

Nonlinear Evolution Equations and Solitons in Spin Systems

京工総大 エ 芸 武野正三

古典的スピニ系には色々なタイプのソリトニ明非線型波動が存在する。こニイハ、空間ニ次エ、ニ次エの場合の等オハイゼンベルグ模型におヨる vortex 解, kink 解, 同様な場合のXYスピニ系におヨる vortex 解につまふれる。また空間一次エの場合のIsingスピニ系, おまびXYスピニ系の moving kink 解にもふれる。Isingスピニ系の場合, 高次エも考察する。

§1. Introduction

こニイハ、次の三つのスピニ模型を考察する。

$$(i) \quad H \equiv H(\{\vec{S}_n\}) = - \sum_{nm} J(n, m) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_m \quad \text{等オハイゼンベルグ模型}$$

$$(ii) \quad H = -\epsilon \sum_n S_n^z - \sum_{nm} J(n, m) (S_n^x S_m^x + S_n^y S_m^y) \quad \text{XY 模型}$$

$$(iii) \quad H = -\epsilon \sum_n S_n^z - \sum_{nm} J(n, m) S_n^x S_m^x \quad \text{Ising 模型}$$

古典的スピニ系は、各格子点で定義されているスピニベクトル $\vec{S}_n$ の成分 S_n^α ($\alpha=x, y, z$) が

$$(S_n^x)^2 + (S_n^y)^2 + (S_n^z)^2 = S^2 \quad S: \text{主数} \quad (1.1)$$

の関係をみたし、 S_n^α の従ふ運動方程式が

$$\dot{S}_n^\alpha = -\{S_n^\alpha (\partial H / \partial S_n^z) - S_n^z (\partial H / \partial S_n^\alpha)\} \text{ etc.} \quad (1.2)$$

と与えられることにより、その非線型波動の問題が数学的に導入される。ちなみに、量子力学的には、模型 (i), (ii), (iii) は、空間一次元、最近接相互作用の場合、所謂 Bethe ansatz および Jordan-Wigner 変換により問題が exact に解ける例となっていることは、リリトニの問題が注目をあびる遑か 1.1 前より知られていた事であるが、このような exact solution とリリトニはどのような関係にあるかという問題は別の観点から興味のある所であるが、ここではふれる余裕はない。

(1.1) より S_n^α は二つの回転角 θ_n, φ_n により parametrize される:

$$S_n^x = S \sin \theta_n \cos \varphi_n, \quad S_n^y = S \sin \theta_n \sin \varphi_n, \quad S_n^z = S \cos \theta_n. \quad (1.3)$$

また、問題に依り、次の stereographic variable μ_n を導入することが便利である。

$$\mu_n = \tan(\theta_n/2) e^{i\varphi_n}. \quad (1.4)$$

(1.3)より運動方程式(1.2)は、次の形の θ_n, φ_n に対する運動方程式に reduce される

$$\dot{\theta}_n = (1/S \sin \theta_n) \partial H / \partial \varphi_n, \quad \dot{\varphi}_n = -(1/S \sin \theta_n) \partial H / \partial \theta_n \quad (1.5)$$

同様に μ_n について成り立つ式は

$$i\dot{\mu}_n = [(1+|\mu_n|^2)^2 / 2S] \partial H / \partial S_n^* \quad (1.6)$$

となる。以下では、模型 (i), (ii), (iii) について、連続体近似を用いて、微差分方程式(1.5), (1.6)を微分方程式に reduce し、それ等の解のあり方につき論ずることにする。

§2. 二次元, 三次元の場合の等角ハイゼンベルグ模型

このとき, θ, φ について成り立つ微分方程式は次の形となる:

$$\dot{\theta} = -2 \cos \theta \nabla \theta \cdot \nabla \varphi - \sin \theta \Delta \theta \quad (2.1a)$$

$$\sin \theta \dot{\varphi} = \Delta \theta - \sin \theta \cos \theta (\nabla \varphi)^2 \quad (2.1b)$$

