

Endomorphisms of Smooth Projective 3-Folds with Nonnegative Kodaira Dimension (非負小平次元を持つ 3 次元代 数多様体の自己準同型写像)

岐阜大学・教育学部 藤本圭男 (Yoshio Fujimoto) *
(Faculty of Education, Gifu University)

1 序

コンパクト解析空間 X から、自分自身への全射正則写像 $f: X \rightarrow X$ を自己準同型写像 (endomorphism、略称 end) と呼ぶことにする。集合 $\text{End}(X) := \{f: X \rightarrow X \mid f \text{ は自己準同型写像}\}$, $\text{Aut}(X) := \{g: X \cong X \mid g \text{ は自己同型写像}\}$ には共に自然な複素解析空間の構造が入り、特に後者は複素リー群となる。以下は良く知られた事実である。

Fact (い) X が射影代数多様体ならば、 f は有限射。

(ろ) 更に X が非特異で、標準束 K_X が pseudo-effective、特に X の小平次元が非負 ($\kappa(X) \geq 0$) ならば、 f は有限エタール射。更に、 X の構造層 $\mathcal{O}_X$ のオイラー・ポワンカレ標数は $\chi(\mathcal{O}_X) = 0$ となる。

(は) X が正規コンパクト解析空間で一般型 (i.e. $\kappa(X) = \dim(X)$) ならば、 f は同型写像。

そこで、自己準同型写像 $f: X \rightarrow X$ が同型写像でないとき、非自明な自己準同型写像 (nontrivial endomorphism) と定義する。非自明な自己準同型写像を許す多様体として、アーベル多様体、トーリック多様体、又はそれらと別の多様体との直積、更に適当な有限群による商多様体が挙げられる。一般的に、非自明な自己準同型写像を数多く持つ多様体

*The author was partially supported by the Sumitomo Foundation.

は、これらとどれ位、隔たりがあるだろうか？ **Fact** (は) より、一般型多様体はこの範疇から除外される。次の疑問が自然に生じる。

Question ($E_{n,a}$) : n 次元非特異射影代数多様体 X は、 $0 \leq a := \kappa(X) < n$ 且、非自明な自己準同型写像 $f: X \rightarrow X$ を有すると仮定せよ。この時、 X の適当な有限次不分岐被覆 $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ がとれて、 $\tilde{X}$ は、ある非特異射影代数多様体 W ($0 \leq \dim(W) < n$) 上のスムーズな *abelian scheme* の構造を持つか？

論文 [2] の主要結果を述べよう。

主定理 $Question (E_{n,a})$ は $(n, a) = (3, 0)$ 又は $(3, 2)$ の時、肯定的。更に、 $(n, a) = (3, 1)$ で X_{min} (X の極小モデルで実は非特異となる) の飯高ファイブレーション $\Phi: X_{min} \rightarrow C$ の一般ファイバーが超楕円曲面の場合も肯定的。いずれの場合も、 X の適当な不分岐被覆 $\tilde{X}$ は *abelian 3-fold* 又は $S \times E$ (但し、 E は非特異楕円曲線、 S は $\kappa(S) = \kappa(X)$ なる非特異代数曲面) のタイプに取れる。

2 主定理の証明の概略

本題に入る前に簡単であるが、 $n = 1, 2$ の場合について、言及する。

$n = 1$ の場合、 X は楕円曲線となって明らかに肯定的。

$n = 2$ の場合も肯定的。

略証 X は必然的に、極小 (minimal) となる。何故なら、もし第一種例外曲線 e が存在すると仮定しよう。非自明なエタール endomorphism $f: X \rightarrow X$ の合成によって e の逆像をとる操作を繰り返せば、 X の上には、互いに交わらない無限個の (-1) -曲線が存在し、ピカル数 $\rho(X) = \infty$ となって矛盾。次に **Fact** (ろ) + 代数曲面の分類 + 小平先生の楕円曲面論により、

(1) $\kappa(X) = 0$ ならば、 X はアーベル曲面、又は超楕円曲面のいずれか、

(2) $\kappa(X) = 1$ ならば、 X の飯高ファイブレーション $\phi: X \rightarrow C$ は、ザイフェルト楕円曲面、即ち特異ファイバーとしては、台が非特異楕円曲線である $_m I_0$ 型の重複ファイバーのみを許し、それ以外では楕円曲線を主ファイバーとするファイバー束の構造を与える。

注 1 $\kappa(X) = 1$ の場合に別証明を与えておく。 $(n, a) = (3, 2)$ の場合の主定理の証明で用いる議論の雛型である。 X は極小なので、 K_X は *semi-ample*。 $\phi: X \rightarrow C$ を X の飯高ファイブレーションとする。以下の議論より、底曲線 C の自己同型 $g: C \cong C$ が引き起こされて、 $g \circ \phi = \phi \circ f$ が成り立つ。もし、 ϕ の或る特異ファイバーの既約成分に有理曲線 γ が含まれたとせよ。非自明なエタール *endomorphism* $f: X \rightarrow X$ の十分高い合成積 $f^k: X \rightarrow X (k > 0)$ を用いて、 γ の逆像をとる。すると、 $\phi: X \rightarrow C$ のファイバー内には、無限個の有理曲線が含まれることになって、矛盾が生じる。故に ϕ の特異ファイバーは mI_0 型重複ファイバーのみ。 *q.e.d.*

さて、本題に移る。以下、 $f: X \rightarrow X$ は、 $\kappa(X) \geq 0$ なる非特異射影代数多様体 X の上の自己準同型写像（必ずしも非自明とは限らぬ）としよう。 f によって保存されるデーターとして、次に着目する。

1. 飯高ファイブレーション：

$\Phi: X \cdots \rightarrow W$ を X の飯高 *fibration* とする。すると、底空間 W の上の自己同型写像 $h: W \cong W$ が誘導されて、 $\Phi \circ f = h \circ \Phi$ を満たす。何故なら étale *endomorphism* f による引き戻し写像 $f^*: \Gamma(X, \mathcal{O}(mK_X)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}(mK_X))$ (m は十分大きい自然数) は、単射であるが、 $\Gamma(X, \mathcal{O}(mK_X))$ の有限次元性より同型写像となる為。

2. X の端射線：

X の標準束 K_X は、*nef* でないと仮定しよう。すると、étale *endomorphism* f は、 X の端射線 R (K_X -negative extremal ray) 全体の置換を引き起こす。より正確に述べると次の様になる。

$f: Y \rightarrow X$ を非特異射影代数多様体の間の finite surjective morphism とする。ノルム写像 $f_*: \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ から誘導される push-forward map を $f_*: N^1(Y) \rightarrow N^1(X)$ と記す。1-サイクルとカルチエ因子との交点数を取ることで、 $N_1(X)$ は $N^1(X)$ の双対と見なせる。そこで、引き戻し写像 $f^*: N_1(X) \rightarrow N_1(Y)$ を、 f_* の随伴射 (adjoint map) として定義する。

