

Brauer group B の 1.

大 理 石橋康徳

§ 1. 位相空間の Brauer group.

(1.1)

X を位相空間とし、 $\mathcal{O}_X$ を X 上の複素数値連続関数の germs の sheaf とする。 $\mathcal{O}_X$ は X 上の sheaf of rings である。

任意の自然数 n に対して、 $P_n(X)$ で fibre が $M_n(\mathbb{C})$ である X 上の局所自明な algebra bundles の同型類の集合を表わす。

これは次のように解釈される。

$P_n(X)$ は sheaf $M_n(\mathcal{O}_X)$ に局所同型である X 上の sheaf of algebras の同型類の集合である。

$GL(n) = GL(n, \mathbb{C}) / \mathbb{C}^*$ とおけば、Skolem-Noether の定理によって algebra $M_n(\mathbb{C})$ の自己同型群は $GL(n)$ に同型となるから $P_n(X)$ は次のように解釈することもできる。

$P_n(X) = H^1(X, GL(n))$ である。即ち、 X 上の group $GL(n)$ の principal bundles の同型類の集合である。

(1.2)

位相空間 X の Brauer group は $\bigoplus_{n=1}^{\infty} P_n(X)$ において、次のよう

(1.)

なものを自明と見なすことによって得られる。

algebra bundles の場合:

E を X 上の rank n の vector bundle とするとき, $\underline{\text{End}}(E)$ という形の algebra bundle.

sheaf of algebras の場合:

$\mathcal{E}$ を X 上の rank n の locally free sheaf とするとき, $\underline{\text{End}}(\mathcal{E})$ という形の sheaf of algebras.

principal bundles の場合:

$H^1(X, GL(n))$ の元で $H^1(X, GL(n))$ から成るもの.

$M_n(\mathcal{O}_X)$ に 局所同型な X 上の sheaf of algebras を X 上の Azumaya's algebra という。 $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を 二つの Azumaya's algebras とするとき, $\mathcal{A} \sim \mathcal{A}'$ であるとは, X 上の locally free sheaves $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ が存在して, algebras として $\mathcal{A} \otimes \underline{\text{End}}(\mathcal{E})$ と $\mathcal{A}' \otimes \underline{\text{End}}(\mathcal{E}')$ が同型になるときをいう。

$\underline{\text{End}}(\mathcal{E}) \otimes \underline{\text{End}}(\mathcal{E}') \cong \underline{\text{End}}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}')$ から $\sim$ は equivalence relation である。さらに $\sim$ と operation $\otimes$ とは compatible である。したがって, X 上の Azumaya's algebras の同値類の集合は commutative monoid になる。実は群になる。それは $\mathcal{A}^\circ$ を $\mathcal{A}$ の opposite algebra とすると, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^\circ \cong \underline{\text{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-mod}}(\mathcal{A})$ となるからである。 $\mathcal{A}^\circ$ の class が $\mathcal{A}$ の class の逆元になる。このようにして得られた group を X の Brauer group といい, $\text{Br}(X)$ と表わす。

(1.3)

(2)

$\mathcal{G}_{mX}$ は $\mathcal{O}_X$ の units の sheaf を表わす。

groups の exact sequence : $1 \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{GL}(n) \rightarrow \mathcal{GP}(n) \rightarrow 1$

は、 X 上の sheaves の exact sequence : $1 \rightarrow \mathcal{G}_{mX} \rightarrow \mathcal{GL}(n)_X \rightarrow \mathcal{GP}(n)_X \rightarrow 1$ を与える。これから次の cohomology groups の exact sequence を得る。

$$1 \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}_{mX}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{GL}(n)_X) \rightarrow H^1(X, \mathcal{GP}(n)_X) \xrightarrow{\delta} H^2(X, \mathcal{G}_{mX})$$

$1 \rightarrow H^1(X, \mathcal{G}_{mX}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{GL}(n)_X)$ が exact となるのは、

