

間欠性カオスに於ける位相の跳びとその特性関数について

九大理 九州共立大工^A 江上邦博、岡本寿夫、森 肇^A、富永広貴

間欠性カオスは規則的な運動をするラミナー部分がバーストによってランダムに切断されたものである。このラミナー部分は間欠性カオスのモデル図1(b)でチャンネル(細くなった部分)を通る様な軌道に対応し、バーストは右側の影の部分の構造を反映したものである。

バースト発生頻度は間欠性カオスの発生点に近づくにつれ減少するので、バーストが信号全体に占める割合はほとんど無視できるようになり、またこうしたバーストはランダムでよくわからないものであるとして従来は無視されてきた。しかし最近になって、パワースペクトル等を計算する上ではこのバーストの寄与が無視できないことがわかってきた。そういったことから、バースト部分をカオス力学的な立場より見直そうというのが本研究の目的である。

一つの例として周期的なラミナー運動が簡単な正弦波の場合には

$$\begin{aligned} X_n(t^{(n)}) &= a_M [1 + x_n(t^{(n)})] \cos(2\pi/T_0 t + \varphi_n) \\ X_{n+1}(t^{(n+1)}) &= a_M [1 + x_{n+1}(t^{(n+1)})] \cos(2\pi/T_0 t + \varphi_{n+1}) \end{aligned}$$

というふうを書くことができるであろう。ここで、 a_M は周期振動の振幅であり、 $x_n(t^{(n)})$ は振幅のゆっくりした変動を表し、 T_0 はラミナー振動の周期、 φ_n は振動の初期位相を表している。そして、 $t^{(n)}$ は以前に述べた信号のポアンカレ断面をとったときの離散時間に対応する。この初期位相 φ_n はバーストによりランダムに変化させられ、バーストが起こるごとに位相が跳ぶことになる。この位相の跳び($\xi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1}$)はバーストの継続時間 $\tau_B^{(n)}$ と次の関係にあることがわかっている。

$$\xi_n = \varphi_n - \varphi_{n-1} = \frac{2\pi}{T_0} [\tau_B^{(n)} \bmod T_0]$$

従って、この位相の跳びをバーストの継続時間で定義でき、つまり位相の跳びはバーストの構造を反映したものであることがわかる。

さてその位相の跳びを Rössler モデルや Lorenz 系、強制振り子等の微分方程式系を用いて計算してみる。例えば Rössler モデルでは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + z(x - r) \end{aligned}$$

$a = b = 0.2, r \simeq 6.64$ にとればタイプ I 間欠性カオス (4 周期) が発生する。以下の議論はこのパラメーターでのものである。この時のリターンマップを図1(a),(b)に、 x_n と x_{n+1} 間の時間間隔 (ポアンカレ断面への再帰時間) を図1(c)に示す。

ポアンカレ断面への再帰時間の分布 (x 依存性) というようなものが存在するというのは微分方程式系特有のものである。(実はこの再帰時間が一様でないというのが、位相の跳びの分布に重大な影響を与えることになる。)

レスラー系を使ってバーストの継続時間及び位相の跳びを計算した結果が図2である。バーストの継続時間が指数関数的な分布をしているのはカオス力学の立場から容易に理解できる。また位相の跳びもバーストの継続時間の指数分布を受け継いだものとなっている。この位相の跳びは写像系や外力の働く強制振り子系ではラミナー軌道の周期性に対応する個数の関数的なピークが観測され、Rössler 系のようにポアンカレ面への再帰時間が不均一な系の場合にはさらにピークの周りに構造を持つことを紹介した。

