

関数の C^0 -同値について

兵庫教育大学 小池 敏司 (Satoshi Koike)

本稿では関数の C^0 -同値に関して最近得た結果と、それら周辺の関連する結果のまとめを述べる。§0 で本稿に必要な記号・定義をまとめて述べ、§1 では実関数、§2 では複素関数に関する結果を扱う。最近の結果の証明は与えないが(命題2以外は小池[14]にある)、証明に必要な道具は〔〕の中で述べておいた。

§0. 準備.

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。

記号.

$E_{[\mathbb{K}]}(n, l) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の C^l 級関数芽全体の作る集合 ($l = 1, 2, \dots, \infty$) 。

$P_{[\mathbb{K}]}(n, l) : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ となる次数 l 以下の多項式全体の作る集合 ($l = 1, 2, \dots$) 。

$\mathcal{H}(n, 1) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ の正則関数芽全体の作る集合.

$J^r(n, 1)$ (又は $J_{\mathbb{R}}^r(n, 1)$) : $\mathcal{E}_{[\mathbb{R}]}(n, 1)$ (又は $\mathcal{P}_{[\mathbb{R}]}(n, 1)$)

の中の関数の r -jet 全体の作る集合 ($k \geq r$).

$J_{\mathbb{C}}^r(n, 1) : \mathcal{H}(n, 1)$ の中の関数の r -jet 全体の作る集合.

$\mathcal{E}_n : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ の C^∞ 級関数芽のなす環.

$\mathfrak{m}_n : \mathcal{E}_n$ の極大イデアル.

$\mathcal{H}(n) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \mathbb{C}$ の正則関数芽のなす環.

定義 1. (1) $f, g \in \mathcal{E}_{[\mathbb{R}]}(n, 1)$ (又は $\mathcal{P}_{[\mathbb{R}]}(n, 1)$) が C^0 -同値であるとは、局所同相写像 $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在して

$$f = g \circ \sigma$$

となる時いう.

(2) $f, g \in \mathcal{H}(n, 1)$ が C^0 -同値であるとは、局所同相写像 $\sigma : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ が存在して

$$f = g \circ \sigma$$

となる時いう.

(3) $f, g \in \mathcal{E}_{[\infty]}(n, 1)$ が C^∞ -同値であるとは、 C^∞ 級局所微分同相写像 $\sigma : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在して

$$f = g \circ \sigma$$

となる時いう.

定義 2. (1) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ が C^0 -sufficient in $E_{[k]}(n, 1)$ (resp. $P_{[k]}(n, 1)$) ($k \geq r$) であるとは、 $j^r f(0) = j^r g(0) = w$ となる任意の $f, g \in E_{[k]}(n, 1)$ (resp. $P_{[k]}(n, 1)$) が C^0 -同値の時いう。

(2) r -jet $w \in J_c^r(n, 1)$ が C^0 -sufficient in $\mathcal{N}(n, 1)$ であるとは、 $j^r f(0) = j^r g(0) = w$ となる任意の $f, g \in \mathcal{N}(n, 1)$ が C^0 -同値の時いう。

(3) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ が C^∞ -sufficient in $E_{[\infty]}(n, 1)$ であるとは、 $j^r f(0) = j^r g(0) = w$ となる任意の $f, g \in E_{[\infty]}(n, 1)$ が C^∞ -同値の時いう。

注意. jet の "sufficiency" という概念は、関数に対しては "r-既定" という概念で定義される。特に (3) は元来 E_n の元に対して定義されたもの ([23]) で、同値関係にも定数項のズラシが関係してくるが、その度に断ち切って使用するのには面倒なので、ここでは全て $E_{[\infty]}(n, 1)$ の中で話を進める。

jet と代表元についての使い方に関し、あまり細い神経を使い過ぎると設定の所ばかり長くなるので、これ以後 r -jet と次数 r を越えない多項式代表元を同一視して用いることにする。

$w \in J_{\mathbb{K}}^r(n, 1)$ としよう。ここで gradient についての Łojasiewicz 不等式に関する次の条件を考える：

(L₁) ; ある数 $C, \alpha > 0$ が存在して

$$|\text{grad } w(x)| \geq C|x|^{r-1}$$

が、 $|x| < \alpha$ となる任意の $x \in \mathbb{K}^n$ に対し成立する。

(L₂) ; ある数 $C, \alpha, \delta > 0$ が存在して

$$|\text{grad } w(x)| \geq C|x|^{r-\delta}$$

が、 $|x| < \alpha$ となる任意の $x \in \mathbb{K}^n$ に対し成立する。

更に、 $w \in J_{\mathbb{K}}^r(n, 1)$ に対しては、 ε_m の極大イデアル m_m に関する次の条件も考える：

$$(\vee) ; \quad m_n^r \subseteq m_n \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n} \right)_{\varepsilon_m} + m_n^{r+1}.$$

$f \in \mathcal{H}(n)$ に対し、 f の Milnor number μ を次のように定義する：

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(n) \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

$w \in J_{\mathbb{K}}^r(n, 1)$ に対し、

$$F(a; x) = w(x) + \sum_{|\alpha|=r} a_{\alpha} x^{\alpha}$$

とおく。この時、係数空間はある $\mathbb{K}^N$ と自然に同一視される

($\{(\dots a_\alpha \dots)\} \cong \mathbb{K}^N$). 従って、

$$F : (\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^N, 0) \longrightarrow (\mathbb{K}, 0)$$

と考えられる. $a = (\dots a_\alpha \dots) \in \mathbb{K}^N$ に対し、

$$H_a(x) = \sum_{|\alpha|=r} a_\alpha x^\alpha$$

とおく。

補題 1. $w \in \mathcal{J}_{\mathbb{K}}^r(n, 1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) (L_1) .

