

渦の力学

工学院大学 今井 功 (Isao IMAI)

1. はじめに

この論文では流体の渦運動に関連して 3 つの問題を論ずる。矛 1 は「渦運動の解析接続」ともいうべきものである。すなわち、“2 つの領域 V_1, V_2 が曲面 S で接しているとき、領域 V_1, V_2 でおこる別々の流れがつながって、 V_1, V_2 をあわせた領域 $V_1 + V_2$ を通じて 1 つのまとまった流れを表わすための条件を考える。矛 2 は非定常の 2 次元の渦運動に対する Blasius の公式の拡張である。ただし流体は縮まない完全流体とする。簡単な応用例として、(i) 大きい渦巻の中での円柱の自由運動と、(ii) 中心部にわき出し（すいこみ）がある平板が一樣回転運動をする流体中で行なう自励的な回転運動、を考える。矛 3 は、縮まない粘性流体中の任意の渦分布に対して「渦の中心」を合理的に定義しようという試みである。前に Saffman は渦輪に関連して「渦の中心」を提

案しているが、その定義は円輪形の渦輪のようなばあい、すなわち渦分布が軸対称性をもつばあいにのみ適用できるものであることを注意する。

I. 渦運動の解析接続

2. 問題のおこり

領域 V でおこる流れの場を決定するには流速 v だけでは足りない。このほかに、密度 ρ , 圧力 p , 温度 T , ... 等の物理量を指定する必要がある。ただし、これらの諸量は質量・運動量の保存の法則、熱力学の法則、などで関係づけられている。それを数式的に表現するのが連続方程式、運動方程式、状態方程式、... である。たとえば、粘性のないバロトロピー流体では、流速 v と圧力 p だけを未知量としてとれば、連続方程式、運動方程式およびバロトロピー関係式: $\rho = f(p)$ によって v, p, ρ が決定される。 p を与えれば $\rho = f(p)$ は一意にきまるから、ある1つの領域でおこる流れは (v, p) の1組によって指定されると考えられる。

さて、いま曲面 S を境界面として隣接する2つの領域 V_1, V_2 にそれぞれ別々の流れ $(v_1, p_1), (v_2, p_2)$ があるとき、これらの流れが実はつながって領域 $V_1 + V_2$ でおこる1つの流れ (v, p) になるためには、どんな条件があればよいだろう

か？ (図1) それには S 上で $v_1 = v_2$, $p_1 = p_2$ が成り立てばよいだろう。しかし、条件をゆるめて、 $v_1 = v_2$ だけを要求してもよいのではなかろうか？

この点を明らかにすることは実際問題のとり扱いに重要であると思われるが、明確な議論はこれまでなされていないように思う。たとえば

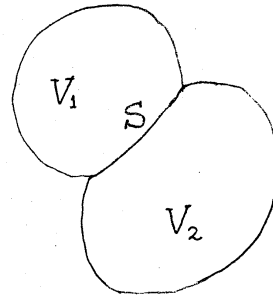


図1

Kirchhoff の楕円渦については、楕円の内部でおこる一様渦度 ω の流れと、楕円の外部でおこる循環 Γ の渦無しの流れを別々に考えて、それらをつなぎあわせて無限に広い領域での1つの流れを考える。その際、Lamb [1] は楕円上で $v_1 = v_2$ が成り立つという条件から Γ と ω の関係を導く。そして Villat [9] は、さらにこのとき $p_1 = p_2$ の条件も満足されていることを確かめるのである。はたして Villat のこの確認作業は不必要なのだろうか？ 変形する楕円渦に関する木田 [6] のとり扱いについて筆者の述べた疑問 [5] は正にこの点にある。この点を明らかにすることがこの第I部の目的である。

3. Kelvin の循環定理に関連する定理

粘性のないバロトロピー流体についてはつぎの定理が成り

立つ。記号は慣用のものである。(たとえば[2]を参照)

[定理]

$$\frac{D}{Dt} \int_1^2 v \cdot dr = -[H - q^2]_1^2, \quad (3.1)$$

$$H = P + \Omega + \frac{1}{2} q^2, \quad (3.2)$$

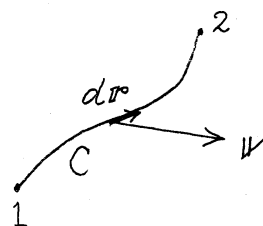
$$P = \int \frac{dp}{\rho}, \quad \mathbb{K} = -\text{grad } \Omega, \quad q = |v|.$$

(証明) 運動方程式:

$$\frac{Dv}{Dt} = -\text{grad}(P + \Omega) \quad (3.3)$$

と線要素ベクトル dr とのスカラ一積をつくる。(図2)

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{Dt} \cdot dr &= \frac{D}{Dt} (v \cdot dr) - v \cdot \frac{D}{Dt} dr \\ &= \frac{D}{Dt} (v \cdot dr) - d\left(\frac{1}{2} q^2\right). \end{aligned}$$



ただし $\frac{D}{Dt} dr = d \frac{D}{Dt} r = dv$ を使う。

図2

$$\begin{aligned} \therefore \frac{D}{Dt} (v \cdot dr) &= -dr \cdot \text{grad}(P + \Omega) + d\left(\frac{1}{2} q^2\right) \\ &= d\left(-P - \Omega + \frac{1}{2} q^2\right) = d(q^2 - H). \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{D}{Dt} \int_1^2 v \cdot dr = \int_1^2 \frac{D}{Dt} (v \cdot dr) = -[H - q^2]_1^2 \quad \underline{Q.E.D.}$$

例1 Kelvin の循環定理

点1と点2とを一致させるとCは閉曲線となる。このとき

(3.1) は

$$\frac{D}{Dt} \Gamma(C) = -[\Omega]_C. \quad (3.4)$$

外力のポテンシャル Ω が場所の 1 価関数であれば, 上式の右辺は 0 になる. したがって Kelvin の循環定理: $\Gamma(C) = \text{const}$ が得られる.

例 2 流れの解析接続

[定理] 曲面 S の両側に別々の流れがあるとする. もし S 上で速度 V が一致すれば圧力 p も一致し, したがって 2 つの流れは S を含む全領域を通じて 1 つの可能な流れを表わす. ただし, 流体は粘性のないバロトロピー流体で, 外力は保存力とする.