あるいは $i\dot{\mu} = [2\mu^* / (1+|\mu|^2)] (\nabla \mu)^2 - \Delta \mu. \quad (2.2)$

(ただし, 変数 x, y, z, t は適当に re-scale してある。)

空間一次元の場合, (2.1) $\sim$ (2.2) は nonlinear Schrödinger eq. と同等であることが示さね¹⁾ ところの¹⁾ この場合にはふたなり。空間二次元, 三次元の場合, ここでは static eqs., すなわち, (2.1), (2.2) において $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = \dot{\mu} = 0$ とおいた場合の解に

のみ注目する。この方程式は, $\partial H / \partial \varphi_m = 0$, $\partial H / \partial \theta_m = 0$ および $\partial H / \partial \mu_m^* = 0$ より得られるものであり, エネルギーの local minimum state を与えることに注目する。すると, static な解として次の二つの型のものが興味あるものとして考えられる:

a) vortex 解

$$\theta = \theta(r) \quad \text{and} \quad \varphi = \delta \phi \quad (\delta = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.3)$$

b) uniform-flow 解

$$\vec{v} \equiv \nabla \varphi = \text{const.} = \vec{v}_0 \quad (\vec{v} = \text{速度ベクトル}) \quad (2.4)$$

ここに, r, ϕ は二次元の場合の極座標, r, ϕ, z は三次元の場合の円柱座標である。以下, a), b) の場合につき別々に論ずることにする。

a) vortex 解

(2.1b) は次の形をとる。

$$r(d/dr)(r d\theta/dr) - \delta^2 \sin \theta \cos \theta = 0. \quad (2.5)$$

$r = \ln R$ とおけば, (2.5) は一次元の static sine-Gordon eq. となる。その一般的な周期解は

$$\cos \theta = k \operatorname{sn}(\ln r^\delta; k) \quad \text{with} \quad \varphi = \delta \phi \quad (2.6)$$

となる。modulus k は $k = (1+c)^{1/2}$ に c を積分定数と関係づける。 $k=1$, $k=0$ の場合 (2.6) は

$$\theta = 2 \tan^{-1}(r^\delta) \quad (k \rightarrow 1), \quad \theta = \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 \quad (k \rightarrow 0) \quad (2.7)$$

となり、最初のものが sine-Gordon eq. の kink 解に対応すること注意到す。

空間=次元の場合、(2.1) に対してより一般的な vortex 解が存在する。(2.19) with $\dot{\theta} = 0$ に対して

$$\Delta \varphi = 0 \quad (2.8)$$

を要求する。すると $\theta_x \varphi_x + \theta_y \varphi_y = 0$ ($\theta_x \equiv \partial \theta / \partial x$ etc.) が必要。

$$\theta_x = -f \varphi_y, \quad \theta_y = f \varphi_x \quad (2.9)$$

とおくことができる。 f は θ のみの関数とみなし、(2.16) with $\dot{\varphi} = 0$ に代入すると

$$f = (a^{-2} \theta + C)^{1/2}, \quad (C: \text{積分定数}) \quad (2.10)$$

が得られる。複素数 $z = x + iy$ を導入すると、(2.8) の解 ($\text{mod } 2\pi$) は

$$\varphi = \sum_i \delta_i \tan^{-1}[(y - y_i)/(x - x_i)] = \sum_i \delta_i \arg(z - z_i) \quad (2.11)$$