命題 1 $f: Y \rightarrow X$ を、非特異射影代数多様体の間の有限次エタール被覆とする。更に、 X と Y のピカル数は等しく、 X の標準束 K_X は *nef* でないと仮定する。すると

(1) f_* と f^* とは、ソース Y の extremal ray R' 全体の為す集合と、ターゲット X の extremal ray R 全体の為す集合の間の 1 : 1 対応を与える。

(2) X の任意の *extremal ray* R に対して、 $\phi := \text{Cont}_R: X \rightarrow X'$ を R の収縮写像、 $\psi := \text{Cont}_{R'}: Y \rightarrow Y'$ を *extremal ray* $R' := f^*R$ の収縮写像とする。すると、全射有限射 $f': Y' \rightarrow X'$ がとれて、 $\phi \circ f = f' \circ \psi$, $f'^{-1}(\text{Exc}(\phi)) = \text{Exc}(\psi)$ 且 $f'^{-1}(\phi(\text{Exc}(\phi))) = \psi(\text{Exc}(\psi))$ が成立する。

略証

Kleiman の判定法より $f_*\overline{NE}(Y) = \overline{NE}(X)$, $f^*\overline{NE}(X) = \overline{NE}(Y)$ (但し、 $\overline{NE}(X)$ は、 X の森錐) を得る。 $K_Y \sim f^*K_X$ より、 Y の森錐 (Mori-cone) の K_Y -negative part と X の森錐の K_X -negative part とは、 $1:1$ に対応する。錐体定理 [4] より、森錐は K_X -negative part において局所的に polyhedral。故に、線形同型写像 $f^*: N_1(X) \cong N_1(Y)$, $f_*: N_1(Y) \cong N_1(X)$ により、森錐の端っこ (尖っている) に相当する端射線どうしは、ソースとターゲットで $1:1$ に対応する。(2) の証明は容易である。q.e.d.

特に、ソース Y とターゲット X の間に別の同型写像が存在する場合が、endomorphism $f: X \rightarrow X$ に相当し、 f_* は X の *extremal ray* 全体の置換を引き起こす事が分かる。又、 $f: Y \rightarrow X$ が分岐被覆の場合でも、分岐因子の形が明示できれば、適用できるケースがある。

命題 2 $f: S \rightarrow T$ を相対的極小な有理楕円曲面 S, T (共に $\mathbf{P}^2$ の 9 点ブローアップ) の間の任意の全射正則写像とすると、 f は必然的に同型写像となる。

次に、 $\dim X = \dim Y = 3$ 且、 f が同型写像でない場合を考察する。この際、 X や Y の因子収縮写像としては、森 [4] によって分類された 5 通りの可能性の内、唯一のタイプしか起こり得ない。

命題 3 $f: Y \rightarrow X$ を、 $\kappa(X) = \kappa(Y) \geq 0$, $\rho(Y) = \rho(X)$ なる非特異 3 次元射影代数多様体 Y, X の間の同型写像でない有限次エタール被覆とする。もし、 X の標準束 K_X が *nef* でないならば、 X の任意の *extremal ray* R , 及び Y の任意の *extremal ray* R' は、(E1) 型のみ。即ち R (resp. R') の収縮写像 $\phi := \text{Cont}_R: X \rightarrow X'$ (resp. $\psi := \text{Cont}_{R'}: Y \rightarrow Y'$) は、非特異 3 次元射影代数多様体 X' (resp. Y') の非特異代数曲線 C (resp. C') (いずれも $\mathbf{P}^1$ でない) を中心とするブローアップ (の逆) である。更に、もし $f^*R = R'$ ならば、同型写像でない有限次エタール被覆 $f': Y' \rightarrow X'$ が誘導されて、 $\phi \circ f = f' \circ \psi$ かつ $f'^{-1}(C) = C'$ を満たす。

略証 命題 1 より、初めから $f^*R = R'$ と仮定してよい。 ψ (resp. ϕ) の例外因子を、 E' (resp. E) とおく。命題 1 より、 $f^{-1}(E) = E'$ を得る。森 [4] による端射線の分類 (因子収縮写像の場合は 5 通り) の内、(E1) 型のみが起こり得る事を示す。 R が、(E1) 型でないとすると、 E は一点につぶれ、単連結である。 f は同型写像でないから、 $E' = f^{-1}(E)$ は、2 個以上の連結成分に分解する。一方、 $\psi: Y' \rightarrow Y$ は因子収縮写像だから、 E' は既約でなければならず、矛盾。 q.e.d.

次の定理は主定理の証明において中核を為す。

定理 4 $f: X \rightarrow X$ は、 $\kappa(X) \geq 0$ なる非特異 3 次元射影代数多様体 X の上の非自明な *endomorphism* とする。もし、 K_X が *nef* でなければ、 X の任意の端射線 R は (E1) 型であり、 R の収縮写像 $\text{Cont}_R: X \rightarrow X'$ は、 X' の非特異楕円曲線 C を中心とするブローアップ (の逆) と一致する。

略証 X は非特異 3 次元射影代数多様体なので、flipping contraction は起こらない。森 [4] の端射線の分類結果と合わせると、 X 上に端射線は高々、有限個しかない事が分かる。命題 1 より、endomorphism $f: X \rightarrow X$ を、 f の適当な $k(> 0)$ 回の合成写像 $f^k = f \circ \dots \circ f$ で置き換える事により、 f の push-forward map f_* は、 X の端射線全体の為す有限集合の上に、恒等置換を引き起こすとしてよい。命題 3 より、 X の任意の端射線 R は (E1) 型、即ち R の収縮写像 $\phi := \text{Cont}_R: X \rightarrow X'$ は X' の非特異代数曲線 C を中心とするブローアップ (の逆) である。 C は $\mathbf{P}^1$ でない。 X' の上に、非自明な *endomorphism* $f': X' \rightarrow X'$ が引き起こされて、 $f' \circ \phi = \phi \circ f$ を満たす。 C の種数 $g(C) \geq 2$ と仮定しよう。フルヴィッツの公式より、 $f'|_C: C \cong C$ は自己同型。それと $f'^{-1}(C) = C$ を合わせると、 $\deg(f') = \deg(f'|_C) = 1$ だから、 $f': X' \cong X'$ は同型写像となり、 f' の非自明性に矛盾する。故に C は、非特異楕円曲線である。 q.e.d.

