

## Z-transforms と noetherian pairs

広島大 理学部 伊藤史朗

J. R. Matijevic は  $A$  が reduced ネーター環のとき  $(A, A^{\sharp})$  がネーター pair となることを証明した ([3]). 又、最近 D. D. Anderson によって、一般のネーター環に対して  $(A, A^{\sharp})$  がネーター pair となる 1 つの十分条件が得られた。ここではさらに一歩進んで、 $(A, A^{\sharp})$  がネーター pair となる必要十分条件について考えてみたい。

注意 ネーター環  $A$  に対し、 $A^{\sharp} = \{x \in Q(A) \mid x \in A \text{ 又は } \dim A/A_A x = 0\}$  とおき、 $A^{\sharp}$  を  $A$  の global transform という。又、 $A \subseteq B$  であって、 $A$  と  $B$  の中間の環が全てネーターであるとき、 $(A, B)$  はネーター pair であるという。

設定を少し一般化しておく。 $A$  をネーター環、 $Z$  を  $\text{Spec}(A)$  の部分集合で特殊化で閉じているものとする。さらに  $Z$  の元は全て regular prime ideal (即ち、 $A$  の非零因子を含む prime ideal) とする。 $\text{Ass}_A(M) \subseteq \text{Ass}_A(A)$  となる  $A$ -加群

$M$  に対し,

$$T(Z, M) = \{ x \in M \otimes_A Q(A) \mid V(M :_A x) \subseteq Z \}$$

とおき, これを  $M$  の  $Z$ -transform と呼ぶことにする。(  $A$  のイデアル  $I$  を含む素イデアル全体の集合を  $V(I)$  で表わす。)

$T(Z, A)$  は  $A$  を含む  $Q(A)$  の部分環であって,  $T(Z, M)$  は自然に  $T(Z, A)$ -加群となつてゐる。 $Z$  として  $A$  の regular 極大イデアル全体の集合をとれば  $T(Z, A) = A^*$  である。

定理を述べる前に  $Z$ -transforms についていくつかの注意をしておく。 $A$  及び  $Z$  は上で用いたものと同じとする。 $A$  のイデアル  $I$  で  $\text{Ass}_A(A/I) \subseteq \text{Ass}_A(A)$  となるものを考える。

$Z' = \{ \mathfrak{p}/I \mid \mathfrak{p} \in Z, \mathfrak{p} \supseteq I \}$  とおくと  $Z'$  に含まれる素イデアルは全て  $B = A/I$  の非零因子を含む素イデアルであるが, 定義から容易に分るように  $T(Z, B) = T(Z', B)$  である。又, 自然な環準同型  $T(Z, A) \rightarrow T(Z, B)$  が存在して, その kernel は  $T(Z, I) = T(Z, A) \cap I \cdot Q(A)$  となつてゐる。

定理  $A$  をネーター環,  $Z$  を  $\text{Spec}(A)$  の部分集合で特殊化で閉じてゐるものとする。さらに  $Z$  に含まれる素イデアルは全て regular であるとする。このとき次の条件 (1) (2) は同値である。

(1)  $(A, T(Z, A))$  はネーター pair

(2) (a) 任意の  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$  について  $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$  は

ネーター pair であつて、さらに

(b)  $\text{Ass}_A(A)$  の元  $\mathfrak{p}$  で  $A_{\mathfrak{p}}$  が reduced でないものについて、 $T(\mathbb{Z}, A_{\mathfrak{p}})$  は有限生成  $A_{\mathfrak{p}}$ -加群。

もし任意の  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$  に対し  $A_{\mathfrak{p}}$  が reduced でないなら、上の (1)(2) は次の (3) と同値。

(3)  $T(\mathbb{Z}, A)$  は有限生成  $A$ -加群。

もし任意の  $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$  に対し  $(A_{\mathfrak{p}})'$  ( $= A_{\mathfrak{p}}$  の  $\mathbb{Q}(A_{\mathfrak{p}})$  における整閉包) が有限生成  $A_{\mathfrak{p}}$ -加群であれば上の (1)(2) は次の (4) と同値。

(4) (a) 任意の  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$  について  $(A_{\mathfrak{p}}, T(\mathbb{Z}, A_{\mathfrak{p}}))$  はネーター pair であつて、さらに

(b)  $\text{Ass}_A(A)$  の元  $\mathfrak{p}$  で  $A_{\mathfrak{p}}$  が reduced でないものについて、 $(A_{\mathfrak{p}})'$  の高々 1 の極大イデアル  $\mathfrak{m}$  で  $\mathfrak{m} \cap A_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}$  となるものは存在しない。