(証明) 曲面 S は流体の運動にともなって変形する. 時刻 $t=0$ での S を S_0 とする. S 上でその両側の流れの速度が一致するとい

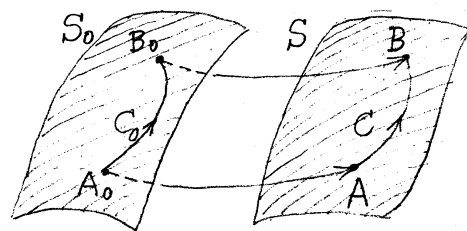


図 3

う仮定から, S 上の流体粒子は S の両側のどちらの領域に属するとも考えられる. (3.1) で 1, 2 として S 上の任意の 2 点 A, B をとると

$$[H - q^2]_A^B = - \frac{D}{Dt} \int_{A(C)}^B v \cdot dr. \quad (3.5)$$

この関係は S の両側のそれぞれの領域において任意の曲線 C について成り立つのであるが、とくに C として S 上の任意の曲線弧をとることができる。したがって (3.5) の値は S の両側で同じである。すなわち

$$\{[H - q^2]_A^B\} = 0. \quad (3.6)$$

ここで $\{Q\}$ は面 S を横切るとき Q の値のとびを意味する。
さて

$$\begin{aligned} \{[H - q^2]_A^B\} &= [\{H - q^2\}]_A^B = [\{P + \Omega - \frac{1}{2} q^2\}]_A^B \\ &= [\{P\}]_A^B \quad (\because \{\Omega\} = 0, \{q^2\} = 0.) \\ &= \{[P]_A^B\} = \{P(B)\} - \{P(A)\}. \end{aligned}$$

したがって、(3.6) により

$$\{P(B)\} = \{P(A)\}. \quad (3.7)$$

P は $\text{grad } P$ の形で運動方程式に入るから、定数だけの任意性がある。そこで、ある 1 つの点 (流体粒子) A について $\{P(A)\} = 0$ ときめておくと、 S 上の任意の点 B について $\{P(B)\} = 0$ が成り立つことになる。すなわち、面 S の両側

の領域での P , したがって p , が S 上で同じ値をとる.

v と p が S 上で一致すれば, S の両側の領域を通じて1つの流れを表わすことはいうまでもなからう. Q.E.D.

(注) ‘流れの解析接続の定理’と名付けたのは複素関数論での‘解析接続’との類似によるもので, ‘解析的’analytic という数学的な意味はない. 単に‘流れの接続の定理’といってもよいだろう.

II. Blasius の公式の拡張

4. 縮まない完全流体の2次元の非定常運動

縮まない完全流体の2次元の流れは, 複素変数を使えばつぎのように表わされる [5].

$$w = u - iv, \quad z = x + iy \quad (4.1)$$

$$w = 2i \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (4.2)$$

$$\omega = 2i \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = -2i \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (4.3)$$

ここで w は複素速度, ω は渦度, Ψ は流れの関数である. また運動方程式は

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -2 \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} + i\omega w, \quad (4.4)$$

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} q^2 + \Omega \quad (4.5)$$

のように表わされる。

流れの中の物体 B が流体から受ける力 F を求めるには、物体をとりかこむ任意の閉曲線 C で囲まれた領域について運動量保存の法則を適用すればよい (図4)。 C の線要素 ds を横切って左から右に (C の法線 n の方向に) 通過する 運動量の流れ は

$$dG = \rho v v_n + p n \quad (4.6)$$

で与えられ、複素形式では

$$dG_x - i dG_y = \rho w d\psi + i p d\bar{z} \quad (4.7) \quad \text{図4}$$

となる。 B と C の間の領域を S とすれば、運動量保存の法則は

$$X - iY = - \int_C (dG_x - i dG_y) - \rho \frac{d}{dt} \iint_S w dS - 2\rho \iint_S \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} dS \quad (4.8)$$

のように表わされる。右辺の第1項は C を通って流入する運動量、第3項は領域 S を占める流体に外力によって導入され

る運動量，オ2項はこれらの運動量のうち流体の運動量の増加として消費される部分を表わし，けっきよく右辺は物体Bに流入する運動量を表わす。したがって，これが物体Bに働く力 X, Y を与えるのである。

(4.7) を (4.8) に代入すると

$$X - iY = \frac{i}{2} \rho \int_C w^2 dz + i\rho \int_C \bar{z} d\left(H + i\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) \\ + \rho \frac{d}{dt} \int_B \bar{z} d\Psi + i\rho \int_B \Omega d\bar{z}$$

が得られ，整理すれば

$$X + iY = -\frac{i}{2} \rho \int_C \overline{w^2 dz} + i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_C \bar{z} w dz + i\rho \int_C \bar{z} \omega d\Psi \\ + \rho \frac{d^2}{dt^2} (S z_G) - i\rho \int_B \Omega d\bar{z} \quad (4.9)$$

となる。右辺の最後の項は Green の公式 (の複素形式) により B の内部の領域 ([B] で表わす) についての面積分で表わせる：

$$-i\rho \int_B \Omega d\bar{z} = -i\rho \cdot 2i \iint_{[B]} \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} dS \\ = -\rho \iint_{[B]} (K_x + iK_y) dS. \quad (4.10)$$

ただし $K = -\text{grad } \Omega$ は単位質量に働く外力である。したがって，(4.10) は物体を周囲の流体でおきかえたときに働く外力の符号を変えたもので，つまり ‘浮力’ を表わすの

である。なお (4.9) の右辺に現われる S と z_G はそれぞれ $[B]$ の面積および重心 (の複素座標) である (図 5)。

物体 B が運動するばあいには、
物体に固定した適当な点 z_0 に相対的な表示を使うと便利である。そのばあい (4.9) は

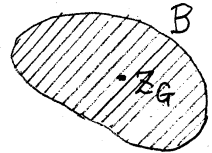


図 5

$$\begin{aligned} X + iY = & -\frac{i}{2}\rho \int_C \overline{w^2} dz + i\rho \frac{d}{dt} \int_B (z - z_0) w dz \\ & + \rho \frac{d^2}{dt^2} \{ S(z_G - z_0) + \rho \frac{d}{dt} (S \dot{z}_0) \\ & + i\rho I(B) \dot{z}_0 + \text{浮力} \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} = & -\frac{i}{2}\rho \int_C \overline{w^2} dz + i\rho \frac{\partial}{\partial t} \int_C (z - z_0) w dz \\ & + i\rho \int_C (z - z_0) w d\Psi + \rho \frac{d^2}{dt^2} \{ S(z_G - z_0) \} \\ & + \rho \frac{d}{dt} (S \dot{z}_0) + i\rho I(C) \dot{z}_0 + \text{浮力} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。ただし、 $I(B)$ は物体に沿う循環、 $I(C)$ は閉曲線 C に沿う循環である。渦運動では一般に $I(B) \neq I(C)$ である。