$H^0(X, \mathcal{GL}(n)_X) \rightarrow H^0(X, \mathcal{GP}(n)_X)$ が surjective であるからである。

$\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ を Azumaya's algebras とするとき、 $\delta(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}') = \delta(\mathcal{A}) \delta(\mathcal{A}')$ となることは容易に確かめられる。

PROPOSITION (1.4)

1°. $\mathcal{A}$ を Azumaya's algebra とするとき、 $\delta(\mathcal{A})$ は $Br(X)$ における $\mathcal{A}$ の class により定まる。

2°. 1°. によって定義される写像 $\delta: Br(X) \rightarrow H^2(X, \mathcal{G}_{mX})$ は group homomorphism である。

3°. 2°. の homomorphism は injective である。

4°. $P_n(X) = H^1(X, \mathcal{GP}(n)_X)$ の $Br(X)$ における image は n によって零化される。

(証明) 1°. ~ 3°. は明らかである。

4°. 次の exact sequence を考へる。

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_{nX} \rightarrow \mathcal{SL}(n)_X \rightarrow \mathcal{GP}(n)_X \rightarrow 1.$$

(3)

2.2. μ_n は 1 の n 乗根の群で, $SL(n)$ は special linear group である。

この exact sequence から, coboundary map $\delta': H^1(X, GL(n)_X) = P_n(X) \rightarrow H^2(X, \mu_n)$ を得る。ところで, δ は $P_n(X) \xrightarrow{\delta'} H^2(X, \mu_n) \rightarrow H^2(X, G_{mX})$ と分解する。 $H^2(X, \mu_n)$ は n によって零化されるので, かくして 4° は証明された。

上の 4° から分るように $Br(X)$ は torsion group である。実は X が finite $\mathcal{O}_X$ -complex のときには, (1.4) 2° の homomorphism $\delta: Br(X) \rightarrow H^2(X, G_{mX}) (\cong H^3(X, \mathbb{Z}))$ は, $Br(X)$ と $H^2(X, G_{mX})$ の torsion part との同型を与えていることが分る。(Serre)

§ 2. 体上の central simple algebras.

体 k 上の central simple algebra を k 上の Azumaya's algebra といい。

PROPOSITION (2.1)

A を k 上の Azumaya's algebra とする。すると $[A: k] = r^2$ とかけられる。 L を A の subalgebra とするとき, 次の条件は同値である。

(i). L は k 上 étale (即ち L は k の finite separable extensions の有限個の直和) で, $[L: k] = r$ である。

(ii). L は k 上 étale で, $V_A(L) = L$ である。

但し, $V_A(L) = \{x \in A \mid xy = yx \text{ for every } y \in L\}$ である。

(4)

- (iii) L は A の maximal commutative étale subalgebra である。
 (iv) Ω を代数閉体である k の拡大体とすると、isomorphism $A\Omega (= A \otimes_k \Omega) \cong M_r(\Omega)$ で、 $L\Omega$ を対角行列から成る $M_r(\Omega)$ の subalgebra に変換するものが存在する。

(証明)

環論がよく知られた事実なので省略する。

以下この節の結果はすべて環論がよく知られた事実から証明を省略する。

PROPOSITION (2.2)

(2.1) の条件の下に、 $L = k[x]$ が A の maximal commutative étale subalgebra となるような元 $x \in A$ が存在する。

PROPOSITION (2.3)

A を k 上の Azumaya algebra とし、 $L \subseteq A$ の maximal étale subalgebra とする。 $[A:k] = r^2$ とする。

このときには、 A は rank r の free L -module である。(left あるいは right L -module として。)

PROPOSITION (2.4)

A を k 上の Azumaya algebra とする。 L は A の commutative subalgebra で、right L -module A は free で rank r をもつとする。 V を dimension r の A の underlying L -vector space とする。次のような L -algebras の homomorphism $\nu: A \otimes_k L \rightarrow \text{End}_L(V)$