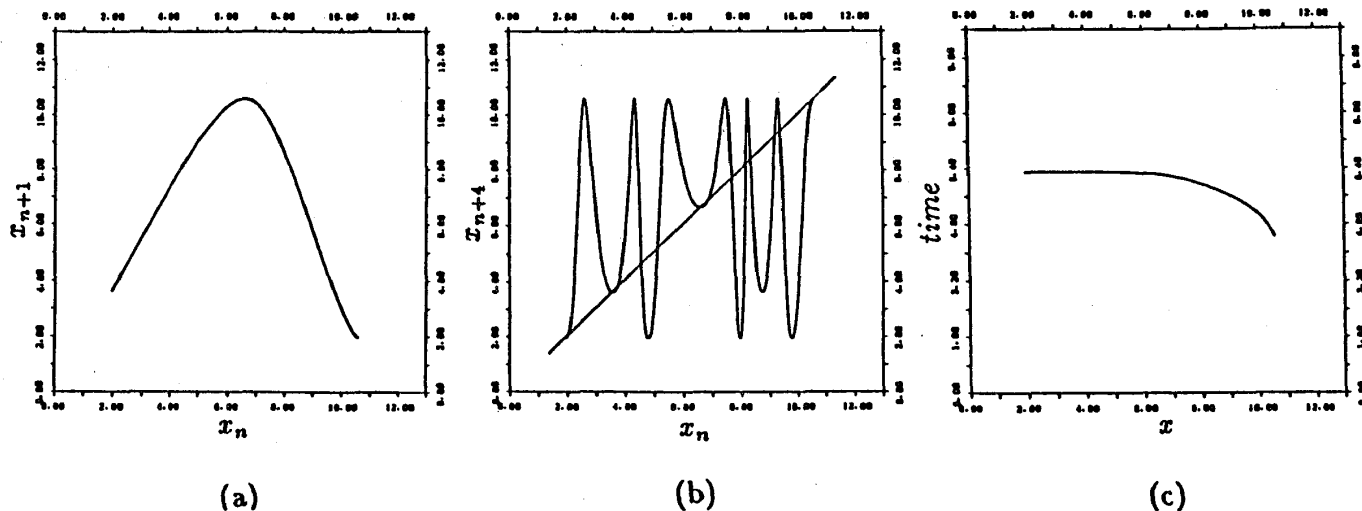


図 1: Rössler 系のリターンマップ。(a) 1 回写像マップ。(b) 4 回写像マップ。(c) ポアンカレ断面への再帰時間の分布 (x 依存性)。

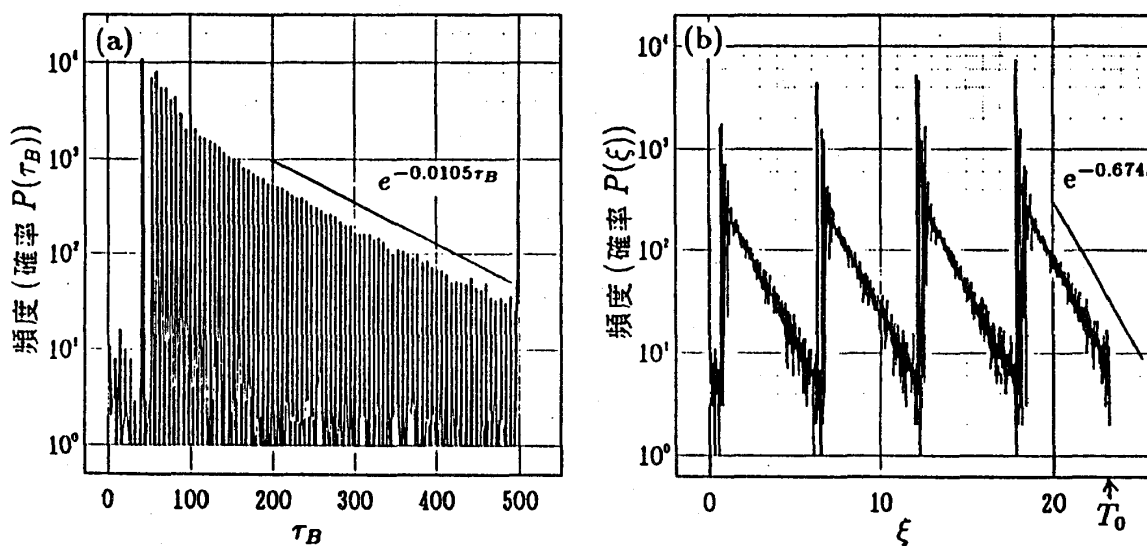


図 2: Rössler 系での (a) バースト継続時間の分布。(b) 位相の跳びの分布。

さて位相の跳びの分布より、位相の跳びの特性関数が次の式により経験的に数値計算することができるが、これは時系列のパワースペクトルと密接な関係にあることがわかっている。

$$\langle e^{i(\omega/\omega_0)\xi} \rangle = \int_0^{T_0} e^{i(\omega/\omega_0)\xi} P(\xi) d\xi \quad \omega_0 = 2\pi/T_0$$

パワースペクトルを構成するための特性関数として

- ラミナー振動の特性関数

$$\langle \exp[-i\omega\tau_n] \rangle = \exp[-i\nu\tau(\nu) - \gamma(\nu)], \quad \nu = \omega\tau_c$$