角運動量について上と同様のとり扱いをすることにより、物体に働く流体の力のモーメントの公式が得られる。任意の点 z_0 に関するモーメントを M_{z_0} で表わせば

$$\begin{aligned}
M_{z_0} &= \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \int_B (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) w dz \\
&\quad + \rho \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{z}}_0 \int_B (z - z_0) w dz \right\} + \rho \operatorname{Im} \left[\dot{\bar{z}}_0 \frac{d}{dt} \{S(z_0 - z_0)\} \right] \\
&\quad - \frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_B w^2 (z - z_0) dz + \text{浮力} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C w^2 (z - z_0) dz + \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \int_B (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) w dz \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \iint_S \frac{D}{Dt} \{ (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) \} \omega dS \\
&\quad + \rho \operatorname{Re} \left\{ \dot{\bar{z}}_0 \int_C (z - z_0) w dz \right\} + \rho \operatorname{Im} \left[\dot{\bar{z}}_0 \frac{d}{dt} \{S(z_0 - z_0)\} \right] \\
&\quad + \text{浮力}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$X + iY$ と M_{z_0} にそれぞれ 2通りの表示が与えてあるが、これは線積分を物体の表面 B について行なうか、物体をとりかこむ任意の(空間に固定した)閉曲線 C について行なうかの相違によるもので、ばあいに応じて便利な方を使えばよい。

5. 一様な渦度分布

渦度分布が一様なばあい、すなわち $\omega = \text{const}$ のばあいには、流れの関数 ψ および複素速度 w は 1つの解析関数 $f(z)$ を使ってつぎのように表わされる [5].

$$\Psi = -\frac{\omega}{4} z \bar{z} + \operatorname{Im} f(z), \quad (5.1)$$

$$w = -\frac{i}{2} \omega \bar{z} + f'(z). \quad (5.2)$$

このばあい，力およびモーメントの公式は簡単化されてつぎのようになる。

$$\begin{aligned} X+iY = & -\frac{i}{2} \rho \int_C \overline{f'^2} dz + \rho \left(\frac{\omega}{2} + i \frac{d}{dt} \right) \int_C (z-z_0) df \\ & + \frac{\rho}{2} \omega [\bar{f}]_B z_0 + i \rho [\bar{f}]_B \dot{z}_0 + \rho S \ddot{z}_0 + \text{浮力}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} M_{z_0} = & -\frac{\rho}{2} \operatorname{Re} \int_C f'^2 (z-z_0) dz + \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \operatorname{Re} \int_B (z-z_0)(\bar{z}-\bar{z}_0) df \\ & + \rho \operatorname{Re} \left[(\dot{\bar{z}}_0 + \frac{i}{2} \omega \bar{z}_0) \left\{ \int_C (z-z_0) df - i \frac{d}{dt} [S(z_G-z_0)] \right\} \right] \\ & + \frac{\rho}{2} \omega \left[\operatorname{Re} \{ \dot{\bar{z}}_0 S(z_G-z_0) \} + \frac{dI_0}{dt} \right] + \text{浮力}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで $[f]_B$ は物体 B を 1 周したときの f の値の変化であって，物体のまわりの循環 $\Gamma(B)$ および物体の断面積 S の時間的变化 $\dot{S}$ との間に

$$[f]_B = \Gamma(B) - \omega S + i \dot{S} \quad (5.5)$$

の関係がある。また I_0 は物体の断面形 $[B]$ の点 z_0 のまわりの（幾何学的）慣性モーメントである。

(5.3), (5.4) で $\omega=0$ とおけば，渦無し の非定常流に

対して前に筆者の導いた公式 ([2] p.407) に一致することが確かめられる。

6. 一様渦度分布の流れの中の物体の運動

上に得られた諸公式を応用するためには, $f(z)$ の具体的な表式が必要である。いま無限にひろがる流れの中で1個の物体が運動するばあいを考えよう。一様渦度分布のばあいに流速の大きさが原点からの距離に比例して増大することを考慮して

$$f(z) = \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + f_0(z) \quad (6.1)$$

ととることにする。このとき

$$w = -\frac{i}{2} \omega \bar{z} + 2\gamma_2 z + \gamma_1 + f'_0(z) \quad (6.2)$$

であるから, γ_1, γ_2 はそれぞれ無限遠での一様流速およびびずみ速度を表わすことがわかる。また

$$f'_0(z) = O\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \rightarrow \infty \quad (6.3)$$

と仮定することができ。

物体の形 いま, 物体の外部の領域が解析関数

$$z = g(\zeta) \quad (6.4)$$

によって z 平面の単位円 $|\zeta|=1$ の外部に写像されるものとする。このとき $g(\zeta)$ は

$$g(\zeta) = A\zeta + \frac{B}{\zeta} + \frac{C}{\zeta^2} + \dots, \quad |\zeta| > 1 \quad (6.5)$$

のように Laurent 展開される。物体が変形するばあいには、係数 $A, B, C, \dots$ は時間 t の関数である。物体が運動するばあいには、(6.4) を一般化して

$$z = z_0 + e^{i\chi} g(\zeta) \quad (6.6)$$

とすればよい。ただし、 z_0 は物体に固定した点、 χ は物体の傾きを表わす (図 6)。

z_0, χ は一般に t の関数である。とくに $\dot{z}_0$ は物体の並進速度、 $\dot{\chi}$ は自転の角速度を表わす。

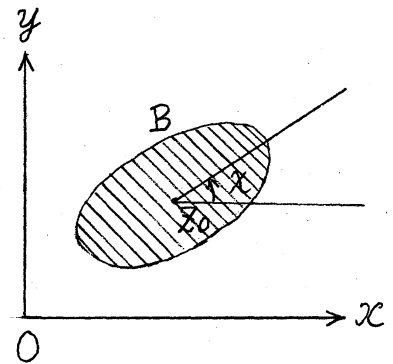


図 6

境界条件 物体 B の表面の境界条件は一般に

$$\Psi = \text{Im} \int_B \dot{\bar{z}} dz \quad B \text{ 上で} \quad (6.7)$$

で与えられる [5]。いまのばあい Ψ は (5.1) で与えられるから

$$\operatorname{Im} f(z) = \frac{\omega}{4} z \bar{z} + \operatorname{Im} \int_B \dot{\bar{z}} dz \quad B \text{ 上で} \quad (6.8)$$