(5)

を定める。この $A \otimes_k L$ の制限は、 A の regular representation $\text{reg}(A) = 24$ によって与えられる k -square homomorphism $u: A \rightarrow \text{End}_L(V)$ である。

このときには、 u は isomorphism で $A \otimes_k L \cong M_r(L)$ となる。

Corollary (2.5)

A を k 上の Azumaya algebra とし、 L を A の maximal étale subalgebra とする。 $[A:k] = r^2$ とする。

このときには、(2.4) の canonical homomorphism u は isomorphism である。したがって、 $A_L \cong M_r(L)$ である。

PROPOSITION (2.6)

Λ を artinian local ring とし、 k を Λ の residue field とする。

A_0 を k 上の central simple algebra とする。

このときには、次の条件を満足する k -algebra A が同型を除いて高々一つ存在する。

(i) A は free Λ -module である。

(ii) $A \otimes_{\Lambda} k \cong A_0$ である。

特に、 $A_0 \cong M_r(k)$ ならば、 $A \cong M_r(\Lambda)$ である。

§ 3. Azumaya algebras over a prescheme.

Theorem (3.1)

X を prescheme とし、 $\mathcal{A}$ を X 上の sheaf of algebras で $\mathcal{O}_X$ -module として finite presentation であるとする。

(0)

次の条件は同値である。

- (i). $\mathcal{A}$ は locally free $\mathcal{O}_X$ -module で、任意の $x \in X$ に対して $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$ は $\kappa(x)$ 上の central simple algebra である。
- (ii). $\mathcal{A}$ は locally free $\mathcal{O}_X$ -module で、natural homomorphism : $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^\circ \rightarrow \underline{\text{End}}_{\mathcal{O}_X\text{-mod}}(\mathcal{A})$ は bijective である。
- (iii). 任意の $x \in X$ に対して、 $\mathcal{A}_x \cong M_r(\mathcal{O}_x)$ となるような整数 $r \geq 1$ と、 x の開近傍 U と、finite étale surjective morphism $U' \rightarrow U$ が存在する。
- (iii)'. 任意の $x \in X$ に対して、 $\mathcal{A}_x \cong M_r(\mathcal{O}_x)$ となるような整数 $r \geq 1$ と、 x の開近傍 U と、surjective morphism $U' \rightarrow U$ が存在する。

(証明)

(i) $\Leftrightarrow$ (ii), (iii)' $\rightarrow$ (i), (iii) $\rightarrow$ (iii)' は明らかである。したがって、(i) $\rightarrow$ (iii) を示せば十分であるが、これは次の (3.5) と (3.7) からしるがう。

Corollary (3.2)

$\mathcal{A}$ によって定義される X の étale site $X_{\text{ét}}$ 上の algebra を再び $\mathcal{A}$ で表わす。このとき (3.1) の条件は $\mathcal{A}$ が $X_{\text{ét}}$ 上の Azumaya's algebra ということと同値である。

(証明)

$\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}}$ によって次のように定義される $X_{\text{ét}}$ 上の sheaf を表わす。

(7)

$X' \rightarrow X$ を étale morphism とするとき, $\mathcal{O}_{X'} = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'})$ である。
 $X_{\text{ét}}$ 上の algebra が Azumaya's algebra であるとは、各点 x に対し $\mathcal{A}_x \cong \text{Mr}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})_x$ となるような covering family $(X_i \rightarrow X)$ が存在するときをいう。このことと、(3.1) から我々の主張は証明される。

Remark (3.3)

X 上の finite presentation である modules の category と、 $X_{\text{ét}}$ 上の finite presentation である modules の category は equivalent である。したがって、 $X_{\text{ét}}$ 上の Azumaya's algebras の分類は (3.1) の条件を満足する X 上の algebras の分類と同値である。このような algebra を X 上の Azumaya's algebra といい。