で与えられる。ここに $\delta_i = \pm 1, \pm 2, \dots$, x_i, y_i は定数であり、vortex の位置を与える。いま、流体力学的に対応から

$$\varphi_x = \psi_y, \quad \varphi_y = -\psi_x \quad (2.12)$$

に於て流線の関数 ψ を導入すると θ についての解は

$$\cos \theta = k \operatorname{sn}(\psi; k) \quad (2.13)$$

を与えることを示すことが出来る。これは前と同様に、 $k = (1 + \epsilon)^{1/2}$ を与える。 (2.11), (2.13) は (2.1) の static vortex 解を与える。これは (2.6) の拡張であり, multi-vortex 解である。 (2.13) は $k = 1, 0$ の特別な場合に対して

$$\theta = \begin{cases} 2 \tan^{-1} \psi & \text{for } k=1 \\ \pi/2 \text{ or } 3\pi/2 & \text{for } k=0 \end{cases} \quad (2.14a)$$

$$(2.14b)$$

となり, (1.4) で定義される stereographic variable で表わす

$$\mu = \begin{cases} \prod_i (z - z_i)^{\delta_i} & \text{for } k=1 \\ \prod_i [(z - z_i)/(z - z_i^*)]^{\delta_i/2} & \text{for } k=0 \end{cases} \quad (2.15a)$$

$$(2.15b)$$

となる。このようにして与えられる multi-vortex 解は、通常の非線形波動の場合の multi-soliton solution と異なった形をしており、ここに注目する。また, (2.15) で $\delta_i = \pm 1$ のものは、エネルギーの最も低い渦の励起に対応し、このようなものが物理的に観点から興味がある。この時、このような解は、色量子力学 (quantum chromodynamics or QCD) における instanton 解と対応する種の対応があり、そのような解は場の理論でも最近注目されている。尚、系のエネルギー密度 (Hamiltonian functional) を

$$H/S = \int d\vec{r} \, \tilde{H}(\vec{r}) \quad (2.16)$$

を定義すると, (2.11), (2.13) を与える解は

$$\bar{H}(\vec{r}) = 2dn^2(\psi; k)(\nabla\psi)^2 \quad (2.17)$$

を与える,

$$\bar{H}(\vec{r}) = \begin{cases} [2\operatorname{sech}^2\psi](\nabla\psi)^2 & \text{for } k=1 \\ 2(\nabla\psi)^2 & \text{for } k=0 \end{cases} \quad (2.18a)$$

$$(2.18b)$$

となり, $k=1$ の場合, (2.14a) から分かるように, vortex 解は空間的にエネルギーの局在した状態に対応し, "定常意味" のリットルと呼べるものと考へておいてあろう。

b) uniform-flow 解

(2.4) における constant vector $\vec{v}_0$ を次の形にとる:

$$\vec{v}_0 = v_0 \hat{z} \quad (v_0: \text{定数}) \quad (2.19)$$

ここには, $\hat{z}$ は z 軸方向の単位ベクトルである。すると (2.19)

より $\theta_2 = 0$ となり, (2.16) with $\dot{\varphi} = 0$ は

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = v_0^2 \sin \phi, \quad \phi = 2\theta \quad (2.20)$$

となり, static な二次元の sine-Gordon eq. に reduce される。空間が二次元でスピニが yz -面内に配列しているとき、(2.20) は一次元の sine-Gordon eq. であり,

$$\theta = 2 \tan^{-1}(e^{\pm v_0 \gamma}) \quad \text{with } \varphi = v_0 z + \varphi_0 \quad (2.21)$$

$\varphi_0: \text{定数}$

となる。空間三次元の場合, (2.20) のものの特解を求め
るのがあるが、これは既に広田に²⁾ 得られている。²⁾ 11す、

$$\theta = 2 \tan^{-1}(g/f) \quad \text{with} \quad \varphi = v_0 z + \varphi_0 \quad (2.22)$$

とおく、その解は 3-soliton solution として求まる。³⁾

$$f = 1 + a_{23} e^{\gamma_2 + \gamma_3} + a_{31} e^{\gamma_3 + \gamma_1} + a_{12} e^{\gamma_1 + \gamma_2} \quad (2.23a)$$

$$g = e^{\gamma_1} + e^{\gamma_2} + e^{\gamma_3} + a_{23} a_{31} a_{12} e^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} \quad (2.23b)$$