注 2 (1) 命題 1 より、因子収縮写像でつぶれる例外因子は、*endomorphism* によって保存され、その帰結として、'非自明なエタール *end* を許す代数曲線は、楕円曲線に限る' という性質が、ブローアップの中心にまで遺伝するのである。

(2) 定理 4 は、*endomorphism* (即ち、ソース Y とターゲット X が同型) という仮定を少し弱めた状況においても、成立する：

$f: Y \rightarrow X$ は、小平次元が非負の、非特異 3 次元射影代数多様体 X, Y の間の同型でないエタール被覆、且、 X と Y の間には、余次元 1 で同型

である別の双有理写像 $u: X \cdots \rightarrow Y$ (例えば、フロップ) が存在するとせよ。もし、 K_X が *nef* でなければ、定理 4 と全く同様の主張が従う。

さて、主定理の証明の大雑把な方針を述べる。

Step1. minimal reduction の構成

小平次元が非負な非特異 3 次元射影代数多様体 X の上に、非自明な endomorphism $f: X \rightarrow X$ が与えられているとしよう。 X は必ずしも極小ではない。そこで、 $f: X \rightarrow X$ に endomorphism をも、込みにして MMP (極小モデルプログラム) を適用する。 X の標準束 K_X が *nef* でないと仮定しよう。 f を適当な合成写像 $f^k (k > 0)$ で置き換える事によって、 f_* は、 X 上の extremal ray R 全体の恒等置換を引き起こすとしてよい。定理 3 より、各 R は (E1) 型であり、 R の収縮写像 $\pi := \text{Cont}_R: X \rightarrow X_1$ は、非特異 3 次元射影代数多様体 X_1 の上の nontrivial endomorphism $f_1: X_1 \rightarrow X_1$ を誘導し、 $f_1 \circ \pi = \pi \circ f$, $\rho(X_1) = \rho(X) - 1$ を満たす。もし、 K_{X_1} が *nef* でなければ、全く同様の論法より、再び f_1 を、(従って、元来の f をも) 適当な合成写像で置き換えると、 $(f_1)_*$ は X_1 上の extremal ray R_1 全体に、恒等置換を引き起こすとしてよい。以下、同様の作業を続行する。(E1) 型端射線の収縮写像によって、多様体のピカル数 ρ は 1 だけ減少するので、この作業は有限回で停止し、ついには、 X の非特異極小モデル X_n の上の、非自明な endomorphism $f_n: X_n \rightarrow X_n$ を得る。これを、 $f: X \rightarrow X$ の *minimal reduction* と呼ぶ。

要約すると、各 $(0 \leq i \leq n)$ に対して、

(1) $f_i: X_i \rightarrow X_i$ (但し $f_0 := f, X_0 := X$ とおく) は、小平次元が非負の非特異 3 次元射影代数多様体 X_i の上の非自明な endomorphism。

(2) $\pi_{i-1}: X_{i-1} \rightarrow X_i$ は X_i 上の非特異楕円曲線 C_i を中心とするブローアップ (の逆) であり、 $\pi_i \circ f_i = f_{i+1} \circ \pi_i$ が成立する。

(3) $f_i^{-1}(C_i) = C_i$ が set-theoretic な意味で成り立つ。

(4) X_n は X の非特異な極小モデルである。

注 3 この段階では、 X の極小モデルの一意性までは云えないが、川又-Kollár の結果より、全ての極小モデルはフロップでつながっているので、非特異である事は従う。 $\kappa(X) = 0, 2$ の場合、極小モデルの一意性は、Step2 の *minimal reduction* の分類の副産物として云える。

Step2. minimal reduction の分類

宮岡-川又による 3 次元アバンドランス定理より、 K_{X_n} は semi-ample。よって、 X_n の飯高ファイブレーション $\Phi: X_n \rightarrow W$ の構造を $\kappa(X_n) = 0, 1, 2$ に応じて個別に解析していく。

(い) $\kappa(X_n) = 2$ の場合には、中山 [5] による 3 次元楕円ファイバー空間の standard fibration theorem を、

(ろ) $\kappa(X_n) = 0$ の場合には、Bogomolov 分解定理を

(は) $\kappa(X_n) = 1$ で、 Φ の一般ファイバーが超楕円曲面の場合には、藤木 [1] による 'generic quotient theorem' を本質的に用いる。

Step3. 楕円曲線を中心とするブローアップのプロセス

Step1 の逆の操作、即ち、Step2 で得た minimal reduction $f_n: X_n \rightarrow X_n$ からスタートして、順次、非特異楕円曲線 C_i に沿ってブローアップを施し、元来の非自明な endomorphism $f: X \rightarrow X$ を回復させる作業を実行する。ここで、各ブローアップの中心となるべき楕円曲線 C_i は、 $f_i^{-1}(C_i) = C_i$ (Step1 (3) 参照) なる、非常に強い制限条件を満足せねばならない。これを、手掛かりに C_i の配置を探索して、ブローアップを繰り返していく。例えば、 $\kappa(X) = 2$ の場合では、Step2 の分類より、極小モデル X_n の飯高ファイブレーションは、Seifert elliptic fibration の構造を与えるが、この各ファイバーに沿って、順次ブローアップしていく。 $\kappa = 1$ の場合が最も面倒である。かくして、この作業が完了した段階で、非自明な endomorphism $f: X \rightarrow X$ の構造が判明し、主定理が副産物として得られる。

3 minimal reduction の分類

この節では、Step2 の minimal reduction の分類について述べる。

まず、状況を設定する。end のカテゴリー内で極小モデル理論を使用するのは窮屈なので、以下では、end より少しだけ枠組みを広げておく。こうしても、証明は全く同様に機能する。

条件 (MR) (い) $f: Y \rightarrow X$ は、非特異、極小かつ小平次元が非負な 3 次元射影代数多様体 X, Y の間の同型写像でないエタール被覆。

(ろ) X と Y は、双有理型同値、即ち、有限回のフロップによってつながっている。

ここで、以下、必要な概念を定義しておく。

定義 5 V を非特異 n 次元射影代数多様体とする。正規多様体 S 上の楕円ファイバー空間 $f: V \rightarrow S$ は以下の条件を満たすとき、ザイフェルトであるという。

- (1) f は、*equidimensional*。
- (2) K_V は数値的に f -自明。
- (3) V は S の特異点と f の *discriminant locus* D を除いた所では、主ファイバー束。更に、 $\text{codim}(D) = 1$ ならば、 V は D に沿って、*general* には $_mI_0$ -型重複ファイバーを持つ。即ち、 D の *general* な点 x と横断的に交わる局所解析的な S 上の曲線 C をとると、 $f^{-1}(C) \rightarrow C$ は C 上の非特異極小楕円曲面であり、 $f^{-1}(x)$ は、台を非特異楕円曲線とする $_mI_0$ -型の重複ファイバー。

注 4 実は、以下の中山の定理より、 f の全てのファイバーは非特異楕円曲線である事が従う。

次の中山の定理は基本的である。

定理 (N) [6] $f: V \rightarrow S$ は n 次元非特異射影代数多様体 V から、正規多様体 S への楕円ファイバー空間とし、以下を仮定する。

- (1) $\text{codim} f(\Delta) \geq 2$ となる V 上の如何なる素因子 Δ は uniruled でない。
- (2) $\text{codim} f(\Delta) = 1$ なる V 上の如何なる素因子 D も f のファイバーに含まれる有理曲線の族で覆われない。
- (3) K_V は数値的に f -自明。

