

Euler の恒等式と有限古典群

上智大・理工 篠田健一

Ken-ichi Shinoda

次の恒等式は Euler により示されたものとして、良く知られている [Hardy - Wright, Theory of Numbers, Chap. 19]:

$$(GL) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2 \cdots (1-x^m)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1},$$

$$(U) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4) \cdots (1-x^{2m})} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2n+1}),$$

$$(Sp) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2+m)}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^m)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n),$$

$$(O) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2-m)}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^m)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^n).$$

これらの恒等式が有限古典群の数え上げの問題として、以下のように解釈できることを示すことが、この講演の一つの目的である。

V を有限体 $\mathbb{F}$ 上の n 次元ベクトル空間とし、 $G \in V$ に自然に作用している有限古典群とする。 $G = GL(V)$, $Sp(V)$ または $O(V)$ のとき $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ とし、 $G = U(V)$ のとき $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{q^2}$ とする。さらに、 $\mathcal{L}(V)$ で V の部分空間全体のなる lattice を表し、また $g \in G$ に対し、 $V^g = \{v \in V \mid gv = v\} = \text{Ker}(g-1)$, $W \in \mathcal{L}(V)$ に対し、 $D_G(W) = \{g \in G \mid V^g = W\}$ とおく。

問題 1. $d_G(W) := |D_G(W)|$ を求めよ。

G は $\mathcal{L}(V)$ に自然に作用しており、 $W \in \mathcal{L}(V)$ の G -軌道 $[W]$ と表すとき、どのような場合でも $\text{Stab}_G(W) = \{g \in G \mid gW = W\}$ はよく解るので、 $D_G([W]) = \{g \in G \mid V^g \in [W]\}$ とおくと、問題 1 は次の問題 2 と同値である。

問題 2. $d_G([W]) := |D_G([W])|$ を求めよ。

この問題に対し、 $\mathcal{L}(V)$ 上の変数の逆転公式、 G の部分群 $\text{Stab}_G(W)$ などの性質を用い、きつい形式で答えることができる。特に

$$\begin{aligned} d_G(m) &= \sum_{W \in \mathcal{L}(V), \dim W = m} d_G(W) \\ p_n^{(G)}(m) &= |G|^{-1} d_G(m) \\ p_\infty^{(G)}(m) &= \lim_{n \rightarrow \infty} p_n^{(G)}(m) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ここで } (G) \text{ は } G \text{ のタイプ} \\ GL, U, Sp, O \text{ のいずれか} \\ \text{を表す。} \end{array} \right)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \text{定理} \quad p_\infty^{GL}(m) &= \frac{x^{m^2}}{(x)_m^2} (x)_\infty, \quad p_\infty^U(m) = \frac{x^{m^2}}{(x^2)_m} \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2n+1})^{-1}, \\ p_\infty^{Sp}(m) &= \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2+m)}}{(x)_m} \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n)^{-1}, \quad p_\infty^O(m) = \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2-m)}}{(x)_m} \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^n)^{-1}. \end{aligned}$$

ここで $x = q^{-1}$ であり、 $(x)_m = (1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)$ である。

従って冒頭の恒等式は $x = q^{-1}$ のとき $\sum_{m=0}^{\infty} p_\infty^{(G)}(m) = 1$

と同値である。詳細は次の論文で発表予定。

A. Rudvalis - K. Shinoda, On portions of some subgroups in finite classical groups (in preparation).