PROPOSITION (3.4)

$\mathcal{A}$ は X 上の algebra で、(3.1) の同値な条件 (i), (iii) をみたすものとする。 $\mathcal{A}$ は constant rank r^2 をもつとし、 Ω は X 上の finite étale algebra とする。即ち Ω は commutative $\mathcal{O}_X$ -algebra で、 $\mathcal{O}_X$ -module として locally free。さらに任意の $x \in X$ に対して、 $\Omega(x) = \Omega \otimes_{\mathcal{O}_x} K(x)$ は $K(x)$ 上の étale algebra である。

さらに Ω は至る所 rank r をもち、 $u: \Omega \rightarrow \mathcal{A}$ は algebras の homomorphism で、任意の $x \in X$ に対して、 $u(x): \Omega(x) \rightarrow \mathcal{A}(x)$ は injective とする。

このときには、

- (i) Ω は $\mathcal{O}_X$ -module として、局所的に $\mathcal{A}$ の直和因子である。
 (8)

(ii) $\mathcal{A}$ は rank r の locally free $\mathcal{L}$ -module である。

(iii) natural homomorphism: $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{L} \rightarrow \underline{\text{End}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{V})$ は bijective である。

但し、 $\mathcal{V}$ は $\mathcal{A}$ の underlying $\mathcal{L}$ -module である。

(証明)

容易だから省略する。

Corollary (3.5)

(3.4) の条件の下に、 $X = \text{Spec}(\mathcal{L})$ とおき、 $\mathcal{E}'$ によって $\mathcal{L}$ -module $\mathcal{V}$ によって定義される $\mathcal{O}_{X'}$ -module を表わす。このときには、
 $\mathcal{A}_{X'} \cong \underline{\text{End}}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}')$ である。

(証明)

E.G. A. II (1.5.7) から $\mathcal{A}_{X'} \cong (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{L}} \mathcal{L})^{\sim}$ である。一方 E.G. A. II (1.4.8.2) から $\mathcal{A}(\underline{\text{End}}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}')) = \underline{\text{End}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{V})$ である。したがって、(3.4) から、
 $\mathcal{A}_{X'} \cong \underline{\text{End}}_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{E}')$ を得る。

Definition (3.6)

$\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya's algebra とし、 $\mathcal{L}$ を $\mathcal{A}$ の subalgebra とする。
 このとき、 $\mathcal{L}$ が $\mathcal{A}$ の maximal étale subalgebra であるとは、 $\mathcal{L}$ が X 上 étale で、inclusion: $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{A}$ が X の各点で (3.4) の条件を満足するときをいう。

$\xi \in \Gamma(X, \mathcal{A})$ とする。 ξ が regular であるとは、 ξ が $\mathcal{A}$ の maximal étale subalgebra を生成するときをいう。

Theorem (3.7)

$\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya's algebra とすると、任意の $x \in X$ に対して、 x の開近傍 U と $\mathcal{A}|_U$ の maximal étale subalgebra $\mathcal{E}$ が存在する。

(証明)

これは、(2.2) と次の Lemma から容易に示される。

Lemma (3.8)

X を prescheme とし、 $\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya's algebra とする。

$\xi \in \Gamma(X, \mathcal{A})$ とし、 $x \in X$ とする。 $\xi(x) = \xi_x \otimes 1 \in \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}_x \otimes \kappa(x)$ が regular ならば $\xi|_U$ が regular となるような x の開近傍 U が存在する。

(証明)