すると、適当な generically finite な全射 $T \rightarrow S$ がとれて、以下を満たす。

- (1) T は非特異射影代数多様体。
- (2) ファイバー積 $V \times_S T$ の主成分 W に対して、誘導される正則写像 $W \rightarrow V$ は有限次エタール被覆。
- (3) W は、 T 上、 T と楕円曲線 E との直積 $T \times E$ と同型。

定理 6 条件 (MR) の下で、更に $\kappa(Y) = \kappa(X) = 2$ を仮定する。すると、

(1) ソース Y とターゲット X との間に同型写像が存在して、これと f とを合成する事で、 f は X 上の *endomorphism* と見なす事が出来る。

(2) X は高々、商特異点のみを許す正規代数曲面 T 上の、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi: X \rightarrow T$ の構造を持つ。 T 上の自己同型 $\lambda: T \cong T$ が引き起こされて、 $\phi \circ f = \lambda \circ \phi$ を満たす。

(3) X の適当な有限次エタール被覆 $\tilde{X}$ がとれて、同型 $\tilde{X} \cong \tilde{T} \times E$ が存在する (但し、 $\tilde{T}$ は一般型の非特異極小代数曲面、 E は非特異楕円曲線)。

次の簡単な補題は、endomorphism のモデルを取り替える際、有効である。

補題 7 $u: X \cdots \rightarrow X'$ を n 次元非特異射影代数多様体 X, X' の間の双有理写像で、余次元 1 で同型、更に $f: Y \rightarrow X$ を、同型写像ではない有限次エタール被覆とせよ。すると、余次元 1 で同型な双有理写像 $v: Y \cdots \rightarrow Y'$ と、同型写像でない有限次エタール被覆 $g: Y' \rightarrow X'$ がとれて、 $u \circ f = g \circ v$ を満たす。

定理 6 の証明 3次元アバンドンス定理より、十分大なる自然数 m に対して $|mK_X|$ は、base point free で、飯高ファイブレーション $\phi: X \rightarrow S$ を与える。 $(S$ は高々、商特異点のみを持つ正規代数曲面.)

$mK_X \sim \phi^*L$ (L は S 上の非常に豊富な直線束) とかけ、特に K_X は numerically f -trivial。楕円ファイバー空間 $\phi: X \rightarrow S$ は必ずしも、equidimensional でない事に注意する。そこで、中山 [5] による 3次元楕円ファイバー空間の standard fibration theorem を適用して、モデルを取り替える。全空間 X に有限回のフロップを施し、底空間を双有理正則写像 $\mu: T \rightarrow S$ で底変換すると、 T 上に、equidimensional な楕円ファイバー空間 $\psi: X_1 \rightarrow T$ が構成できる。フロップは特異点のレベルを変えないので、 X_1 も非特異。 $mK_{X_1} \sim (\mu \circ \psi)^*L$ 故、 K_{X_1} も又、numerically ψ -trivial。

claim $\psi: X_1 \rightarrow T$ はザイフェルト楕円ファイバー空間。

proof. ここで、補題 7 を適用すると、 X_1 上に、同型写像でない有限次エタール被覆 $g_2: X_2 \rightarrow X_1$ で、元の $f: Y \rightarrow X$ と双有理なものが取れる。 X_2 も X とフロップでつながっているので、同様の論法を繰り返すと、同型写像でない有限次エタール被覆の無限上昇列 (tower)

$$\cdots \rightarrow X_n \xrightarrow{g_n} X_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow X_3 \xrightarrow{g_3} X_2 \xrightarrow{g_2} X_1 \sim_{bir} X$$

を得る。但し、各 X_n は非特異で、 X とフロップ $v_n: X \cdots \rightarrow X_n$ で結ばれている。 $K_{X_n} \sim (g_2 \circ \cdots \circ g_n)^* K_{X_1}$, $K_{X_n} \cong K_X$ が任意の自然数 n に対して成立し、 $mK_{X_1} \sim \psi^* \mu^* L$ を満たす。故に、 $(g_2 \circ \cdots \circ g_n)^*$ は $\Gamma(X_n, mK_{X_n}) (\cong \Gamma(X_1, mK_{X_1}))$ の線型同型写像を引き起こす。よって $\mu \circ \psi \circ \cdots \circ g_n: X_n \rightarrow S$ も X_n の飯高ファイブレーションであり、 $\psi_n := \psi \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n: X_n \rightarrow T$

も T 上の equidimensional な楕円ファイバー空間である。更に、フロップ $h: X_n \cdots \rightarrow X_1$ に対して、同型 $u: S \cong S$ と、双有理同型 $\nu: T \cdots \rightarrow T$ が存在して、 $\psi \circ h = \nu \circ \psi_n, u \circ \mu = \mu \circ \nu$ を満たす。実は ν は同型である。何故なら、 T 上の任意の曲線 C 上の楕円曲面は、フロップ h によって X_1 内の曲面に移されるが、 ψ は equi-dimensional だから、 $\nu_* C, (\nu^{-1})_* C$ は S の曲線にならざるを得ないからである。そこで、 $\psi: X_1 \rightarrow T$ がザイフェルトでないとは仮定しよう。 ψ の特異ファイバーとしては、 T 上の prime divisor Δ に沿って、有理曲線の 1 パラメーター族が登場する。そこで、 n を無限大に飛ばすと、注 1 と同様の論法により $\psi_n: X_n \rightarrow T$ の特異ファイバー内には、 T 上の prime divisor Δ に沿って、無限個の有理曲線が現われることになる。一方、 $\nu: T \cong T, h: X_n \cdots \rightarrow X_1$ は余次元 1 で同型、且 ψ は equidimensional だから、同様の結論が元の $\psi: X_1 \rightarrow T$ についても云える。これは、矛盾。ここで、中山の定理 (N) を適用すれば、クレームが云える。

さて、元の X は X_1 とフロップでつながっている。ここで、フロップは rigid な有理曲線に沿って為されることを思い出す。 X_1 の適当なエタール被覆は、一般型極小代数曲面と楕円曲線との直積に分解するので、 X_1 の有理曲線は動く。よって、フロップの施し様がなく、 $h: X_n \cong X_1$ は同型写像にならざるをえない。後の証明は容易である。(証明終)

次に $\kappa = 0$ の場合を扱う。

命題 8 T は複素トーラス、コンパクト複素多様体 X は、 $b_1(X) = 0$ なる藤木のクラス $\mathcal{C}$ 多様体とする。 $X \times T$ 上の、任意の自己準同型写像 f は、 $f = g \times h$ (g, h は各々、 X, T 上の自己準同型写像) の形に分解する。

定理 9 条件 (MR) の下で更に $\kappa(X) = \kappa(Y) = 0$ を仮定する。すると、

(1) ソース Y とターゲット X との間に同型写像が存在して、 $f: X \rightarrow X$ は X 上の非自明な自己準同型写像と見なせる。

(2) X の適当な有限次エタール被覆 $\tilde{X}$ は、abelian 3-fold 又は、非特異な $K3$ 曲面 $\tilde{T}$ と楕円曲線 E との直積 $\tilde{T} \times E$ に同型である。