- 振幅変動の特性関数

$$\langle b_n(\omega) \rangle = \rho B(\nu)$$

$$x_n(\omega) = \frac{1}{\tau_c} \sum_{s=0}^{\tau_n} x_s^{(n)} \exp(-i\omega s) = \frac{1}{2} [1 - \exp(-i\omega)] b_n(\omega)$$

- 位相の跳びの特性関数

$$\langle \exp[i(\omega/\omega_0)\xi_n] \rangle = \exp[i\xi(\omega) - \eta^2(\omega)]$$

の3つが重要である。タイプI間欠性カオスについては、ラミナー振動と振幅変動の特性関数のモデル化は出来ているが、位相の跳びについてはまだ未解決の問題であり今後の課題とされている（詳しくは参考文献 [1,2] 参照）。これに関連して、講演では Rössler モデル及び強制振り子の時系列のパワースペクトルを紹介した（図3）。今回はパワースペクトルについて解析を行う時間がなかったため、これについては次の機会に報告したい。

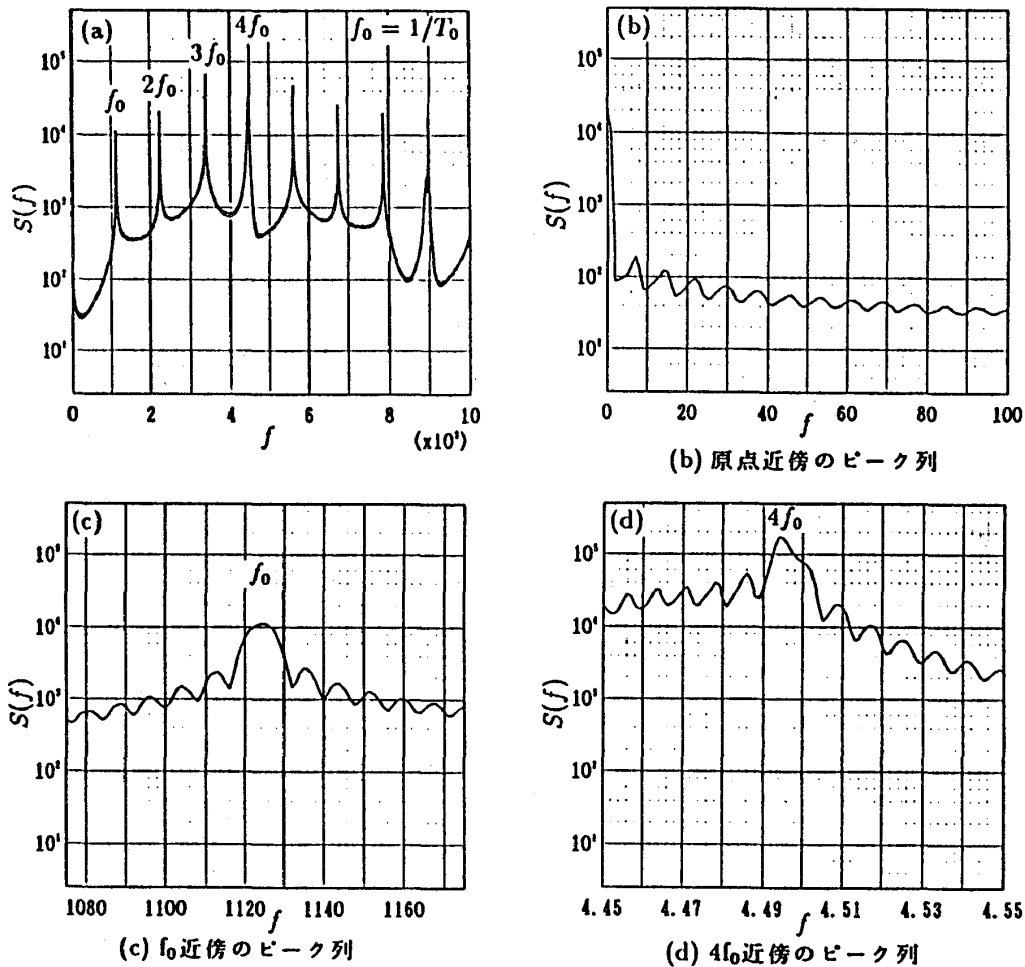


図3: Rössler モデルのパワースペクトル。

参考文献

- 1) H.Mori, H.Okamoto, B.C.So and S.Kuroki, Prog.Theor.Phys.76,4,784
- 2) H.Okamoto, H.Mori and S.Kuroki, Prog.Theor.Phys.79,3,581