容易に $X = \text{Spec}(\Lambda)$ が local で、 x がその closed point である場合に帰着される。

このときには、 $\mathcal{A} = \tilde{A}$ とかける。 A は Λ -algebra で Λ -module として free である。 $\xi \in A$ である。 Λ の maximal ideal を $\mathfrak{m}$ とすれば、 $A \otimes \Lambda/\mathfrak{m} = A/\mathfrak{m}A$ は central simple $\Lambda/\mathfrak{m}$ -algebra である。 $[A/\mathfrak{m}A : \Lambda/\mathfrak{m}] = r^2$ とおく。仮定によって、 $\bar{\xi} \in A/\mathfrak{m}A$ は regular である。即ち $\Lambda/\mathfrak{m}[\bar{\xi}]$ は $A/\mathfrak{m}A$ の maximal étale subalgebra である。したがって、 $\Lambda/\mathfrak{m}[\bar{\xi}]$ は $\Lambda/\mathfrak{m}$ 上 étale で、rank r である。このとき、 $\Lambda[\xi]$ が A の maximal étale subalgebra

になることを証明したい。

Λ は noetherian local subrings Λ_α の inductive limit である。しかも Λ_α の maximal ideal を $\mathfrak{m}_\alpha$ とすると、 $\mathfrak{m} = \varinjlim \mathfrak{m}_\alpha$ とかける。したがって、 $\Lambda/\mathfrak{m} = \varinjlim (\Lambda_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha)$ となる。それ故 Λ を十分大きくとれば $\Lambda_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha[\xi]$ は $\Lambda_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha$ 上 étale であり rank r になる。このとき、 $\Lambda_\alpha[\xi]$ が Λ_α 上 étale であり、 Λ_α -module として free of rank r なることを証明されればよい。すなわち Λ_α は noetherian といえる。 Λ のためには、 $\hat{\Lambda} = \Lambda \cdot 1 + \Lambda \cdot \xi + \cdots + \Lambda \cdot \xi^{r-1}$ が ring になることを証明できればよい。それには、 $\xi^r \in \hat{\Lambda}$ を証明すればよい。

Λ は artinian と仮定できる。

“ artinian local ring ” のときに証明できたとすれば $\xi^r \in \hat{\Lambda}/\mathfrak{m}^2 \hat{\Lambda}$ だから $\xi^r - a_n \in \mathfrak{m}^2 \hat{\Lambda}$ となる $a_n \in \hat{\Lambda}$ が存在する。上の証明から分るように既に Λ は noetherian local ring の場合には帰着されている。したがって、 $\xi^r \in \hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}$ である。ところで $\hat{\Lambda}$ は A の直和因子だから、 $\xi^r \in \hat{\Lambda} \cap A = \hat{\Lambda}$ である。かくして、 Λ が artinian local ring の場合に帰着された。

ところで artinian local ring の場合には、 $A \cong M_r(\Lambda)$ とできる。

“ L は N/m の finite separable extension であり、central simple algebra $\hat{A}/m\hat{A}$ を split するものとせよ。 $L = \hat{A}/m(\theta)$ とかける。 θ を根にもつ N/m 上の monic irreducible polynomial を f とし、 F を

Λ に係数をもつ polynomial の $\bar{F} = f$ in $\Lambda/m[\Lambda]$ なるものとする。
 $\Lambda_1 = \Lambda[\Lambda, (f)]$ とおく。 $\Lambda_1/m\Lambda_1 = k$ から Λ_1 は $m\Lambda_1$ を maximal
ideal にもつ local ring である。 $\exists r \otimes 1 \in \mathfrak{p} \otimes \Lambda_1$ かつこれは
 $\mathfrak{p} \in \mathfrak{p} \cap \Lambda \cap A = \mathfrak{p}$ となる。したがって $A \cong A \otimes_{\Lambda} k \cong M_r(k)$ の場合
に帰着できる。したがって (2.6) から $A \cong M_r(\Lambda)$ となる。この場
合には Hamilton-Cayley の定理から $\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$ となる。

Theorem (3.9)

$\mathcal{A}$ を X 上の Azumaya algebra とし、 u を $\mathcal{A}$ の automorphism
とする。このときには、Zariski topology (したがって étale
topology) に関して、局所的に u は inner である。即ち局所的
に $u(x) = axa^{-1}$ とかける。