(2) ある数 $\varepsilon > 0$ と 0 の $\mathbb{K}^N$ の中における近傍 $\mathcal{U}$ が存在して、

$$|\text{grad}(w + H_a)(x)| \neq 0$$

が、 $0 < |x| < \varepsilon$ となる任意の $x \in \mathbb{K}^n$ と任意の $a \in \mathcal{U}$ に対し成立する。

[(1) $\Rightarrow$ (2) は明らか。 (2) $\Rightarrow$ (1) は計算による。]

注意. (2) は無限個の条件であるが $|x|$ の位数に関する情報を含んでいない。一方、(1) は 1 つの条件であるが、 $|x|$ の位数を含んだ条件なのでより強い情報を持つ。従って (1) $\Rightarrow$ ($\dots$), ($\dots$) $\Rightarrow$ (2) という形で用い易い。

定義 3. (1) r -jet $w \in \mathcal{J}_{\mathbb{K}}^r(n, 1)$ が 次数 r で C^0 -安定 (又

は、局所 C^0 $(r-1)$ -既定) とは、 0 の $\mathbb{K}^N$ の中の近傍 U が存在して、任意の $a \in U$ に対し w と $w+Ha$ とが C^0 -同値になる時いう。

(2) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ が次数 r で C^∞ -安定 (又は、局所 $(r-1)$ -既定) とは、 0 の $\mathbb{R}^N$ の中の近傍 U が存在して、任意の $a \in U$ に対し w と $w+Ha$ とが C^∞ -同値になる時いう。

X, Y を $\mathbb{K}^n$ の部分多様体、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時は C^1 級、 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時は C^ω 級とする。更に $X \cap Y = \emptyset$, $\bar{X} \supset Y$, $y_0 \in \bar{X} \cap Y$ としよう。

定義 4. (1) 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で Ratio Test (R) を満たすとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $\mathbb{K}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して

$$\frac{d(T_x X, T_y Y) |x - y_0|}{|x - y|} < \varepsilon$$

が、任意の $x \in X \cap U$, $y \in Y \cap U$ に対し成立する時いう。

(2) 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で (w) -regularity を満たすとは、ある数 $C > 0$ と $\mathbb{K}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して

$$d(T_x X, T_y Y) < C |x - y|$$

が、任意の $x \in X \cap U$, $y \in Y \cap U$ に対し成立する時いう。

注意. 定義より明らかに $(w) \Rightarrow (R)$ である。(R) は Kuo [20]

(w) は Verdier [33] で導入された条件である。

A を $\mathbb{K}^n$ の中の $X \cup Y$ の近傍とし、 $f: A \rightarrow \mathbb{K}^p$ を $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の時は C^1 級、 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ の時は C^ω 級の写像とする。更に $f|_X: X \rightarrow \mathbb{K}^p$, $f|_Y: Y \rightarrow \mathbb{K}^p$ は *constant rank* とする。

定義 5. 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で condition (af) を満たすとは、 y_0 に収束する X の任意の点列 $\{x_i\}$ に対し、 $\ker d(f|_X)_{x_i}$ がある平面 K に収束するならば $K \supset \ker d(f|_Y)_{y_0}$ が成立する時いう。

定義 6. ここでは $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ の場合だけを考える。

(1) 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で condition (af) を満たすとは、 y_0 で $f|_Y$ の fiber と横断的に交わる $\mathbb{R}^n$ の任意の C^1 部分多様体 S に対し、 $\mathbb{R}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して、任意の $x \in X \cap U$ で S と $f|_X$ の fiber は横断的である時いう。

(2) 対 (X, Y) が $y_0 \in Y$ で (3.1) を満たすとは、 y_0 を含む leaf が y_0 で $f|_Y$ の fiber と横断的に交わるような、 y_0 の近傍で定義された任意の局所 C^1 foliation $\mathcal{F}$ に対し、 $\mathbb{R}^n$ の中の y_0 の近傍 U が存在して、任意の $x \in X \cap U$ で $\mathcal{F}$ の leaf と $f|_X$ の fiber は横断的である時いう。

注意. $p = 0$ の時、即ち $\ker d(f|_X)_{x_i} = T_{x_i} X$, $\ker d(f|_Y)_{y_0} = T_{y_0} Y$ の時、Thom condition (af) は Whitney condition (a)

となり、condition (A_f) は Thom の横断性に関する condition (A) となる。

補題 2. (小池 [13], Trotman [30], [32])

$K = \mathbb{R}$ の時、条件 (A_f) と (A¹) は同値である。

§ 1. 実関数の場合.