となり, さらに (6.1) により

$$\operatorname{Im} f_0(z) = \frac{\omega}{4} z \bar{z} - \operatorname{Im}(\gamma_1 z + \gamma_2 z^2) + \operatorname{Im} \int_B \dot{\bar{z}} dz, \quad B \text{ 上で} \quad (6.9)$$

となる. (6.6) を代入して整理すれば

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f_0(z) = & -\operatorname{Im} \left\{ (\gamma_1 + 2\gamma_2 z_0 - \frac{i}{2} \omega \bar{z}_0 - \dot{\bar{z}}_0) e^{i\chi} g + \gamma_2 e^{2i\chi} g^2 \right\} \\ & + \operatorname{Im} \left(\frac{i}{4} \omega g \bar{g} \right) + \operatorname{Im} \left(\int \dot{\bar{g}} dg - i\chi \int \bar{g} dg \right), \\ & |\zeta| = 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

となる. $f_0(z)$ は無限遠での条件 (6.3) と $|\zeta| = 1$ での境界条件 (6.10) によって決定される. たとえば

$$g(\zeta) = A\zeta + \frac{B}{\zeta} \quad (6.11)$$

とすれば, 楕円柱のばあいを得られる.

7. 渦巻の中の円柱の運動

剛体的な回転をする渦巻の中での円柱の運動 (図7) を議論するには

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad g(\zeta) = a\zeta, \quad \chi = 0$$

とすればよい. このとき (6.10) から容易に

$$f(\zeta) = f_0(\zeta) = -a(\dot{z}_0 - \frac{i}{2}\omega z_0)\frac{1}{\zeta} + i\kappa \log \zeta \quad (7.1)$$

が得られる。 κ は任意の実数定数である。 (7.1) を Blasius のオI公式の拡張 (5.3) に代入して計算すると

$$X + iY = -\rho S \ddot{z}_0 + i\rho \{ \Gamma(B) + \omega S \} \dot{z}_0 + \frac{\rho}{2} \omega \Gamma(B) z_0 \quad (7.2)$$

が得られる。円柱の質量(単位長さあたりの)を M とすれば、運動方程式は

$$M \ddot{z}_0 = X + iY \quad (7.3)$$

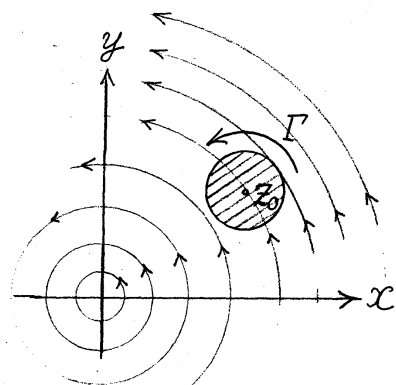


図7

である。 (7.2) を代入して整理すれば

$$\ddot{z}_0 - 2i\alpha \dot{z}_0 + \beta z_0 = 0, \quad (7.4)$$

$$\alpha = \frac{\rho}{2} \frac{\Gamma(B) + \omega S}{M + \rho S}, \quad \beta = -\frac{\rho}{2} \frac{\omega \Gamma(B)}{M + \rho S} \quad (7.5)$$

となり、解は

$$z_0 = e^{i\alpha t} (c_1 e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}), \quad (7.6)$$

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta} \quad (7.7)$$

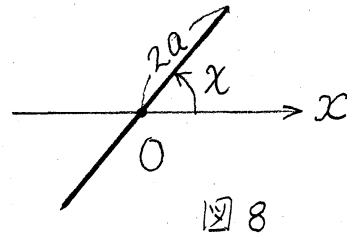
で与えられる。渦巻の中心のまわりに角速度 α で回転する座標系から見れば、円柱の運動は簡単になる。すなわち、

$\alpha^2 + \beta$ の正・負に応じて、楕円運動あるいは双曲線運動を行なうのである。

8. すいこみ(わき出し)をつけた平板の運動

風車の軸から空気をすいこむと風車は自動的に回転をはじめたろうということも前に筆者は直観的な考察から予想した[4]。その簡単なモデルとして、平板の中心部にすいこみを設けたときの平板の運動を考えよう。

みだされない流れとしては 7 と同様、一様回転流をとり、その中心軸に平板の中心があるものとする。このとき



$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad g(\zeta) = a\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right), \quad z_0 = 0$$

であって、平板の長さは $4a$ である(図8)。

前と同様の計算で

$$f(z) = f_0(z) = ia^2\left(\frac{\omega}{2} - \dot{\chi}\right)\frac{1}{\zeta^2} + i\kappa \log \zeta + m \log z \quad (8.1)$$

が得られる。 m はわき出しの強さである。複素速度は(6.2)により

$$w = -\frac{i}{2}\omega\bar{z} + \frac{i\kappa}{a\zeta} \frac{1 - \frac{2a^2}{\kappa}\left(\frac{\omega}{2} - \dot{\chi}\right)\frac{1}{\zeta^2}}{1 - \frac{1}{\zeta^2}} + \frac{m}{z} \quad (8.2)$$

となる。板の両端 ($z = \pm 1$) で速度が有限になることを要求すれば (Kutta の条件) 循環定数 κ はつぎのように決定される:

$$\kappa = a^2(\omega - 2\dot{\chi}). \quad (8.3)$$

拡張された Blasius の第 II 公式 (5.4) を使えば

$$\begin{aligned} M_{z_0} &= 2\pi\rho\kappa m - \pi\rho a^2\dot{\kappa} \\ &= 2\pi\rho m a^2(\omega - 2\dot{\chi}) + 2\pi\rho a^4\ddot{\chi} \end{aligned} \quad (8.4)$$

が得られる。

さて、平板の中心のまわりの慣性モーメントを I とすれば運動方程式は

$$I\ddot{\chi} = M_{z_0} \quad (8.5)$$

である。(8.4) を代入すれば

$$(I - 2\pi\rho a^4)\ddot{\chi} + 4\pi\rho m a^2(\dot{\chi} - \frac{\omega}{2}) = 0 \quad (8.6)$$

となり、解は

$$\dot{\chi} - \frac{\omega}{2} = c e^{\lambda t}, \quad \lambda = -\frac{4\pi\rho m a^2}{I - 2\pi\rho a^4} \quad (8.7)$$