となる。ここに

$$\gamma_i = v_0 (k_i x + l_i y), \quad a_{ij} = \frac{(k_i - k_j)^2 + (l_i - l_j)^2}{(k_i + k_j)^2 + (l_i + l_j)^2} \quad (2.24a)$$

$$\text{with} \quad k_i^2 + l_i^2 = 1 \quad (2.24b)$$

で与えられる。

尚 §2 を終るに当り, (2.2) の static form は軸対称
重力場を記述する Ernst eq.³⁾

$$(|\zeta|^2 - 1) \Delta \zeta = 2 \zeta^* (\nabla \zeta)^2 \quad (2.25)$$

と analogous な形を (7.11) にも注意しておく。

§3 XY-模型

この場合は、便利な場の量として

$$\psi_n \equiv (S_n^x + i S_n^y) / S \quad (3.1)$$

を導入する。連続体近似の下では、 ψ のみに対する微分方程式は一般に

$$i \dot{\psi} (1 - |\psi|^2)^{-1/2} = (2/S) \delta H / \delta \psi^* \quad (3.2)$$

で表わされる。(3.2) に対応 (7 次式) を導入する:

$$i \dot{\psi} = (2/S) \delta H / \delta \psi^* \quad (3.3)$$

(3.3) で記述される場を *analogous to complex scalar field* と呼ぶことにしよう。すなわち、XY-模型の場合、(3.2), (3.3) はそれぞれ変数を適当に rescale すると、

$$i \dot{\psi} (1 - |\psi|^2)^{-1/2} = \psi (1 - |\psi|^2)^{-1/2} (1/\lambda) - \psi - \Delta \psi \quad (3.4a)$$

$$i \dot{\psi} = (1/\lambda) \psi (1 - |\psi|^2)^{-1/2} - \psi - \Delta \psi \quad (3.4b)$$

with $\lambda = 2S \sum_m J(m, m) / \epsilon$ (3.5)
の形になる。(3.4b) は $(1 - |\psi|^2)^{-1/2}$ を $|\psi|^2$ にマクローラン展開する

と

$$i \dot{\psi} + [1 - (1/\lambda)] \psi + \Delta \psi - (1/2\lambda) |\psi|^2 \psi = 0 \quad (3.6)$$

を *nonlinear Schrödinger eq.* に reduce する。 $\lambda > 1$ のときは、(3.6) は

$$\psi = [1 - (1/\lambda^2)]^{1/2} e^{i\varphi_0} \quad (\varphi_0 = \text{定数}) \quad (3.7)$$

$\lambda > 1$

と与えられる nontrivial な解を持つ。このとき、場は、“対称性の破れた基底状態”を持ち、(3.6) は一次元の場合、dark-soliton 解と与えられる非線型 Schrödinger eq. となる。(3.4), (3.5) は、(3.6) と異なり $\psi(1-|\psi|^2)^{-1/2}$ と与えられる非線型性を持つ新しいタイプの非線型発展方程式である。

空間一次元の場合、(3.4), (3.5) 式は、 θ, φ につき

$$\gamma \dot{\theta} = -2 \cos \theta \theta_x \varphi_x - \sin \theta \varphi_{xx} \quad (3.8a)$$

$$\gamma \sin \theta \dot{\varphi} = -(1/\lambda) \sin \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \theta_{xx} - \sin \theta \cos \theta (\varphi_x^2 + \theta_x^2) \quad (3.8b)$$

with

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for } E_\beta(3.4a) \\ \cos \theta & \text{for } E_\beta(3.4b) \end{cases} \quad (3.9a)$$

$$(3.9b)$$

の形をとる。

$$\theta = \theta(x-vt) \equiv \theta(\xi), \quad \varphi = \varphi(x-vt) \equiv \varphi(\xi) \quad (3.10)$$