ここに、 a は $\mathcal{A}$ の invertible section で、 $\mathcal{O}_X^*$ の section による
multiplication を法として、一意的に決定される。

(証明)

任意の $x \in X$ に対して、 u_x を u によって引き起される $\mathcal{A}_x$ の
automorphism とする。このときには、Auslander-Goldman の結果
から $\mathcal{A}_x$ の $\mathcal{O}_x$ -algebra automorphism は inner である。したがって、
 x の開近傍 $U = \text{Spec}(R)$ と、 $a \in \Gamma(U, \mathcal{A})^*$ が存在して、 $u_x(\alpha x) =$
 $ax^{-1}\alpha x$ ($\alpha x \in \mathcal{A}_x$) とかける。とこの A は R -module of finite
presentation 故から $f \in R$ が存在して u_f は A_f の inner
automorphism となる。したがって $\mathcal{O}_X^*$ の section による multiplication を除

いて決定されることは明らかである。

Theorem (3.10)

(i) associative algebra $\text{Mr}(\mathcal{O}_X)$ の automorphisms の scheme は projective group $\text{GP}(r)_X$ に同型である。

(ii) X 上の rank r^2 の Azumaya's algebras の分類は étale topology (あるいは f.p.f.c. topology) の意味での group $\text{GP}(r)_X$ の X 上の principal homogeneous bundles の分類に同値である。即ち X 上の rank r^2 の Azumaya's algebras は $H^1(X_{\text{ét}}, \text{GP}(r)_X) = H^1(X_{\text{pf}}, \text{GP}(r)_X)$ で分類される。

(証明)

(i) (3.9) から明らかである。

(ii) $\mathcal{A}$ を X 上の rank r^2 の Azumaya's algebra とすると, étale covering family $(X_i \rightarrow X)$ が存在して, $\mathcal{A}_{X_i} \xrightarrow{\cong} \text{Mr}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})_{X_i}$ となる。family $\{g_{ji}\}$ ($g_{ji} = g_j \circ g_i^{-1}: \text{Mr}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})_{X_i \times X_j} \xrightarrow{\cong} \text{Mr}(\mathcal{O}_{X_{\text{ét}}})_{X_i \times X_j}$) は明らかに cocycle condition を満足する。(i) から, $g_{ji} \in \text{GP}(r)_X(X_i \times X_j)$ 故から, $\{g_{ji}\}$ は $H^1(X_{\text{ét}}, \text{GP}(r)_X)$ の元を与える。しかも同型なものは cobounding cycle だけ異なるということとは容易に分るので, Azumaya's algebras の同型類の集合から $H^1(X_{\text{ét}}, \text{GP}(r)_X)$ の中への対応を得た。

逆に, $H^1(X_{\text{ét}}, \text{GP}(r)_X)$ の元が X 上の rank r^2 の Azumaya's algebra を与えることは faithfully flat, quasi-compact descent の理論が

は明らかである。

$H^1(X_{\text{ét}}, \underline{\text{GP}}(r)_X) = H^1(X_{\text{pé}}, \underline{\text{GP}}(r)_X)$ となることは、(3.1) から容易に分る。

Theorem (3.11)

A を henselian local ring とし、 k をその residue field とする。

$X = \text{Spec}(A)$, $x = \text{Spec}(k)$ とおく。 $\text{Pr}(X)$, $\text{Pr}(x)$ をそれぞれ X , x 上の rank r^2 の Azumaya's algebras の同型類の集合とすると restriction mapping: $\text{Pr}(X) \rightarrow \text{Pr}(x)$ は bijective である。

(証明)

$\text{Pr}(X) \cong H^1(X_{\text{ét}}, \underline{\text{GP}}(r)_X)$ で $\underline{\text{GP}}(r)_X$ は X 上 lisseかつ quasi-projective であるからこれは non commutative Galois cohomology の一般の結果 (SGAD, XXIV, appendix) からしるべき。

Corollary (3.12)

(3.11) の条件の下に、restriction mapping: $\text{Br}(X) \rightarrow \text{Br}(x)$ は bijective である。

(証明)

(3.11) から明らかである。

§4. Relation with the Brauer-Severi schemes.