(3) 後者の場合、 X は $\tilde{T}$ の有限群 G による商空間 $W := \tilde{T}/G$ 上のザイフェルト楕円ファイバー空間であり、 f はそれと両立して、底曲面 W の自己同型を引き起こす。同時に、 X は E の有限群 G' による商曲線 $C := E/G'$ 上のザイフェルト $K3$ 、又はエンリケス・ファイバー空間でもあり、 f はそれと両立して、底曲線 C の自己準同型写像を引き起こす。

証明 3次元アバundance定理より、 $K_X \in \text{Pic}(X)$ は有限位数、特に $c_1(X)_{\mathbb{R}} = 0$ 。最初に、 X の基本群 $\pi_1(X)$ は無限群である事を示そう。 X と Y は、余次元1で同型だから、その基本群は同型。もし、有限群だと仮定すると、単射群準同型写像 $f_*: \pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X)$ は同型。故に、 $\deg(f) = [\pi_1(X) : \pi_1(Y)] = 1$ となり、 f は同型写像となる。これは、仮定に反する。

故に、ボゴモロフ分解定理より、適当な X のエタール被覆 $\tilde{X}$ は、abelian 3-fold 又は、K3 曲面 $\tilde{T}$ と楕円曲線 E との直積 $\tilde{T} \times E$ に同型。前者の場合は $\tilde{X}$ は有理曲線を含まない。後者の場合は、いかなる有理曲線も、第2成分への射影 $p_2: \tilde{X} \rightarrow E$ のファイバーに含まれるが、これは rigid でない。何故なら、 E は $\tilde{T}$ 上の平行移動として $\tilde{X}$ に作用するからである。よって X 上のいかなる有理曲線も又、rigid でない。故に、定理6の証明と同様の理由で、同型 $X \cong Y$ が従う。 $q: \tilde{X} := \tilde{T} \times E \rightarrow X$ は minimal split covering 即ち、 q は有限次 Galois エタール被覆であり、Galois 群 $\tilde{G} := \text{Gal}(\tilde{X}/X)$ が、 $(\text{id}_{\tilde{T}}, \tau)$ の形の元を含まない（但し、 $0 \neq \tau \in E$ は楕円曲線 E の平行移動の意味）とする。 q の最小性より、合成写像 $f \circ q: \tilde{X} \rightarrow X$ は $q: \tilde{X} \rightarrow X$ を経由する。故に自己準同型写像 $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ が存在して、 $q \circ \tilde{f} = f \circ q$ を満たす。K3 曲面の単連結性と命題8より、適当な自己準同型写像 $u: E \rightarrow E$ と自己同型 $v: \tilde{T} \cong \tilde{T}$ が存在して、 $\tilde{f} = v \times u$ を満たす。同様に任意の自己同型 $\tilde{g}: \tilde{X} \cong \tilde{X}$ は、 $g = g_1 \times g_2$, $g_1 \in \text{Aut}(\tilde{T})$, $g_2 \in \text{Aut}(E)$ と分解する。群準同型写像 $\tau: \text{Aut}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{T})$, $\rho: \text{Aut}(\tilde{X}) \rightarrow \text{Aut}(E)$ を、各々、 $\tau(g) = g_1$, $\rho(g) = g_2$ と定義して $G := \tau(\tilde{G})$, $G' := \rho(\tilde{G})$ とおく。第一成分への射影 $p_1: \tilde{X} \rightarrow \tilde{T}$ により、 X 上にザイフェルト楕円ファイバー空間 $\psi: X = \tilde{T} \times E/\tilde{G} \rightarrow W := \tilde{T}/G$ の構造が入る。 $f \in \text{End}(X)$ は $\tilde{f} = v \times u \in \text{End}(\tilde{X})$, $(v \in \text{Aut}(\tilde{T}), u \in \text{End}(E))$ によって誘導されるので、 $\tilde{f}$ は $\tilde{G}$ の作用と両立する。従って、 v も G の作用と両立して、底空間 W の自己同型 $v': W \cong W$ を誘導する。同様にして、第二成分への射影 $p_2: \tilde{X} \rightarrow E$ により、 X 上にザイフェルト K3、又は Enriques ファイバー空間 $X := \tilde{T} \times E/\tilde{G} \rightarrow C := E/G'$ の構造が入り、 $f \in \text{End}(X)$ は、底曲線 C の自己準同型写像 $u': C \rightarrow C$ を誘導する。（証明終）

命題 10 $f: Y \rightarrow X$ は、双有理同値な非特異 n 次元射影代数多様体 X, Y の間の、同型でない有限次エタール被覆とする。 $\kappa(X) \geq 0$ と仮定して、飯高ファイブレーション $\phi: X \cdots \rightarrow Z$ の一般ファイバーの非特異モデルを F とおく。すると、 $\chi(\mathcal{O}_F) = 0$ を得る。

系 10.1 条件 (MR) の下で更に $\kappa(Y) = \kappa(X) = 1$ を仮定する。すると、 X の飯高ファイブレーション $\phi: X \rightarrow C$ の一般ファイバーは、アーベル曲面又は超楕円曲面のいずれかと同型である。

ここで、超楕円曲面に関する基本的事実を思い出しておく。

Basic Facts S を超楕円曲面とする。

(1) S は丁度 2 通りの、同型でない楕円曲面の構造を持つ。

タイプ (A): アルバネーゼ写像 $p_S: S \rightarrow \text{Alb}(S)$ により、 S は楕円曲線 $\text{Alb}(S)$ 上の、ファイバーを楕円曲線とする正則ファイバー束になる。

タイプ (B): 楕円曲線 $E := \text{Aut}^0(S)$ の S への作用は自由でなく、自然な射影 $q_S: S \rightarrow C_S := S/E \cong \mathbf{P}^1$ により、ザイフェルト楕円曲面の構造を持つ。

(2) $\overline{NE}(S)$ は、 p_S, q_S の一般ファイバーによって張られ、 $f \in \text{End}(S)$ は、各々、底曲線 $\text{Alb}(S), C_S$ の自己準同型写像を誘導する。

次の補題は、定理 6 の証明と同様、同型でない有限次不分岐被覆の無限個のタワーを X 上に構成する議論から従う。

補題 11 条件 (MR) の下で、更に $\kappa(X) = 1$ と仮定し、 $\phi: X \rightarrow C$ を X の飯高ファイブレーションとする。このとき、 ϕ の特異ファイバーの各既約成分の非特異モデルは有理曲面でない。

定理 12 条件 (MR) の下で、更に $\kappa(X) = 1$ 且、飯高ファイブレーション $\phi: X \rightarrow C$ の一般ファイバーは超楕円曲面とする。すると

(1) ソース Y とターゲット X の間に別の同型写像が存在し、 f は X 上の非自明な自己準同型写像と見なせる。

(2) ファイバー空間の分解 $X \xrightarrow{\pi} T \xrightarrow{q} C$

がとれる：但し、 $\pi: X \rightarrow T$ は、高々、商特異点のみを許す正規曲面 T 上のザイフェルト楕円ファイバー空間、 $q: T \rightarrow C$ は $\mathbf{P}^1$ -ファイバー空間、且、 $\phi = q \circ \pi$ を満たす。

