその時間発展を予測することはできず、高次の非線形項 $A^2 A_x$ を考慮した fEKdV 方程式を用いることが必要となる^{(5),(6),(11)}。

通常の二層流体系を考えた場合、内部重力波における非線形項 $b_1 A A_x$ と高次非線形項 $\epsilon b_3 A^2 A_x$ の比は、上流側に伝播する孤立波の振幅がほぼ $\epsilon A = 0.08D$ ⁽⁵⁾ であることを考慮すると

$$\left| \frac{\epsilon b_3 A^2 A_x}{b_1 A A_x} \right| = \left| \frac{\epsilon b_3 A}{b_1} \right| = 0.70$$

(19)

となる。一方本研究で示した水面波の場合、上流側に伝播する孤立波の振幅は $\epsilon A = 0.5D$ であるから

$$\left| \frac{\epsilon b_3 A^2 A_x}{b_1 A A_x} \right| = \left| \frac{\epsilon b_3 A}{b_1} \right| = 0.125$$

(20)

となる。このように、水面波の場合に比較して内部重力波の場合は高次項の効果が大きく、たとえば $A^2 A_x$ の効果は約 5.6 倍にも達する。このことは内部重力波の場合、孤立波の振幅

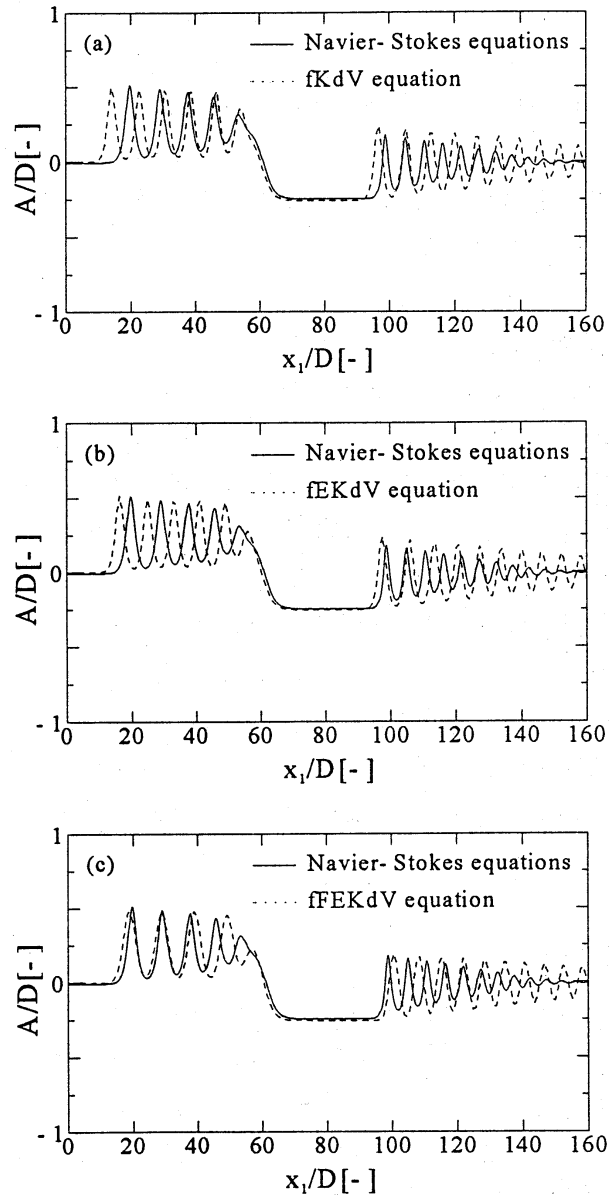


図5: Navier-Stokes方程式と弱非線形理論との比較
(a) fKdV方程式 (b) fEKdV方程式 (c) fFEKdV方程式

が $\varepsilon A \leq 0.015D$ 程度と非常に小さい場合にのみ、fKdV 方程式を用いて孤立波の非線形時間発展を予測することが可能であることを示す。一般に内部重力波の場合には、複数の鉛直モードが存在するために高次項の効果が大きくなる。このため非線形性が小さい(たとえば物体の高さが小さい)場合にのみ、fKdV 方程式が有効となる。これに対して水面波の場合には鉛直モードは単一であるため、fKdV 方程式でも定性的にはその非線形時間発展が予測可能であることがわかる。

5. 結論

Navier-Stokes 方程式の数値シミュレーションを行うことによって、物体によって励起される比較的振幅の大きい水面波の非線形時間解を計算した。この Navier-Stokes 方程式の解と、弱非線形理論から得られる水面波の時間発展解とを比較した結果、定性的には高次項の効果を無視した fKdV 方程式で水面波の時間発展解を評価できることがわかった。しかし上流側に伝播する孤立波の位相速度の差異については fKdV 方程式では説明できず、高次項を考慮した fFEKdV 方程式を用いる必要があることが明らかになった。また物体後方に発生する lee wave のダンピングについては、高次項を考慮した fFEKdV 方程式でも説明することはできなかった。このダンピングは、Navier-Stokes 方程式の解に含まれる流体内部の粘性による摩擦によって生じた可能性が大きい。この粘性の効果を定量的に明らかにするためには、粘性の効果も考慮した fKdV-Burgers 方程式を用いて水面波の非線形時間発展解を調べる必要があるとなり、今後の課題として残される。

参考文献

- (1) Akylas, T. R., *J. Fluid. Mech.* **141**, 455(1984).
- (2) Chiba, S. & Kuwahara, K., *Lecture Notes on Physics* **371**(1992).
- (3) Chow, K. W., *Phys. Fluids A* **1**, 1235(1989).
- (4) Fornburg, B. & Whitham, G. B., *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* **289**, 373(1978)
- (5) Hanazaki, H., *Phys. Fluids A* **4**, 2230(1992).
- (6) Hanazaki, H., *J. Wind Engng. Ind. Aerodyn.*, **46-47**, 283(1993).
- (7) Komori, S., Nagaosa, R. & Murakami, Y., *Phys. Fluids A* **5**, 115(1993).
- (8) Komori, S., Nagaosa, R. & Murakami, Y., *J. Fluid Mech.* **249**, 161(1993).
- (9) Lee, Y., Yates, G. T. & Wu, T. Y., *J. Fluid Mech.* **199**, 569(1989).
- (10) Marchant, T.R. & Smyth, N. F., *J. Fluid Mech.* **221**, 263(1990).
- (11) Melville, W. K. & Helfrich, K. R., *J. Fluid Mech.* **178**, 31(1987).
- (12) Smyth, N. F., *J. Fluid Mech.* **192**, 287(1988).
- (13) Wu, T. Y., *J. Eng. Mech. Div. ASCE* **107**(1981).