で与えられる。

周囲の流体の回転角速度は $\omega/2$ であるから、 $c=0$ は平板が流体とともに回転することを示している。この定常運動からあずかてもみだされると、 $\lambda > 0$ のばあいには自励的に回転が成長することがわかる。(8.6)から見られるように、'仮想慣性モーメント' は $-2\pi\rho a^4$ であってマイナスの値をとることが注目される。しかし、風車のような空気中の運動では、 ρ が小さいために、これは I に比べて無視できるであろう。そうすると、 $\lambda > 0$ は $m < 0$ に対応することになり、すいこみを設けた平板の自励的な回転が結論されるのである。

III. 渦の力学

9. 基礎方程式

縮まない流体の運動は

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\operatorname{grad} H + \mathbf{N} + \nu \Delta \mathbf{v} \quad (9.2)$$

で支配される。(9.1) は連続方程式、(9.2) は運動方程式である。ここで

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 + \Omega, \quad (9.3)$$

$$N = \nabla \times \omega. \quad (9.4)$$

ν は運動粘性率である。(9.2) の rot をとると渦度方程式

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot} N + \nu \Delta \omega \quad (9.5)$$

が得られる。いま

$$f_{ij} = v_i v_j - \frac{1}{2} q^2 \delta_{ij} \quad (9.6)$$

とおけば

$$N_i = -\partial_p f_{ip} \quad (9.7)$$

のように表わされる。

10. 仮想運動量と仮想角運動量

渦の系の運動を議論するにあい、直観的には運動量や角運動量の保存法則が成り立つように考えられる。しかし、無限にひろがる領域については、厳密な意味では運動量や角運動量は定義されないのである。実際、領域 V を占める流体の運動量は

$$P = \rho \iiint_V v \, dV \quad (10.1)$$

によって定義されるが

V を無限にひろがる領域とすると、この積分は一般には存在しないのである。この事実は Tollmien [8] によって注意された。たとえば、流速が無限遠で $v = O(\frac{1}{r^3})$ のようにふるまうならば、(10.1) の積分は領域 V の無限領域への近づく方に依存する。2重あき出しによる速度が正にこの性質をもち、物体の運動によってひきおこされる流れや渦の系による流れの場合がその例である。

このような難点を避けるために、かつて筆者は‘仮想運動量’と‘仮想角運動量’の概念を提案した [3]。これらは

$$\mathcal{P} = \rho \iiint_V v \, dV - \frac{\rho}{2} \iint_S r \times (v \times n) \, dS \quad (10.2)$$

$$= \frac{\rho}{2} \iiint_V r \times \omega \, dV - \frac{\rho}{2} \iint_B r \times (v \times n) \, dS, \quad (10.3)$$

$$\mathcal{L} = \rho \iiint_V r \times v \, dV + \frac{\rho}{2} \iint_S r^2 v \times n \, dS \quad (10.4)$$

$$= -\frac{\rho}{2} \iiint_V r^2 \omega \, dV + \frac{\rho}{2} \iint_B r^2 v \times n \, dS \quad (10.5)$$

で定義される。

B は物体表面、 S は物体をとり囲む任意の閉曲面である (図 9)。

(10.2), (10.4) の表式から $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ がそれぞれ運動量および角運動量の性質をもつことが認められ

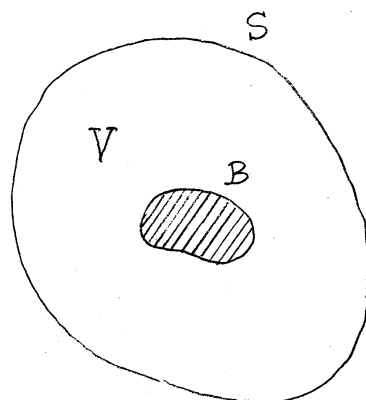


図 9

るだろう。とくに物体が存在せず，流れの中に渦の分布だけがあるばあいには，(10.3)，(10.5) は

$$\rho = \frac{\rho}{2} \iiint_V \mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega} \, dV, \quad (10.6)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{\rho}{2} \iiint_V r^2 \boldsymbol{\omega} \, dV \quad (10.7)$$

$$= \frac{\rho}{3} \iiint_V \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \, dV \quad (10.8)$$

となる。渦の分布が有限の領域に限られているばあいには， ρ ， $\mathcal{L}$ は $\boldsymbol{\omega}$ に関する積分として明確に定義できる。（ $\boldsymbol{\omega}$ の分布が無遠慮までひろがっているばあいでも， $r \rightarrow \infty$ のとき適当な割合で減少すればよい。）

[定理] 無限にひろがる縮まない流体では，粘性の有無に関せず，仮想運動量と仮想角運動量は保存する。すなわち

$$\dot{\rho} = 0, \quad \dot{\mathcal{L}} = 0. \quad (10.9)$$

証明は下の 12 で与える。

11. 渦輪

渦度が集中して孤立した渦系をつくるばあいを考えよう。

（渦系が閉曲線になるばあいが渦輪である。） 渦系に沿う線要素を $d\mathbf{r}$ ，渦系の断面積を σ とすると，(10.6)，(10.7)

の積分で

$$\omega dV = \omega \sigma dr = \Gamma dr \quad (11.1)$$

と書きかえることができる (図10).

ただし, $\omega = |\omega|$ は渦度の大きさ,

$\Gamma = \omega \sigma$ は渦糸の強さである.

したがって, (10.7), (10.8) は

それぞれ

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \rho \Gamma \int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r}, \quad (11.2)$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \rho \Gamma \int_C r^2 dr \quad (11.3)$$

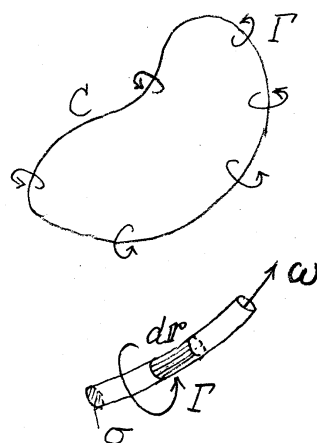


図10

となる.

ところが Stokes の公式により

$$\int_C \mathbf{r} \times d\mathbf{r} = 2 \iint_S d\mathbf{S} = 2\mathbf{S} \quad (11.4)$$

と変形できる. S は C を縁とする開曲面で $d\mathbf{S} = n dS$ である.

また $\mathbf{S} (S_x, S_y, S_z)$ は渦輪 C を座標平面に射影して得られる図形の面積 (符号も考える) を成分とするベクトルである.