$v = \text{定数}$

の形の特解を求めると、それは

$$\cos \theta = A \cos \mathcal{A} \quad \text{with} \quad A = \begin{cases} (1-v^2)^{1/2} & \text{for } E_\beta(3.4a) \\ 1 & \text{for } E_\beta(3.4b) \end{cases} \quad (3.11)$$

1° 定義される $\mathcal{A}$ により.

$$\mathcal{A} + 2 \cot \mathcal{A}_0 \tanh^{-1} [\cot(\mathcal{A}_0/2) \tan(\mathcal{A}/2)] = \pm (\alpha - vt) \quad (3.12)$$

$$\varphi = \begin{cases} vA \int \frac{\cos \mathcal{A}_0 - \cos \mathcal{A}(\xi)}{1 - A^2 \sin^2 \mathcal{A}(\xi)} d\xi + \varphi_0 & \text{for } E_0 (3.4a) \quad (3.13a) \\ (v/2)(\alpha - vt) + \varphi_0 & \text{for } E_0 (3.4b) \quad (3.13b) \end{cases}$$

1° 与えらる. $\alpha = 1$

$$\begin{cases} A \cos \mathcal{A}_0 = 1/\lambda, & \text{for } E_0 (3.4a) \\ \cos \mathcal{A}_0 = 1/[1 + (v/2)^2] & \text{for } E_0 (3.4b) \end{cases} \quad (3.14)$$

1° 与えらる. (3.12), (3.13) は symmetry-breaking solution に $\alpha = \pm \infty$ 1° reduce する one-kink solution である. two-soliton or multi-soliton solution があるか否かは、まだよく分らない。

空間 2 次元, 3 次元の場合、我々は static solution のみに着目する. このとき, (3.4a), (3.4b) は同一の形になる

$$\Delta \psi + \psi - (1/\lambda) \psi (1 - |\psi|^2)^{-1/2} = 0 \quad (3.15)$$

に reduce される. (2.3) の場合と全く同じ形の解, 即ち one-vortex 解を考察する. このとき,

$$\psi = \sin \theta(r) e^{i\delta\phi} \equiv F(r) e^{i\delta\phi} \quad (3.16)$$

とおくと, $F(r)$ につき次の式は

$$(1/r)(d/dr)(r d/dr)F - \{1 - (\delta^2/r^2)\}F - (1/\lambda)F/(1-F^2)^{1/2} = 0 \quad (3.17)$$

となる。この式は、解析的に解くことは出来ないが、次の境界条件

$$F(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r=0 \\ [1 - (1/\lambda^2)]^{1/2} & \text{for } r=\infty \end{cases} \quad (3.18a)$$

$$(3.18b)$$

を満たす解の $r \rightarrow 0$ と $r \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$F(r) = \begin{cases} c r^{\delta} & \text{for } r \rightarrow 0 \quad (3.19a) \\ [1 - (1/\lambda^2)]^{1/2} - (\delta^2/\lambda)(\lambda^2 - 1)^{-1/2}(1/r^2) & \text{for } r \rightarrow \infty \quad (3.19b) \end{cases}$$

となる。

$$\varphi = \delta\phi \quad (3.20)$$

と共に (3.19) は one-vortex 解を与える。模型 (I) の場合と同様に, (3.15) 式に対して multi-vortex 解を求めることは興味あることであるが、まだ成功していない。

§ 4. Ising 模型

この場合, 便利な場の量として

$$p_n \equiv S_n^x / S \quad (4.1)$$

を選ぶのがよりこゝが分かる。すると, 前の場合と同様, 連続体近似の下で, (I.2) 式は (I.3) は次の形の微分方程式をみたす:

$$\Delta p - (1/\lambda)[(\ddot{p}/\epsilon^2) + p][1 - p^2 - \dot{p}^2/\epsilon^2]^{-1/2} = -p \quad (4.2)$$