定理の証明には次の 4 つの補題が必要である。証明は全て容易であるから省略する。補題 1, 2, 3 については EGA IV (5.11) を参考にせよ。

補題 1.  $A$  をネーター環,  $\{\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r\}$  を  $A$  の極小素イデアルで  $A_{\mathfrak{p}_i}$  が reduced とならないものの全体のなす集合とする。このとき次の (1)(2) が成立する。

(1)  $A$  の中零イデアルからなる列  $M_n \supset \cdots \supset M_0 = 0$  以下の性質をもつものが存在する。

(a) 各  $j$  ( $0 \leq j < n$ ) に対し素イデアル  $\mathfrak{p}_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) が存在して,  $\mathfrak{p}_i M_{j+1} \subseteq M_j$  かつ  $M_{j+1}/M_j$  は  $A/\mathfrak{p}_i$  のイデアルに  $A$ -加群として同型。

(b)  $\text{Ass}_A(A/M_j) = \text{Ass}_A(A)$   $j = 0, \dots, n$ 。

(c)  $A$  の任意の極小素イデアル  $\mathfrak{p}$  に対し,  $(A/M_n)_{\mathfrak{p}}$  は reduced。

(2) 各  $\mathfrak{p}_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) に対し,  $A$  の中零イデアル  $N_i (\neq 0)$  が存在して,  $\text{Ass}_A(A/N_i) = \text{Ass}_A(A)$ ,  $\mathfrak{p}_i N_i = 0$  かつ  $N_i$  は  $A/\mathfrak{p}_i$  のイデアルに  $A$ -加群として同型。

補題 2.  $A$  をネーター環で,  $Z$  は定理のそれと同じものとする。 $\mathfrak{p}$  を  $A$  の極小素イデアルで  $A_{\mathfrak{p}}$  が reduced でないものとすると補題 1 より,  $A$  の中零イデアル  $N (\neq 0)$  が存在して  $\text{Ass}_A(A/N) = \text{Ass}_A(A)$ ,  $\mathfrak{p}N = 0$  かつ  $N$  は  $A/\mathfrak{p}$  のイデアルに  $A$ -加群として同型である。このとき  $T(Z, N)$  は  $T(Z, A/\mathfrak{p})$  のイデアルに  $T(Z, A)$ -加群として同型である。

補題 3.  $A$  をネーター整域で  $A' (= A$  の  $Q(A)$  における整閉包) は  $A$ -加群として有限生成とする。 $Z$  は定理のそれと同じ

じものとする。このとき次の(1)(2)は同値である。

(1)  $T(Z, A)$  は有限生成  $A$ -加群。

(2)  $P$  を  $A'$  の素イデアルで  $P \cap A \in Z$  とすると  $\text{ht } P \geq 2$ 。

補題 4.  $A \subseteq B \subseteq C$  を整域で同じ商体をもつとする。もし  $(A, B)$  がネーター pair で  $C$  が有限生成  $B$ -加群であれば,  $(A, C)$  もネーター pair である。

さて、定理の証明は次のようにする。

まず、 $A$  のイデアル  $(0)$  の素イデアル分解  $(0) = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$  を考える。  $\text{Min}(A) = \{\sqrt{\mathfrak{q}_1}, \dots, \sqrt{\mathfrak{q}_m}\}$  としてよい。

$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_m$ ,  $J = T(Z, A) \cap IQ(A)$  とおく。  $J$  は整環同型  $T(Z, A) \rightarrow T(Z, A/I)$  の kernel でもある。最初に、条件 (1) は次の (2') と同値であることを証明しよう。

(2')  $J$  は有限生成  $A$ -加群で、  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$  であれば  $(A/\mathfrak{p}, T(Z, A/\mathfrak{p}))$  はネーター pair。さらに  $\mathfrak{p}$  が  $A$  の極小素イデアルで  $A/\mathfrak{p}$  が reduced でなければ  $T(Z, A/\mathfrak{p})$  は有限生成  $A$ -加群。

(1)  $\Rightarrow$  (2') :  $\mathfrak{p} \in \text{Ass}_A(A)$  とすると  $A/\mathfrak{p}$  は  $A$  のイデアルに同型である。従って  $T(Z, A/\mathfrak{p})$  は  $T(Z, A)$  のイデアルに同型。これより自然な準同型  $\varphi: T(Z, A) \rightarrow T(Z, A/\mathfrak{p})$  は有限。故に (1) の