(図11) したがって (11.2) は

$$\mathcal{P} = \rho \Gamma \mathbf{S} \quad (11.5)$$

となる. つまり, 渦輪はその射影面積に比例する仮想運動量

をもつのである。

つぎに

$$\begin{aligned}\int_C r^2 d\mathbf{r} &= -2 \iint_S \mathbf{r} \times d\mathbf{S} = -2 \iint_S \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ dS_x & dS_y & dS_z \end{vmatrix} \\ &= -2 \left\{ S_x(z_x \hat{j} - y_x \hat{k}) + S_y(x_y \hat{k} - z_y \hat{i}) \right. \\ &\quad \left. + S_z(y_z \hat{i} - x_z \hat{j}) \right\}\end{aligned}$$

と書ける。ただし、たとえば (y_x, z_x) は C の yz 平面への射影図形の重心の座標である。これを (11.3) に代入し、かつ (11.5) を使えば

$$\mathcal{L} = P_x(z_x \hat{j} - y_x \hat{k}) + P_y(x_y \hat{k} - z_y \hat{i}) + P_z(y_z \hat{i} - x_z \hat{j}) \quad (11.6)$$

となる。これは仮想角運動量が“渦輪の射影図形の重心に射影面積に比例する運動量が集中する”として計算されることを示すものである(図11)。

とくに ρ の方向に

x 軸をとると

$$S_y = S_z = 0$$

となるから、単に射影図形 S_x の重心に運動量 $\rho I S_x$ が集中していると

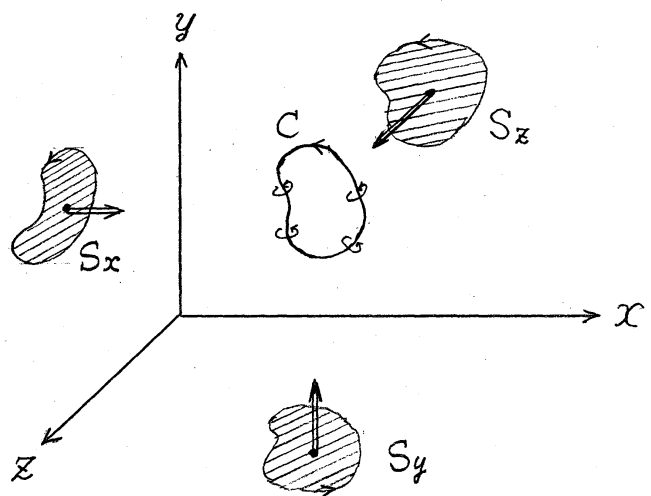


図 11

考えればよいことになる。 ρ と $\mathcal{L}$ は時間的に一定不変であるから、 “ S_x の重心の位置も不変である ”。

完全流体では渦輪の強さ Γ は一定不変であるから、 ρ と $\mathcal{L}$ の保存をつぎのように幾何学的なことはで表現することができる。

[定理] 渦輪を任意の方向に射影した図形の面積は時間的に不変である。 適当な方向への射影では射影図形の重心も不変である。 それが渦輪の仮想運動量の方向である。

この定理は渦輪の実験を行なうことによって検証されるであろう。 また、たとえば渦輪の数値実験の精度を確かめるのに役立つものと期待される。

多数の渦環から成る系については、 ρ と $\mathcal{L}$ の保存の法則は

$$\rho = \sum_i \rho_i = \text{const}, \quad \mathcal{L} = \sum_i \mathcal{L}_i = \text{const} \quad (11.7)$$

の形に表わされる。 これも実験結果の解析や数値実験の検証に利用できるだろう。

12. 渦度のモーメント R_{ij}, T_{ijk}

仮想運動量 ρ と仮想角運動量 $\mathcal{L}$ の定義式 (10.6), (10.7) に示唆されて、渦度 ω の 1 次および 2 次のモーメントをつ

ぎのよう に定義する。

$$R_{ij} = \iiint_V x_i \omega_j dV, \quad (12.1)$$

$$T_{ijk} = \iiint_V x_i x_j \omega_k dV. \quad (12.2)$$

定義から

$$R_{ij} = -R_{ji}, \quad T_{ijk} = T_{jik} \quad (12.3)$$

であることがただちにわかる。(R_{ij} については部分積分を利用する。) また, $\mathcal{P}(P_x, P_y, P_z)$, $\mathcal{L}(L_x, L_y, L_z)$ は R_{ij} , T_{ijk} を使って

$$P_i = \frac{\rho}{2} \varepsilon_{ijk} R_{jk}, \quad \rho R_{jk} = \varepsilon_{ijk} P_i \quad (12.4)$$

$$L_i = \rho T_{i\alpha\alpha} = -\frac{\rho}{2} T_{\alpha\alpha i} \quad (12.5)$$

のように表わされる。したがって $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ の諸性質は R_{ij} , T_{ijk} のそれから導かれることがわかる。

まず, 時間的变化を考えよう。

$$\begin{aligned} \dot{R}_{ij} &= \iiint_V x_i \dot{\omega}_j dV \\ &= \iiint_V x_i (\text{rot } N)_j dV + \nu \iiint_V x_i \Delta \omega_j dV \quad \because (9.5) \end{aligned}$$

ところが

$$\begin{aligned}
\iiint_V x_i (\text{rot } N)_j dV &= \varepsilon_{j\rho q} \iiint_V x_i \partial_\rho N_q dV \\
&= \varepsilon_{j\rho q} \iiint_V \{ \partial_\rho (x_i N_q) - \delta_{ip} N_q \} dV \\
&= -\varepsilon_{jiq} \iiint_V N_q dV = \varepsilon_{jiq} \iiint_V \partial_\rho f_{q\rho} dV \quad \because (9.7) \\
&= 0. \tag{12.6}
\end{aligned}$$

ただし、部分積分 (Green の公式) により

$$\iiint_V \partial_\rho (\cdots) dV = 0 \tag{12.7}$$

が成り立つことを利用する。また

$$\begin{aligned}
\iiint_V x_i \Delta \omega_j dV &= \iiint_V x_i \partial_\rho \partial_\rho \omega_j dV \\
&= \iiint_V \{ \partial_\rho (x_i \partial_\rho \omega_j) - \delta_{ip} \partial_\rho \omega_j \} dV \\
&= 0.
\end{aligned}$$