(4.2) に対して

$$\Delta p - (1/c^2)\ddot{p} = -p + (1/\lambda)p(1 - p^2)^{-1/2} \quad (4.3)$$

$c = \lambda\epsilon^2$

を考察する。(3.2) と (3.3) 式は (3.4a) と (3.4b) の場合と同様に, (4.3) で記述される場を (4.2) に対する real scalar field と呼ぶことにする。static な場合, 即ち $\dot{p} = \ddot{p} = 0$ の場合, (4.2) と non linear Klein-Gordon eq. の形を持つ (4.3) は同一の形の式

$$\Delta p + p - (1/\lambda)p(1 - p^2)^{-1/2} = 0 \quad (4.4)$$

に reduce されることに注意する。 p は空間座標の関数であるが, (3.15) と全く同一の形を持つことに注意する。

空間一次元の場合, (3.7) と同様 nontrivial uniform

solution

$$\rho = \pm [1 - (v/\lambda)^2]^{1/2} \equiv \pm \rho_0, \quad \lambda > 1 \quad (4.5)$$

に於いて, 次の境界条件

$$\rho = \pm \rho_0 \text{ for } x \rightarrow \pm \infty \text{ or } \rho = \mp \rho_0 \text{ for } x = \pm \infty \quad (4.6)$$

をみたす解は, $\rho(x, t) = \rho(x - vt)$ (v : 定数) の形を仮定すると

$$\phi = \sin^{-1}(\rho/A), \quad \phi_0 = \sin^{-1}(\rho_0/A) \quad (4.7)$$

with

$$A = \begin{cases} (1 - v^2/\lambda^2 c^2)^{1/2} & \text{for } E_0(4.2) \\ 1 & \text{for } E_0(4.3) \end{cases} \quad (4.8a)$$

$$\text{に於いて.} \quad (4.8b)$$

$$\phi + 2 \cot \phi_0 \tanh^{-1} [\cot(\phi_0/2) \tan(\phi/2)] = \pm \gamma(x - vt) \quad (4.9)$$

の形をとる。ここに

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{for } E_0(4.2) \\ [1 - (v^2/c^2)]^{-1/2} & \text{for } E_0(4.3) \end{cases} \quad (4.10a)$$

$$(4.10b)$$

は "Lorentz contraction factor" である。(4.9) は縮退した対称性の破れた基底状態 $\rho = \pm \rho_0$ の間を結ぶ kink 解である。(4.2), (4.3) の場合との相違は, 前者の場合, (4.8), (4.7) から分かるように, スピンの縮みが起る。後者の場合, 長さの縮みが起ることである。尚, (4.9) は (3.12) と全く同一の形をなす。

7113 に注目する。一次元の場合, (4.2) 式は (4.3) の two-soliton 解, multi-soliton 解があるか否かは興味ある問題の一つである。また, (3.6) の場合と同様に, (4.3), (4.4) において非線形項 $(1/\lambda) P(1-P^2)^{-1/2}$ を $(1/\lambda) \{P + (1/2)P^2\}$ と近似すると, 例えは (4.3) は

$$\Delta P - (1/c^2) \ddot{P} = -[1 - (1/\lambda)]P + (1/2\lambda)P^3 \quad (4.11)$$

$\lambda > 1$

となり, これは ϕ^4 -field theory に現われる式となっている。

Ising 模型に analogous な real scalar field equation (4.3) は, 空間次元 n の場合も, 其鳴リト二解多リト二解を持つていることを示すことができる(勿論, これは普通の意味での多リト二解ではなく, この特殊な解については, 通常の逆散乱手法が適用されるものに対応している)。 (4.3) を次の形の一般的な non-linear Klein-Gordon equation に書き直す:

$$\Delta P - P_{tt} = dV(P)/dP \quad (4.12)$$

$$V(P) = -(1/2)P^2 - (1/\lambda)(1-P^2)^{1/2} \quad (4.13)$$

ただし, 前と同様, 変数は適当に rescale がある。 $P = P(x, y, z, t)$ が次の式を満たす g のみの関数とする。

$$\square g = g \quad \text{and} \quad (\tilde{\nabla} g)^2 = g^2 \quad (4.14)$$

∴ に,

$$\square = \Delta - (\partial/\partial t)^2, \quad (4.15)$$

$$(\tilde{\nabla} g)^2 = (\partial g/\partial x)^2 + (\partial g/\partial y)^2 + (\partial g/\partial z)^2 - (\partial g/\partial t)^2 \quad (4.16)$$