条件及び補題4より  $(A/\mathfrak{g}, T(Z, A/\mathfrak{g}))$  はネーター pair。次に  $(A, T(Z, A))$  がネーター pair であることから  $A[J]$  はネーター環であって  $J$  は  $A[J]$  の中零イデアルである。よって適当に  $x_1, \dots, x_e \in J$  を選べば  $J = \sum A[J] x_i = \sum A x_i + J \cdot \sum A x_i$ 。これより  $J$  は有限生成  $A$ -加群。さて,  $\mathfrak{g}$  を  $A$  の極小素イデアルで  $A_{\mathfrak{g}}$  は reduced でないとする。補題1より,  $A$  の中零イデアル  $K (\neq 0)$  が存在して,  $\text{Ass}_A(A/K) = \text{Ass}_A(A)$ ,  $\mathfrak{g}K = 0$ ,  $K$  は  $A_{\mathfrak{g}}$  のイデアルに同型。  $K' = T(Z, A) \cap KQ(A) (= T(Z, K))$  とおくと, 補題2より  $K'$  は  $T(Z, A/\mathfrak{g})$  のイデアルに同型である。  $J$  と同じく  $K'$  も又  $A$ -加群として有限生成。従って  $T(Z, A/\mathfrak{g})$  は  $A$ -加群として有限生成となる。

(2')  $\Rightarrow$  (1):  $A/\mathfrak{I} \subseteq T(Z, A)/J \subseteq T(Z, A/\mathfrak{I})$  となることは明らかである。  $J$  が有限生成  $A$ -加群, かつ  $T(Z, A)$  の中零イデアルであることから  $(A/\mathfrak{I}, T(Z, A/\mathfrak{I}))$  がネーター pair であれば  $(A, T(Z, A))$  もネーター pair であることが分る。よって  $(A/\mathfrak{I}, T(Z, A/\mathfrak{I}))$  がネーター pair であることを示せばよい。従って最初から  $\text{Min}(A) = \text{Ass}_A(A)$  としてよい。  $A_{\text{red}}$  は  $A/\mathfrak{g}_1 \times \dots \times A/\mathfrak{g}_d$  の,  $T(Z, A_{\text{red}})$  は  $T(Z, A/\mathfrak{g}_1) \times \dots \times T(Z, A/\mathfrak{g}_d)$  の部分環と考えられる (ここで  $\sqrt{\mathfrak{g}_i} = \mathfrak{g}_i$   $i=1, \dots, d$ )。今  $(A/\mathfrak{g}_i, T(Z, A/\mathfrak{g}_i))$  ( $i=1, \dots, d$ ) はネーター pair であるから  $(A_{\text{red}}, T(Z, A_{\text{red}}))$  も又ネーター pair となる。ここで補題1(1)の中零イデアルの

列  $M_n \supset \dots \supset M_0 = 0$  を考える。今証明したことから  $(A, M_n, T(Z, A/M_n))$  はネーター pair である。次に  $n \geq 1$  とし、  
 $(A/M_1, T(Z, A/M_1))$  はネーター pair であると仮定しよう。  
 $N = T(Z, A) \cap M_1 Q(A) (= T(Z, M_1))$  とおく。  $A$  の極小素イデアル  $\mathfrak{p}$  も、  $\exists M_1 = 0$ ,  $M_1$  は  $A/\mathfrak{p}$  のイデアルに同型となるようにとる。補題 2 より  $N$  は  $T(Z, A/\mathfrak{p})$  のイデアルに同型であり、 $N$  は有限生成  $A$ -加群である。又、 $N$  は  $T(Z, A)$  の中層イデアルでもある。この事実と  $(A/M_1, T(Z, A/M_1))$  がネーター pair であるとの仮定より  $(A, T(Z, A))$  がネーター pair となることが容易に示される。

### 参考文献

- [1] D.D. Anderson, Global transforms and noetherian pairs,  
Hiroshima Math. J. 9 (1979)
- [2] A. Grothendieck., Elements de Geometrie Algebrique IV  
Publ. Math. IHES. 28 (1966)
- [3] J.R. Matijevic, Maximal ideal transforms of noetherian rings,  
Proc. Amer. Math. Soc. 54 (1976)
- [4] A. Wadsworth, Pairs of domains where all intermediate domains are noetherian, Trans. AMS 195 (1974)