

ある非線型現象の方程式について
—— 経済学に現れる定差方程式について ——

岩手大 教育 中島文雄

数理経済学に於て、需要-供給の法則は 1 変数方程式によって記述されており、その力学について多くの興味ある結果が得られて来た ([1])。その主な一つは、粗代替系と呼ばれる経済体における、価格の変動の安定性 (*global stability*) についての研究である。この方面の、これまでの研究では、需要-供給の法則の 1 変数方程式は、殆ど、微分方程式であった (例外的に Uzawa 氏の論文 [2] がある)。そしてその理由は、全く数学的便宜によるものであり、経済現象としては、むしろ定差方程式を用いるべきにあることを指摘されて来た。

本稿では、この観点に立ち、定差方程式によって記述された粗代替系 (但し、かなり特殊な場合) について、*global stability* の存在を証明する。次に、同じ観点の下で行われた Uzawa 氏の研究 [2] について見ると、そこで扱われ

/

ている方程式は、本稿の方程式と本質的に異なり、従って異なった経済体を扱っていることが判る。この点について、本稿の末尾で述べる。

n 次元ユークリッド空間を R^n と表し、 $x \in R^n$ に対し、 x_i がその i 成分 ($1 \leq i \leq n$) を表す。2つのベクトル $x, y \in R^n$ に対し、 $x_i \leq y_i$ ($1 \leq i \leq n$) ならば、 $x \leq y$ と表し、 $x \in R^n$ について $x_i > 0$ ($1 \leq i \leq n$) ならば、 $x > 0$ と表す。集合 $R^+ = \{x \in R^n; x > 0\}$ と置く。 $n \times n$ 行列 $M = (m_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq n$) に対し $m_{ij} \geq 0$ ($1 \leq i, j \leq n$) ならば $M \geq 0$ と表す。

今、経済体が n 種の財から成り、それらを番号 $1, 2, \dots, n$ で表す。 i 財の時刻 t の価格を $p_i(t)$ と表し、価格体系をベクトル $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t))$ と表す。価格体系 p の下での i 財の超過需要量を $E_i(p)$ と表す。本稿では、需要-供給の法則は次の定差方程式で記述されているとする；

$$(1) \quad p_i(t+1) = p_i(t) + \lambda_i E_i(p(t)) \quad , \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$p(t) \in R^+,$$

ここで、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は正の定数で、価格変動分 $p_i(t+1) - p_i(t)$ の超過需要量に対する比例係数に相当し、独立変数 t は自然数を

値とし、離散的時刻に相当する。本稿では、 $F_i(p)$ は次の関数とする：

$$F_i(p) = \frac{\sum_{e=1}^n a_{ie} p_e}{p_i} \quad (1 \leq i \leq n)$$

ここで $\{a_{ie}\}$ は定数で、

$$a_{ie} > 0 \quad (i \neq e),$$

$$a_{ee} = - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq e)}}^n a_{ie} \quad (1 \leq e \leq n) \quad \text{とする.}$$

この場合、system (1) は、純粋交換経済で、各個人の効用関数が、すべて $\log$ -linear である場合に相当する。

次の定理が成立する。

定理. System (1) の $\{a_{ie}\}_{1 \leq i, e \leq n}$ に対し、

$$\alpha = \max_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} \left\{ \frac{|a_{ii}|^2 d_i}{|a_{ij}|}, |a_{ii}| d_i \right\} > 0 \quad \text{と置く.}$$

(1) の解の初期値 $p_0 = (p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0n})$ が

$$p_{0i} \geq \alpha \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{を満足すれば,}$$

次の事が成立する：

(I) (1) の解 $p(t)$ は $t \geq 0$ で存在する、即ち

$$p(t) \in R^+ \quad (t=1, 2, 3, \dots),$$

(II) $p(t)$ は有界かある。

(III) $p(t) \rightarrow$ 均衡点 $(t \rightarrow \infty)$ とある。

2.2.2, 1.4.1.1 $\bar{z} \in R^T$ へ、均衡点とは $E(\bar{z}) = 0$ を満すことである。

[注釈1] System (1) に対し、均衡点 $\bar{z} \in R^T$ が存在することは、Frobenius - Perron の定理より判る。(1)の型より、均衡点の定数倍は、又均衡点となるし、更に Frobenius - Perron の定理より、均衡点は定数倍を除いて唯一つとなることも知られている。均衡点は均衡価格に相当する。

[注釈2] 定理の経済学的意味について述べる。定理の結論は、上記の経済体では、財の取り引きを、いかなる初期の価格 p_0 より出発しても、ある時間の経過の後には、均衡価格に近い価格で、取り引きが行われていることを保証している。