734 (4.12) は

$$(dP/dg)g + (d^2P/dg^2)^2 = dV/dP \quad (4.17)$$

となる。

$$f = \ln g \sim g = e^f \quad (4.18)$$

とあや は, (4.17) を 1 回 積分 すると

$$(dP/df)^2 = 2V(P) + C \quad (4.19)$$

となる。∴ に, C は 積分 定数 である。-1, (4.14) より g は

$$g \square g - (\tilde{\nabla} g)^2 = 0 \sim (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2 - D_t^2)g \cdot g = 0 \quad (4.20)$$

を満たす。∴ に, $D_x^2 F \cdot F$ は

$$D_x^2 F \cdot F = \left[(\partial/\partial x) - (\partial/\partial x') \right]^2 F(x) F(x') \Big|_{x=x'} \quad (4.21)$$

で定義される 4 元 の D-operator である。(4.20) は

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(\theta_i) \quad (4.22)$$

$$\theta_i = k_i x + l_i y + m_i z - \omega_i t \quad (4.23)$$

(k_i, l_i, m_i, ω_i : 定数)

の形の解は

$$k_i^2 + l_i^2 + m_i^2 - \omega_i^2 = 1 \quad (4.24)$$

$$(k_i - k_j)^2 + (l_i - l_j)^2 + (m_i - m_j)^2 - (\omega_i - \omega_j)^2 = 0 \quad (4.25)$$

の条件の下で持つことを示すことができる。(4.13)を(4.19)に代入すると、(4.9)に analogous な解は

$$\phi + 2 \cot \phi_0 \tanh^{-1} [\cot(\phi_0/2) \tan(\phi/2)] = \ln \left(\sum_{i=1}^N e^{i\theta_i} \right) \quad (4.26)$$

となる。 $N=1$ の場合、(4.26)は(4.9)に reduce する。(4.24), (4.25)より、(4.26)は共鳴ソリトン解と等価である。この議論の正しい解は、空間2次元以上の場合でのみ実現される。

§5 結論

古典的スピニ系は、一次元における通常のソリトン解の他に、空間2次元、三次元の場合、vortex 解を持つ。多岐にわたる非線形波動が存在することを示した。尚、模型(i)の外に、次の系

$$H = - \sum_{n,m} J(n,m) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_m - \sum_n \{ K_1 (S_n^x)^2 + K_2 (S_n^y)^2 + K_3 (S_n^z)^2 \} \quad (5.1)$$

$K_1 < K_2 < K_3$ は正数

の系も、空間一次元の場合、完全積分系となることが示されている。空間二、三次元の場合、別な型の非線型波動が存在することは、模型 (i), (ii), (iii) との類推から予想されるであろう。模型 (i), (ii), (iii) および (5.1) で示される系等は、元素、物理における磁性の問題について現われ来るが、数学者には、他の問題、例えば、色んな場を記述する方程式と対応を持つている。このような意味で、古典的スピン系における各種の非線型波動が、他の field における場の方程式のソリトン解とどのように関連するか、また、問題を量子力学の面からみて、量子系における一次元の場合の厳密解と古典的なソリトン解との関連等を調べることは興味あることの一つであるように思われる。

References

- 1) M. Lakshmanan, Phys. Letters 61A(1977)53;
V. E. Zakharov and L. A. Takhtajan, Theor. and Math. Phys. 38(1979), 17.
- 2) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan 35(1973), 1566.
- 3) H. J. Ernst, Phys. Rev. 167(1968), 1175.