したがって

$$\dot{R}_{ij} = 0. \tag{12.8}$$

これを (12.4) に代入して

$$P = \text{const} \tag{12.9}$$

が得られる。 T_{ijk} について同様の計算をすると

$$\dot{T}_{ijk} = \varepsilon_{\alpha jk} F_{i\alpha} - \varepsilon_{i\alpha k} F_{j\alpha} \tag{12.10}$$

が得られる。ただし

$$F_{\alpha\beta} = \iiint f_{\alpha\beta} dV = \iiint (v_\alpha v_\beta - \frac{1}{2} q^2 \delta_{\alpha\beta}) dV \quad (12.11)$$

とおく。(12.10)を j, k について縮約すると, $F_{\alpha\beta}$ が対称テンソルであることを考慮して

$$\dot{T}_{i\beta\beta} = 0, \quad (12.12)$$

また i, j について縮約すると

$$\dot{T}_{\beta\beta k} = 0 \quad (12.13)$$

が得られる。したがって (12.5) により

$$\mathcal{L} = \text{const} \quad (12.14)$$

である。これで仮想運動量と仮想角運動量の保存が証明された。

13. R_{ij}, T_{ijk} の意味

渦度分布が与えられると流速 V はベクトル・ポテンシャル A を使ってつぎのように表わされる (図12).

$$V = \text{rot } A, \quad A = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega_q}{r_{qP}} dV_q \quad (13.1)$$

$$\vec{OP} = \mathbf{r}, \quad \vec{OQ} = \boldsymbol{\xi}$$

$$r_{QP} = |\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|$$

$r \rightarrow \infty$ での流れの様子を考える。

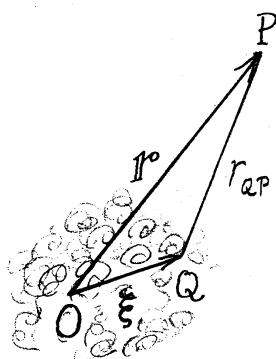


図 12

$$\frac{1}{r_{QP}} = \{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2\}^{-1/2}$$

$$= \frac{1}{r} - \xi_\alpha \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2} \xi_\alpha \xi_\beta \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{1}{r} \right) - \dots \quad (13.2)$$

これを (13.1) に代入すれば

$$A_i = -\frac{1}{4\pi} \left\{ R_{\alpha i} \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} T_{\alpha\beta i} \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \right\} \quad (13.3)$$

したがって

$$\begin{aligned} v_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= -\frac{1}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \left\{ R_{\alpha k} \partial_j \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{2} T_{\alpha\beta k} \partial_j \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \right\} \end{aligned} \quad (13.4)$$

すなわち、遠方の流れは渦無しである。

その速度ポテンシャルを Φ とすれば

$$\mathbf{v} = \text{grad } \Phi, \quad \Phi = B_\alpha \partial_\alpha \left(\frac{1}{r} \right) + C_{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \left(\frac{1}{r} \right) + \dots \quad (13.5)$$

$B_\alpha, C_{\alpha\beta}, \dots$ は原点におかれた 2 重おき出し, 4 重おき出し, ... の強さを表す。

(13.4) と (13.5) を比較すればつぎの関係が得られる。

$$B_i = \frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ijk} R_{jk} = \frac{1}{4\pi\rho} P_i, \quad (13.6)$$

$$C_{\alpha\beta} = -\frac{1}{24\pi} (\varepsilon_{\alpha pq} T_{\beta pq} + \varepsilon_{\beta pq} T_{\alpha pq}). \quad (13.7)$$

R_{ij} , T_{ijk} を与えれば B_α , $C_{\alpha\beta}$ はきまるが、逆に B_α , $C_{\alpha\beta}$ が与えられたとき R_{ij} , T_{ijk} は決定できるだろうか？ 実は T_{ijk} はつきの小生値をもつのである。

$$\left. \begin{aligned} T_{ijk} &= T_{jik}, \\ T_{111} &= T_{222} = T_{333} = 0 \\ T_{ijj} &= -2T_{jii} \quad (i \neq j, \text{ 総和はしない}) \\ T_{123} + T_{231} + T_{312} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.8)$$

したがって独立な成分は T_{112} , T_{113} , T_{221} , T_{223} , T_{331} , T_{332} , T_{123} , T_{231} の8個である。(13.7) はもうすこし具体的に

$$\left. \begin{aligned} C_{ii} &= -\frac{1}{12\pi} \varepsilon_{ijk} (T_{ijk} - T_{ikj}), \\ C_{ij} &= -\frac{1}{8\pi} \varepsilon_{ijk} (T_{kii} - T_{kjj}) \quad (i \neq j) \end{aligned} \right\} \quad (13.9)$$

と書ける。ここでは同じ添字について総和しない。(13.9)

と(12.5)を T_{ijk} について解くと

$$T_{123} = -4\pi(C_{11} - C_{22}), \text{ etc} \quad (13.10)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{122} \\ T_{133} \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} L_1 \mp 4\pi C_{23}, \text{ etc} \quad (13.11)$$

が得られる。etc は添字を循環的にかえて得られる式を意

味する。

14. 渦の中心

(i) Saffman の定義

円輪形の渦輪の進行速度を求めるために Saffman [7] は「渦の中心」vorticity centroid という概念を導入した。これは渦度 ω の分布から

$$\rho^2 \ast = \frac{\rho}{2} \iiint_V [\rho \cdot (r \times \omega)] r dV, \quad (14.1)$$

$$\rho = \frac{\rho}{2} \iiint_V r \times \omega dV \quad (14.2)$$

によって計算される $\ast$ として定義される。Saffman は「試行錯誤的に」この定義を得たといっているが、その根拠は明らかでない。しかもこの定義にはつぎのような難点がある。座標原点を O から O' に移して (14.1) を計算すると渦の中心が前とは異なる位置に現われる。渦の中心は渦度分布によって確定すべきものであるから、これは (14.1) の定義の不合理であることを示すものと考えられる。

(ii) 有限の領域を占める任意の渦度分布に対して、遠方では流れは、(13.4), (13.5) の示すように、原点 O におか

れた2重わき出し, 4重わき出し, ... によるものと考えてもよい。原点を O から O' に移してもこの事情は変わらないが, 4重わき出しの強さ $C_{\alpha\beta}$ は変化する。(2重わき出しの強さ B_{α} は変化しない!) そこで $C_{\alpha\beta}$ ができるだけ簡単な形をとるような点 O' を求めると, それがあつた意味で‘渦の中心’とよぶべき性格をそなえていると考えられるだろう。このような立場で議論を進める。