System (1) に対して、 $\{a_{ij}\}$ が与えられた時、均衡価格を計算出来れば、財の取り引きは、そこで行えば良く問題は無い。しかし、財の種類 n が非常に大なるば、その算出は容易ではなく、その時、定理は意味を持つのである。

定理の証明のため lemma を準備する.

lemma. $\bar{z} \in R^+$ は (1) の均衡点の一つとし,

定理の $\alpha > 0$ に対し,

$$\beta = \frac{\alpha}{\max_{1 \leq i \leq n} \bar{z}_i} \quad \text{と置く.}$$

もし $p \in R^+$ が, $p \geq \beta \bar{z}$ ならば,

$$p_i \geq \lambda_i |a_{ii}| \quad \text{for } 1 \leq i \leq n.$$

証明. $\bar{z} = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_n) \in R^+$ は (1) の均衡点であるから

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \bar{z}_j = 0 \quad (1 \leq i \leq n).$$

よって

$$-a_{ii} \bar{z}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^n a_{ij} \bar{z}_j \geq a_{ij} \bar{z}_j \quad (i \neq j).$$

故に

$$(2) \quad \frac{|a_{ii}| \bar{z}_i}{|a_{ij}| \bar{z}_j} \geq 1 \quad \text{for } i \neq j.$$

すなわち $\max_{1 \leq i \leq n} \bar{z}_i = \bar{z}_j$ at some $j, 1 \leq j \leq n$ と

おくと, 条件 $p \geq \beta \bar{z}$ は

$$p_i \geq \alpha \frac{\bar{z}_i}{\bar{z}_j} \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{とわかる.}$$

もし $i \neq j$ ならば

$$p_i \geq \alpha \frac{\xi_i}{\xi_j} = \alpha \geq |\lambda_i| |a_{ii}|.$$

もし $i \neq j$ ならば, (2) より

$$p_i \geq \alpha \frac{\xi_i}{\xi_j} \geq \frac{|\lambda_i| |a_{ii}|^2}{|a_{ij}|} \cdot \frac{\xi_i}{\xi_j} \geq |\lambda_i| |a_{ii}|.$$

lemma の証明は終る.

さて, 定理の証明を行ふ. $n \times n$ 行列 $M(t) = (m_{ij}(t))_{1 \leq i, j \leq n}$
($t=1, 2, \dots$) と

$$m_{ii}(t) = 1 + \frac{\lambda_i a_{ii}}{p_i(t)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$m_{ij}(t) = \frac{\lambda_i a_{ij}}{p_i(t)} \quad (i \neq j)$$

で定義する. ただし, $p_i(t) > 0$ ($1 \leq i \leq n$) の場合に限り, τ である. さて system (1) は

$$(3) \quad p(t+1) = M(t) p(t)$$

と表わされる. (1) の均衡点 ξ は

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j = 0 \quad (1 \leq i \leq n) \quad \text{を満たす}$$

$$(4) \quad \dot{z} = M(t)z \quad (t \geq 0),$$

さて (I) を証明する. system (1) の初期値 p_0 は $p_0 \geq \alpha c$ であるから,

$$p_0 \geq \beta \xi.$$

上式から,

$$p(t) \geq \beta \xi \quad (t \geq 0)$$

を意味する

ことを示す. この為には, 数学的帰納法に従い,

$$p(s) \geq \beta \xi \quad \text{を仮定して}$$

$$p(s+1) \geq \beta \xi$$

を示せば良い. 今, $p(s) \geq \beta \xi$ を仮定すれば,

lemma の結論として

$$p_{\lambda}(s) \geq \lambda_{\lambda} |a_{\lambda \lambda}| \quad (1 \leq \lambda \leq n)$$

が得られる. 上式は

$$M(s) \geq 0$$

を意味することを示す. 実際は,

$$m_{\lambda\lambda}(s) = 1 + \frac{\lambda_{\lambda} a_{\lambda\lambda}}{p_{\lambda}(s)} = 1 - \frac{\lambda_{\lambda} |a_{\lambda\lambda}|}{p_{\lambda}(s)} \geq 0,$$

$$m_{\lambda j}(s) = \frac{\lambda_{\lambda} a_{\lambda j}}{p_{\lambda}(s)} \geq 0 \quad (\lambda \neq j),$$

より, (3), (4) より

$$p(s+1) - \beta \bar{z} = M(s) (p(s) - \beta \bar{z}).$$

今, $M(s) \geq 0 \Rightarrow p(s) - \beta \bar{z} \geq 0$ より,

$$M(s) (p(s) - \beta \bar{z}) \geq 0.$$

故に,

$$p(s+1) - \beta \bar{z} \geq 0.$$

$$p(s+1) \geq \beta \bar{z}.$$

よってより,

$$p(t) \geq \beta \bar{z} \quad (t \geq 0)$$

が証明された。これは $p(t) \in \mathbb{R}^+$ を意味している。

同時に

$$M(t) \geq 0 \quad (t \geq 0)$$

が証明された。

次に (II) を示す. $A > 0$ を十分大きな数として

$$A \geq p_0.$$

とする.