(3) $f \in \text{End}(X)$ は、 T の自己準同型写像、及び C の自己同型写像を誘導し、上の分解と両立する。

(4) X の適当な有限次不分岐被覆 $\tilde{X}$ は直積 $\tilde{T} \times E$ (但し $\tilde{T}$ は $\kappa(\tilde{T}) = 1$ なる非特異極小代数曲面、 E は楕円曲線) と同型。

略証 藤木 [1] の 'generic quotient theorem' を用いて、超楕円曲面のタイプ (B) 型の elliptic fibration を相対化する事が肝要である。即ち、次のファイバー空間の分解が存在する： $X \cdots \xrightarrow{\pi'} S \xrightarrow{p} C$ 。

ここで、 p の一般ファイバーは $\mathbf{P}^1$ 、且 π' の一般ファイバーは楕円曲線、且 $\phi = p \circ \pi'$ 。ブローアップ $\mu: \hat{X} \rightarrow X$ により π' の不確定点を解消して、 S 上の楕円ファイバー空間 $g := \pi' \circ \mu: \hat{X} \rightarrow S$ を得る。これに、相対的極小モデルプログラムを走らせて、楕円ファイバー空間 $h: X' \rightarrow S$ で以下を満たすものがとれる。

- (1) それは、 $g: \hat{X} \rightarrow S$ と双有理同値。
- (2) X' は高々、 $\mathbf{Q}$ -分解的ターミナル特異点しか持たない。
- (3) $K_{X'}$ は h -ネフ。

更に中山 [5] による equidimensional モデル定理より、 X' に有限回のフロップを施し、底空間を双有理射 $u: W \rightarrow S$ で底変換すると、以下を満たす楕円ファイバー空間 $h': X'' \rightarrow W$ を得る。

- (1) h' は equidimensional。
- (2) X'' は高々、 $\mathbf{Q}$ -分解的ターミナル特異点しか持たない。
- (3) W 上に有効 $\mathbf{Q}$ -因子 Λ がとれて、 (W, Λ) は対数的ターミナル対、且 $K_{X''} \sim_{\mathbf{Q}} f'^*(K_W + \Lambda)$ となる。

ここで、' $K_{X''}$ がネフ $\Leftrightarrow K_W + \Lambda$ が W 上ネフ'

に注意する。曲面 W 上の対数的 MMP と、3次元 MMP、及び中山の standard fibration 定理を組み合わせると、双有理射 $u': W \rightarrow T$ 及び、楕円ファイバー空間 $\pi: Z \rightarrow T$ がとれて、

- (1) $u' \circ h'$ は π と双有理同値。
- (2) π は equidimensional。
- (3) Z は高々、 $\mathbf{Q}$ -分解的ターミナル特異点のみを持つ。
- (4) T 上の有効 $\mathbf{Q}$ -因子 Γ が取れて、 (T, Γ) は対数的ターミナル対且、 $K_Z \sim \pi^*(K_T + \Gamma)$ 。

- (5) K_Z はネフ、即ち、 Z は X の絶対的極小モデル。

川又-Kollár より、 Z は元の X と有限回のフロップで結ばれているから、非特異。補題 7 より、 Z 上の非同型な有限次エタール被覆の無限個のタワー

$$X \sim_{bir} Z \xleftarrow{g_1} Z_1 \xleftarrow{g_2} Z_2 \leftarrow \cdots \xleftarrow{g_n} Z_n \leftarrow \cdots$$

(但し Z_n は全て X の非特異極小モデル) を得る。 Z の飯高ファイブレーション $\phi': Z \rightarrow C$ の一般ファイバーは超楕円曲面であり、適当な $\mathbf{P}^1$ -ファイバー空間 $q: T \rightarrow C$ がとれて、 $\phi' = q \circ \pi$ と分解する。すると、 $\pi: Z \rightarrow T$ はザイフェルト楕円ファイバー空間である。そうでなければ、 T 上の素因子 Δ がとれて、一般の点 $p \in \Delta$ 上のファイバーの既約成分は全て、有理曲線となる。一方、 ϕ' の一般ファイバーは超楕円曲面だから、

有理曲線を持たない。故に、 Δ は、 $\mathbf{P}^1$ -ファイバー空間 $q: T \rightarrow C$ のファイバーに含まれる。よって、 Δ も有理曲線で、 $\pi^{-1}(\Delta)$ の非特異モデルは有理曲面となる。これは、補題 11 に反する。従って、定理 (N) を適用して、証明が完了する。 q.e.d.

4 主定理の略証明

証明の最終段階 Step 3 では、minimal reduction $f_n: X_n \rightarrow X_n$ からスタートして、逐次、楕円曲線を中心とするブローアップにより、元の非自明自己準同型写像 $f: X \rightarrow X$ を復元する。2 節、Step1 の記号を用いる。まず、簡単な補題を用意する。

補題 13 $f: X \rightarrow T$ は非特異 $n(\geq 3)$ 次元射影代数多様体 X から正規多様体 T へのザイフェルト楕円ファイバー空間とする。 f の任意のファイバーに沿って X をブローアップしても、得られた多様体 X' は再び、ザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。

(a) $\kappa(X) = 2$ の場合

$f_n \in \text{End}(X_n)$ は、底曲面の自己同型 $\rho_n: X_n \cong X_n$ を誘導し、 $f_n^{-1}(C_n) = C_n$ より、 $f_n|_{C_n}: C_n \rightarrow C_n$ は非自明な自己準同型であることに注意する。ブローアップ $\pi_{n-1}: X_{n-1} \rightarrow X_n$ の中心となる楕円曲線 C_n は、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi_n: X_n \rightarrow T_n$ のファイバーでなければならない。何故なら、もし $\phi_n(C_n)$ が T_n の曲線ならば、 $\phi_n|_{C_n}: C_n \rightarrow \phi_n(C_n)$ の mapping degree の考察より、同型 $f_n|_{C_n}: C_n \cong C_n$ が云えて、矛盾が生じる。補題 13 を適用すると、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi_{n-1}: X_{n-1} \rightarrow T_{n-1}$ を得る。同様の考察により、ザイフェルト楕円ファイバー空間 $\phi_i: X_i \rightarrow T_i$ のファイバー C_i を中心とするブローアップを続行する。最終的に、元の X がザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つことが示せる。

(b) $\kappa(X) = 0$ の場合

先ず、特別の場合を考察する。

命題 14 V は 3 次元アーベル多様体と双有理同値であるが、同型でない非特異 3 次元射影代数多様体で、非自明な自己準同型写像 $f: V \rightarrow V$ を持つと仮定する。すると、

(1) V はアーベル曲面と双有理同値な代数曲面 S 上の楕円束 $p: V \rightarrow S$ (即ち、構造群及び典型ファイバー共に楕円曲線の主ファイバー束) の構造を持つ。