(4.1)

$\underline{\text{GP}}(r)_X$ は projective fibre $\mathbb{P}_X^{r-1}$ の X -automorphisms の sheaf に同一視できる。しるべきで $H^1(X_{\text{ét}}, \underline{\text{GP}}(r)_X) = H^1(X_{\text{pé}}, \underline{\text{GP}}(r)_X)$ は、

(14)

étale topology (あるいは f.p.f.c. topology) に関して局所的に $\mathbb{P}_X^{r+1}$ に同型である X 上の schemes P の同型類の集合に同一視される。このような prescheme X 上の Brauer-Severi prescheme という。

Theorem (4.2)

$f: P \rightarrow X$ を proper, flat morphism とし、さらに finite presentation とする。 $x \in X$ における geometric fibre P_x は projective space $\mathbb{P}_{\bar{k}}^{r+1}$ に同型になるとする。

このときには、 x の開近傍 U と、 finite étale surjective morphism: $U' \rightarrow U$ が存在して、 $\mathbb{P}_X U' \cong_{(U')} \mathbb{P}_U^{r+1}$ となる。

(証明)

$\mathcal{O}_{X,x} = A$ とおき、 $\mathbb{P}_X \text{Spec}(A) = P'$ とおく。 m を A の maximal ideal とし、 $K = K(x) = A/m$ とおく。

とこから $P' \cong P_0 \otimes_{A_0} A$ とできる。但し、 A_0 は noetherian local ring で、 $k_0 = A_0/m_0 \hookrightarrow k = A/m$ である。

仮定によつて、 $P' \otimes_A \bar{k} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^{r+1}$ となる。 E.G.A. III. (0.10.3.1) から noetherian local ring B で、その residue field が $\bar{k}$ となり、さらに local homomorphism: $A \rightarrow B$ が存在して、 B が flat A -module となるものが存在する。 $(P_0 \otimes_{A_0} \hat{B}) \otimes_{\hat{B}} \bar{k} \cong \mathbb{P}_{\bar{k}}^{r+1}$ 故から、 Grothendieck の formal geometry の結果から、 $P_0 \otimes_{A_0} \hat{B} \cong \mathbb{P}_{\hat{B}}^{r+1}$ となる。 $A_0 \rightarrow \hat{B}$ は faithfully flat である。しるから、 (3.1) と (4.1) から分るようには finite étale surjective morphism: $\text{Spec}(C) \rightarrow \hat{\text{Spec}}(A_0)$ が

存在して、 $P_0 \otimes_{A_0} \subset \cong P_{\mathbb{C}}^{r+1}$ となる。したがって、 $P' \otimes_A A' \cong P_{A'}^{r+1}$ となる。但し、 $A' = A \otimes_{A_0} \mathbb{C}$ である。 $\text{Spec}(A') \rightarrow \text{Spec}(A)$ は finite étale surjective morphism である。 $P' \otimes_A A' \cong P \otimes_X A$ かつ $A = \mathcal{O}_{X, x}$ だから、 x の十分小さい近傍 U をとると、finite étale surjective morphism: $U' \rightarrow U$ が存在して、 $P \times_X U' \cong P_{U'}^{r+1}$ となる。

Corollary (4.3)

P を X 上の prescheme とする。 P が X 上の Brauer-Severi prescheme となるための必要十分条件は、 P が X 上 proper, flat かつ finite presentation かつ、その geometric fibres が projective spaces となることである。

(証明)

(4.2) から明らかである。