(iii) 座標原点の移動による R_{ij} , T_{ijk} の変化

$$\vec{OO'} = \xi, \quad \vec{OP} = \mathbf{r}, \quad \vec{O'P} = \mathbf{r}'$$

とする(図13)。

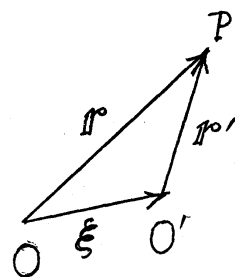


図 13

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \iiint x_i \omega_j dV \\ &= \iiint (x'_i + \xi_i) \omega_j dV \\ &= \iiint x'_i \omega_j dV + \xi_i \iiint \omega_j dV \\ &= R_{ij}^{(0)} \quad \because \iiint \omega_j dV = 0 \end{aligned}$$

ただし添字⁽⁰⁾は点 O' に関する量であることを示す。したがって

$$R_{ij} = R_{ij}^{(0)} \quad (14.3)$$

であつて, R_{ij} は座標原点の選び方によらない。

同様にして

$$T_{ijk} = T_{ijk}^{(0)} + R_{jkl} \xi_i + R_{ikl} \xi_j \quad (14.4)$$

が得られる。これを (13.7) に代入すれば

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}^{(0)} - \frac{1}{8\pi\rho} (P_\alpha \xi_\beta + P_\beta \xi_\alpha) + \frac{1}{12\pi\rho} (\rho \cdot \xi) \delta_{\alpha\beta} \quad (14.5)$$

となる。いま

$$C_{i\alpha}^{(0)} P_\alpha = 0 \quad (14.6)$$

となるような ξ を求めよう。その ξ を $\mathbb{X}$ と書くことにすれば

$$X_i = - \frac{8\pi\rho}{\rho^2} C_{i\alpha} P_\alpha + \frac{2\pi\rho}{\rho^4} C_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta P_i. \quad (14.7)$$

$C_{\alpha\beta}$ に (13.7) の関係式を代入して整理すると

$$\begin{aligned} \mathbb{X} = & \frac{1}{\rho^2} \rho \times \mathcal{L} - \frac{\rho\rho}{6\rho^4} \iiint (\rho \cdot \mathbf{r}) \{ \rho \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \} dV \\ & + \frac{2\rho}{3\rho^2} \iiint (\rho \cdot \mathbf{r}) (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) dV \end{aligned} \quad (14.8)$$

このように定義される $\mathbb{X}$ が座標原点の選び方によらないことは容易に確かめられる。この $\mathbb{X}$ を ‘渦の中心’ とよぶことにしよう。

さて $\mathcal{L}$ は座標原点に関する仮想角運動量である。渦の中心に関するものを $\mathcal{L}^{(0)}$ と書くことにすると

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} &= \mathcal{L} - \mathbf{X} \times \mathbf{P} \\
&= \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathcal{L})}{\rho^2} \rho + \frac{2\rho}{3\rho^2} \iiint (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \{ \mathbf{P} \times (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\omega}) \} dV.
\end{aligned}
\tag{14.9}$$

これは‘固有角運動量’に相当する。つまり，“任意の渦分布は渦の中心に集中した運動量 ρ と渦の中心のまわりの固有角運動量をもつ”と考えられるのである。とくに渦度が集中して渦輪をつくるばあいについては，“渦輪の固有角運動量は 0 である”ことが証明される。

つぎに渦の中心の速度を求めよう。(13.7), (12.10) を使って計算すれば

$$\begin{aligned}
\dot{C}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{24\pi} (\varepsilon_{\alpha p q} \dot{T}_{\beta p q} + \varepsilon_{\beta p q} \dot{T}_{\alpha p q}) \\
&= -\frac{1}{12\pi} (3F_{\alpha\beta} - F_{pp} \delta_{\alpha\beta})
\end{aligned}
\tag{14.10}$$

が得られる。さらに, (14.7) を時間について微分し, (14.10) を代入すれば

$$\dot{X}_i = \frac{2\rho}{\rho^2} F_{i\alpha} P_\alpha - \frac{\rho}{2\rho^4} (F_{\alpha\beta} P_\alpha P_\beta + F_{pp} \rho^2) P_i \tag{14.11}$$

が得られる。

テンソル $F_{\alpha\beta}$ は

$$F_{\alpha\beta} = \iiint (v_\alpha v_\beta - \frac{1}{2} q^2 \delta_{\alpha\beta}) dV = \iiint x_\alpha N_\beta dV \quad (14.12)$$

の2通りの形に表わされる。 $N = V \times \omega$ であるから、渦度分布が狭い領域に限られているばあい、たとえば渦輪などの計算には才2の形式が便利である。なお、才1の形式からただちに、運動エネルギー K が $F_{\alpha\beta}$ を使ってつぎのように表わされる。

$$K = \frac{\rho}{2} \iiint_V q^2 dV = -\rho F_{pp}. \quad (14.13)$$

ρ と $\mathcal{L}$ は粘性の有無に関せず保存されるが、これに反して K は粘性によって減衰する。 K と類似の性格をもつ $F_{\alpha\beta}$ も粘性流体では時間的に変化する。したがって、粘性流体では渦の中心の速度 $\dot{*}$ は一般に時間とともに変化する。 $\rho = \text{const}$ から $\dot{*} = \text{const}$ が結論されないことに注意すべきである。

ここで提案した‘渦の中心’の定義を渦輪のばあいに適用すると種々興味ある結果が得られるが、それらについては別の機会に報告するつもりである。

参考文献

- [1] Lamb, H.: Hydrodynamics (Cambr. Univ. Press, 1932), pp. 232~233
- [2] 今井 功: 流体力学 (前編) (裳華房, 1973)
- [3] 今井 功: “仮想質量と仮想運動量 — 渦運動への応用”
日本物理学会第29回年会予稿集4 (1974/10),
pp. 14~16
- [4] 今井 功: “風呂桶の渦巻”, 自然 35巻4号 (1980/4),
pp. 100~103
- [5] 今井 功: 数理解析研講究録 510 (1984), pp. 1~16
- [6] Kida, S.: J. Phys. Soc. Japan 50 (1981), pp. 3517~20
- [7] Saffman, P. G.: Studies in Appl. Math. 49 (1970),
pp. 371~380
- [8] Tollmien, W.: ZAMM 18 (1938), pp. 151~154
- [9] Villat, H.: Lecons sur la théorie des tourbillons
(Gauthiers-Villars, 1930), pp. 187~198