- (2) f は p と両立して、底空間の自己同型 $g: S \cong S$ を引き起こす。
 (3) V の適当な有限次不分岐エタール被覆 $\tilde{V}$ は、直積 $S' \times E$ (但し、 S' はアーベル曲面と双有理同値な非特異代数曲面、 E は楕円曲線。) と同型。

略証 f の適当な合成積をとって、 $f: V \rightarrow V$ の minimal reduction $f_n: V_n \rightarrow V_n$ を構成する。仮定より V_n は、非単純な 3 次元アーベル多様体である。 $f_n^{-1}(C_n) = C_n$ より、 $f_n|_{C_n}: C_n \rightarrow C_n$ は平行移動でなく、 C_n において、不動点 o を持つ。 V_n, C_n には共に、 o を単位元とする代数群の構造が入り、 C_n は V_n の部分アーベル多様体となる。商写像 $p_n: V_n \rightarrow T_n := V_n/C_n$ はアーベル曲面 T_n 上の楕円束の構造を与え、 f_n は底曲面の自己同型 $g_n: T_n \cong T_n$ を誘導する。 $\kappa = 2$ の場合と全く同様の理由で、楕円束のファイバーを中心とするブローアップを続行して、最終的には、元の X 自身が楕円束の構造を持つ事が示せる。

命題 15 V は K3 曲面と楕円曲線の直積に双有理同値な非特異 3 次元射影代数多様体であり、非自明な自己準同型写像 $f: V \rightarrow V$ を持つと仮定する。すると、

- (1) $V \cong S \times E$ 、但し S は K3 曲面と双有理同値な非特異代数曲面、 E は楕円曲線。
 (2) 自己同型写像 $g: S \cong S$ が存在して、 $p \circ f = g \circ p$ 、但し $p: V \rightarrow S$ は第一成分への射影。

略証 $f: V \rightarrow V$ の minimal reduction $f_n: V_n \rightarrow V_n$ については、定理 9 より、命題は正しい。(2) が云えているので $\kappa = 2$ の場合と同様の理由により、ザイフェルト楕円ファイバー空間の各ファイバーを中心とするブローアップを繰り返して、 X を復元できる。q.e.d.

$f: X \rightarrow X$ を $\kappa(X) = 0$ なる非特異 3 次元射影代数多様体 X 上の非自明な自己準同型写像とする。必要ならば f を適当な合成積 $f^k (k > 0)$ で置き換えて、minimal reduction $g: X' \rightarrow X'$ をとる。楕円曲線を中心とする一連のブローアップ (の逆) を $\pi: X \rightarrow X'$ とおくと、 $g \circ \pi = \pi \circ f$ 。定理 9 より、 X' の適当な有限次ガロワ・エタール被覆 $p: \tilde{X}' \rightarrow X'$ は、abelian 3-fold 又は K3 曲面と楕円曲線との直積と同型。しかも、 g は、自己準同型 $\tilde{g}: \tilde{X}' \rightarrow \tilde{X}'$ にリフトできる。すると、 $V := X \times_{X'} \tilde{X}'$ は非特異で $\tilde{X}'$ と双有理同値、かつ自然な射影 $V \rightarrow X$ は、 X の有限次ガロワ・エタール被覆。自己準同型写像 $f \times \tilde{g}: X \times \tilde{X}' \rightarrow X \times \tilde{X}'$ は、非自明な自己準

同型写像 $h: V \rightarrow V$ を誘導する。再び、必要なら f, h を適当な合成積で置き換えてよい。以下の 2 通りの可能性が生じる。

(い) : $\tilde{X}'$ が abelian 3-fold の場合 :

$V \rightarrow \tilde{X}'$ が同型ならば、 X は abelian 3-fold V の有限群による商であり、極小。次に $V \rightarrow \tilde{X}'$ が同型でないとせよ。命題 14 により、 V はアーベル曲面と双有理同値な代数曲面 $\tilde{T}$ 上の、楕円束 $q: V \rightarrow \tilde{T}$ になる。ガロワ群 $G := \text{Gal}(V/X)$ は、この楕円束の構造を保ち、 $\tilde{T}$ の有限自己同型群 G' を引き起こす。故に自然な射影 $\rho: X \cong V/G \rightarrow \tilde{T}/G' =: T$ はザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。自己準同型写像 $h: V \rightarrow V$ はガロワ群 G の作用と両立し、楕円束構造 $q: V \rightarrow \tilde{T}$ を保ち、且、同型 $g': \tilde{T} \cong \tilde{T}$ を誘導する。従って、 g' も $G' \cong \text{Gal}(\tilde{T}/T)$ の作用と両立して、 T の自己同型 $\lambda: T \cong T$ を引き起こす。

(ろ) : $\tilde{X}'$ が K 3 曲面と楕円曲線との直積に同型な場合 :

命題 15 より、同型 $V \cong \tilde{T} \times E$, (但し V は K 3 曲面と双有理同値な非特異代数曲面、 E は楕円曲線) が存在する。しかも、自己準同型の分解 $h = h_1 \times h_2$ (但し $h_1 \in \text{Aut}(\tilde{T}), h_2 \in \text{End}(E)$) が成り立つ。命題 8 より、ガロワ群 $\tilde{G} := \text{Gal}(V/X)$ は第一成分への射影 $p_1: V \rightarrow \tilde{T}$ を保ち、底空間 $\tilde{T}$ の自己同型群 G を引き起こす。自然な写像 $\rho_1: X := V/\tilde{G} \rightarrow \tilde{T}/G =: T$ により、 X は T 上のザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。これは、(い) の場合と同じ理由で $f: X \rightarrow X$ によって保存され、底曲面 T の自己同型 $\alpha: T \cong T$ が引き起こされる。 q.e.d.

(C) $\kappa(X) = 1$ の場合

$X_{\min}$ の飯高ファイブレーションの一般ファイバーが超楕円曲面の場合の証明は、煩雑なので方針を述べるに留める。minimal reduction $f_n: X_n \rightarrow X_n$ をとる。 X_n は 2 通りの楕円ファイバー空間の構造を持つ。

(1) 第一に、藤木 quotient $g_n: X_n \rightarrow T_n$ によって、 $\mathbf{P}^1$ -ファイバー空間 T_n 上のザイフェルト楕円ファイバー空間構造を、

(2) 第二に、相対アルバネーゼ写像により、楕円曲面 A_n 上の、equidimensional な (必ずしもザイフェルトとは限らぬ) 楕円ファイバー空間 $\alpha_n: X_n \rightarrow A_n$ の構造を持つ。

大方の場合は、 g_n のファイバーを中心とするブローアップを繰り返す事で、元の X が回復する。 α_n のファイバーに沿って、ブローアップするのが好ましく無い事は、以下の例からも想像がつく。

例 16 $f: S \rightarrow C$ は正則切断 o を持つ相対的極小楕円曲面で、 $\kappa(X) = 1$ 且 $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$ (即ち、ザイフェルト楕円曲面でない) とする。 S は C の関数