$$A \geq p(t+1) = M(t) (A \geq p(t)) \quad (t \geq 0).$$

(I) の証明で, $M(t) \geq 0 \quad (t \geq 0)$ であることが判るから,

$$A \geq p(t) \geq 0 \quad \text{は,}$$

$$A \geq p(t+1) \geq 0$$

を意味する. 仮定より $A \geq p_0 \geq 0$ であるから

$$A \geq p(t) \geq 0 \quad (t \geq 0),$$

即ち,

$$A \geq p(t) \quad (t \geq 0)$$

となる. これは $p(t)$ の有界性を示している.*)

最後に (IV) を示す. 又下,

$$\lambda E(p) = (\lambda_1 E_1(p), \lambda_2 E_2(p), \dots, \lambda_n E_n(p))$$

と表す.

*) 上の (II) の証明は, 東京大学 理学部 数学教室の
矢野助孝の advice に依る.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し, その内積を

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{x_i y_i}{\lambda_i},$$

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \text{と置く.}$$

すると

$$\begin{aligned} |p(t+1)|^2 &= \langle p(t+1), p(t+1) \rangle \\ &= \langle p(t) + \lambda E(p(t)), p(t) + \lambda E(p(t)) \rangle \\ &= \langle p(t), p(t) \rangle + 2 \langle p(t), \lambda E(p(t)) \rangle + \\ &\quad + \langle \lambda E(p(t)), \lambda E(p(t)) \rangle, \end{aligned}$$

仮定より

$$\langle p(t), \lambda E(p(t)) \rangle = \sum_{i=1}^n p_i(t) E_i(p(t)) = 0.$$

故に

$$(5) \quad |p(t+1)|^2 = |p(t)|^2 + |\lambda E(p(t))|^2.$$

これより, $|p(t+1)| \geq |p(t)|$ が得られ, 数列 $\{|p(t)|\}_{t=1}^{\infty}$ は単調増加で, 有界となり,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |p(t)| = A_0 \quad (> 0)$$

が存在する.

(5) 2. $t \rightarrow \infty$ なるとき,

$$A_0^2 = A_0^2 + \lim_{t \rightarrow \infty} |A E(p(t))|^2$$

故に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(p(t)) = 0$$

となり,

均衡点の唯一性より,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = A_0 \frac{3}{13}$$

となる.

証明は終る.

[注釈3] 定理の条件 $p_0 \geq \alpha e$ が満たされていない場合は、
上の結論は必ずしも成立しない、例えば 2次元 system;

$$\begin{cases} p_1(t+1) - p_1(t) = \frac{-p_1(t) + p_2(t)}{p_1(t)} \\ p_2(t+1) - p_2(t) = \frac{p_1(t) - p_2(t)}{p_2(t)} \end{cases} \quad \text{となる,}$$

初期値を $p_1(0) = \frac{1}{2}$, $p_2(0) = \frac{1}{8}$ とすれば;

$$p_1(1) = p_1(0) - 1 + \frac{p_2(0)}{p_1(0)} = -\frac{1}{4} < 0$$

となり, (I) は成立しないことが判る.

[注釈4] 需要-供給の法則も、微分方程式で記述されて来た、24までの定理では、同様の結論を得るために、条件 $p_0 \geq \alpha e$ に類するものは仮定されて来た、それは微分方程式を

$$p_i(t+dt) - p_i(t) = \lambda_i E_i(p(t)) dt$$

と見れば、定理の条件は

$$p_0 \geq \alpha dt e = 0$$

となり、常に満たされていなければならない。

最後に、本稿と同じ主題を扱った Uzawa 氏の論文 [2] について述べる。彼の考える方程式は

$$p_i(t+1) = \max [0, p_i(t) + \lambda_i E_i(p(t))] \quad (1 \leq i \leq n)$$

である。この方程式は、すべての財に対して、その価格が zero となる可能性を意味しており、従って関数 $E(p)$ はその連続関数としての定義域が、 $p > 0$ のみならず、 $p \geq 0$ (但し $p \neq 0$) となることを要請される。これに対し、本稿の system (1) は、すべての財の価格が、常に正であることが前提であり、関数 $E(p)$ は、 $p_i = 0$ となる点 p では不連続である。

参考文献.

[1]. F. Nikaido, Convex structure and Economic Theory, Academic Press (1968).

[2]. H. Uzawa, Walras' Tâtonnement in the theory of exchange, Review of Economic Studies, vol. 27 (1959), pp. 182-198.