体 K 上、定義された o を単位元に持つ楕円曲線 $\mathcal{E}$ と見なせる。 $i: S \cdots \rightarrow S$ を $\mathcal{E}/K$ の相対的に逆元をとる群演算から生じる双有理写像とする。それは、 S の極小性より S の自己同型となる。 E を楕円曲線、 $t: E \cong E$ を E の 2 等分点による平行移動とする。 $j := i \times t \in \text{Aut}(S \times E)$ は自由な *involution* であり、商 $X := S \times E / \langle j \rangle$ は $\kappa(X) = 1$ なる非特異多様体である。 $[n]: E \rightarrow E$ を n 倍写像（但し、 $n > 1$ は奇数）とする。 $S \times E$ 上の自己準同型写像 $\psi := \text{id}_S \times [n]$ は、非自明な自己準同型写像 $\varphi: X \rightarrow X$ を引き起こす。 $\langle j \rangle$ -不変な射影 $S \times E \rightarrow C$ は、 X の飯高ファイブレーション $\phi: X \rightarrow C$ を与え、 ϕ の一般ファイバーは超楕円曲面である。射影 $S \times E \rightarrow S \rightarrow C$ は、ファイバー空間の分解 $X \xrightarrow{g} T := S / \langle i \rangle \xrightarrow{p} C$ を誘導する。但し、 $g: X \rightarrow T$ はザイフェルト楕円ファイバー空間、 $p: T \rightarrow C$ は $\mathbf{P}^1$ -ファイバー空間、且 $\phi = p \circ g$ 。他方、射影 $S \times E \xrightarrow{f \times \text{id}_E} C \times E \rightarrow C$ は、分解 $X \xrightarrow{h} C \times E' \xrightarrow{q} C$ を誘導する。但し、 $E' := E / \langle t \rangle$ は楕円曲線、 $h: X \rightarrow C \times E'$ は、 $\phi: X \rightarrow C$ の相対的アルバネーゼ写像であり、非ザイフェルトな楕円ファイバー空間、かつ $\phi = q \circ h$ 。

X を g の正則ファイバー $g^{-1}(t), t \in T$ に沿ってブローアップして得られる多様体を X' とする。明らかに、 $\phi: X \rightarrow X$ は、 X' 上の非自明自己準同型写像 $\phi': X' \rightarrow X'$ に持ちあがる。他方、 $\pi: Y \rightarrow X$ を h の正則ファイバー F に沿ってのブローアップとすると、 Y は非自明な自己準同型写像を持たない。

証明は背理法による。非自明な自己準同型写像 $u: Y \rightarrow Y$ が存在したとせよ。命題 1 と定理 4 より、適当な合成積 $v := u^k (k > 0): Y \rightarrow Y$ は、非自明な自己準同型写像 $w: X \rightarrow X$ を引き起こし、 $\pi \circ v = w \circ \pi$ 且 $w^{-1}(F) = F$ が成り立つ。よって、 *rigidity Lemma* より、 $C \times E'$ の自己準同型写像 w' がとれて、 $h \circ w = w' \circ h$ となる。 $w: X \rightarrow X$ は、 C の自己同型を引き起こすから、 w' はエタール射。更に、 $w^{-1}(F) = F$ より、 w' は自己同型。よって、 $\kappa(X) = 2$ の場合の主定理の証明と同様の論法より、 $h: X \rightarrow C \times E'$ はザイフェルト楕円ファイバー空間となる。特に、 h のファイバーは、全て楕円曲線であり、仮定 $\chi(\mathcal{O}_S) \neq 0$ に反する。

5 その他

(1) 本稿では、非自明な自己準同型 $f: X \rightarrow X$ に対して、多様体 X の構造の解明に重点を置き、射 f は適当な合成積で自由に置きかえる立場を採った。他方、射 f をも重視する立場としては、(注 2) を用いて minimal

reduction を多少、変更すると、以下を示す事もできる。

定理 17 $\{f_n: X_n \rightarrow X_{n+1}\}_{n=1,2,\dots}$ を、小平次元が 2 の非特異 3 次元射影代数多様体 X_n の間の、同型でない有限次エタール被覆の無限降下系列とせよ。すると、各 X_n もザイフェルト楕円ファイバー空間の構造を持つ。

(2) 非自明な自己準同型写像を持つ $\kappa(S) = -\infty$ なる代数曲面 S は中山 [7] によって分類された。特に、 S が有理曲面の場合、 S が非自明な自己準同型写像を持つための必要十分条件は、 S がトーリック曲面となる事である。この状況下で、 S 上の自己交点数が負の既約曲線 C 全体は、有限集合であって、非自明な自己準同型写像によって保存される。end で保存される新型データは、他にもないだろうか？ 例えば、ファノ多様体の一般の点を通る有理曲線の length によって、非自明な自己準同型写像のデータが引き出せないか？

(3) 小平次元の正負に関わらず、非自明な自己準同型写像をもつコンパクト複素多様体には、アーベル多様体、乗法群 $\cdots$ 等の群が何らかの形で作用しているのではないか？と思われる。次の問題を提起しておく。

問題 (cf. [2]) $\kappa(X) \geq 0$ なる非特異射影代数多様体 X が、非自明な自己準同型写像 $f: X \rightarrow X$ を有するとせよ。すると

(i) 十分一般の点 $p \in X$ に対して、 $S(p)$ は $\{f^n(p) | n = 1, 2, \dots\}$ の Zariski 閉包を表す。もし、 $s(p) \neq X$ ならば、 $S(p)$ の適当な有限次エタール被覆 $S'(p)$ は、アーベル多様体になるか？

(ii) 更に、 K_X がネフでないと仮定しよう。すると、 X の任意の端射有理曲線は、 $S(p)$ と横断的に交わるか？

参考文献

- [1] A. Fujiki, On a holomorphic fiber bundle with meromorphic structure, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **19** (1983), 117–134.
- [2] Y. Fujimoto, Endomorphism of smooth projective 3-folds with non-negative Kodaira dimension, Publ. RIMS, Kyoto Univ., **38** (2002), 33–92.
- [3] Y. Fujimoto, Decomposition Problem on Endomorphisms of Projective Varieties, to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.

- [4] S. Mori, Threefold whose canonical bundles are not numerically effective, *Ann. of Math.*, **116** (1982), 133–176.
- [5] N. Nakayama, Local structure of an elliptic fibration, *Advanced Studies in Pure Math*, **35** (2002), Higher Dimensional Algebraic Geometry, 185–295.
- [6] N. Nakayama, Projective 3-folds whose universal coverings are $\mathbb{C}^3$, the proceeding of symposium on vector bundles and algebraic geometry, Kyusyu University, January, 1997, organized by S. Mukai and E. Sato, 6–10.
- [7] N. Nakayama, Ruled surfaces with nontrivial surjective endomorphisms, *Kyusyu J. Math*, **56** (2002), 433–446.