(1) C^0 同値.

$w \in J^r(n, 1)$ に対し、§ 0 で定義した多項式

$$F: (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$$

を思い起こそう。今、

$$X = F^{-1}(0) - \{0\} \times \mathbb{R}^N, \quad Y = \{0\} \times \mathbb{R}^N, \quad Z = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N - \{0\} \times \mathbb{R}^N$$

とおく。

定理 A. (Kuiper-Kuo [18], [19], Bochnak-Tojasiewicz [3], Kuo-Lu [21], Brodersen [6])

$w \in J^r(n, 1)$ に対し、次の各グー-7° (I), (II) における条件は同値である。

(I) (1) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ は C^0 -sufficient in $E_{cr}(n, 1)$.

(2) (L₁).

(3) 対 (X, Y) は、 $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ で Whitney condition (b) を満たす。

(4) 対 (X, Y) は、 $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ で Ratio Test を満たす。

(5) 対 (X, Y) は、 $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ で condition (w) を満たす。

(II) (1) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ は、 C^0 -sufficient in $\Sigma_{CR+1}(n, 1)$ 。

(2) (L_J) 。

(3) 対 (Z, Y) は、 $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ で condition (t_F) を満たす。

(4) 対 (X, Y) は、 $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ で Whitney condition (a) を満たす。

(5) 対 (X, Y) は、 $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ で condition (t) を満たす。

注意. (II) の条件 (4), (5) の同値性は [21] の中で示されたものだが、証明に "gap" が有り "open problem" である。但し、 $(2) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (5)$ は成立している。右側 $\Leftrightarrow$ については、下の命題 1 の注意を参照すること。

命題 1. $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とする。この時、次の条件は同値である。但し、 $K = \mathbb{C}$ の時の Y, Z も $K = \mathbb{R}$ と同様のものとする。

(1) (L_1) 。

(2) 対 (Z, Y) は、 $0 \in K^n \times K^N$ で condition (a_F) を満たす。

[(1) $\Rightarrow$ (2): kernel の条件を gradient を用いて書き変える。]

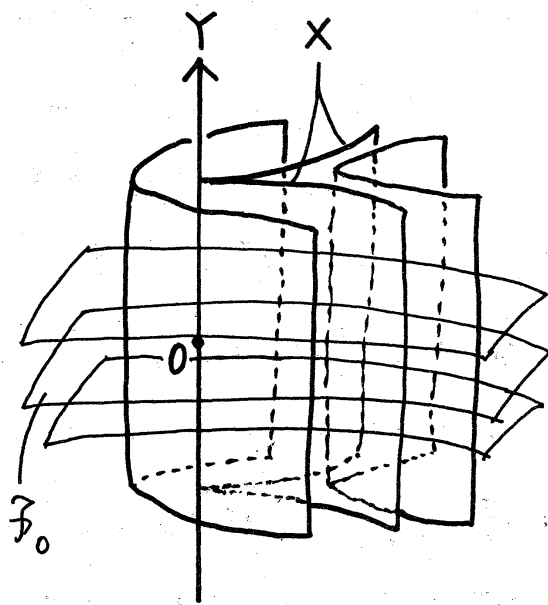
(2) $\Rightarrow$ (1) : 補題 1 と curve selection lemma [24] を用いる。

注意. $\mathbb{R}$ -subanalytic の場合、(a) $\Leftrightarrow$ (b) である (Trotman [29])。同じく $\mathbb{R}$ -subanalytic の場合に同様の議論を用いて、Trotman は [32] の中で $(a_f) \Leftrightarrow (b_f)$ を証明している。しかし、この場合同様の議論はうまく行かず、結果自体正しくない。定理 A、命題 1 より、今我々の考えている特殊な algebraic な場合には、 (a_f) 、 (b_f) はそれぞれ不等式を伴う系係 (L_1) 、 (L_2) と同値であり、又 C^r 級、 C^{r+1} 級関数に対する C^0 -sufficiency にも同値である。つまり、ある種の "対比" をなしている。

定理 A、命題 1、補題 2 より、 C^0 -sufficiency に関する次の定理を得る：

定理 1. $w \in J^r(n, 1)$ とし、

予を $0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ を含む leaf $\mathcal{F}_0$ が 0 で Y と横断的に交わるような $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ の中の 0 の近傍で定義された局所 C^1 foliation とする。上のような任意の C^1 foliation 予に対し、ある $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$ の中の 0 の近傍 U が存在して、



F の level surface からの任意の leaf (resp. F_0) と $\Sigma \cap U$ の中で横断的である条件は、 r -jet $w \in J^r(n,1)$ が C^0 -sufficient in $\mathcal{E}_{[r]}(n,1)$ (resp. $\mathcal{E}_{[r+1]}(n,1)$) と同値である。(つまり、今の場合の C^0 -sufficiency は、 F の leaf の横断性のみで特徴付けられる。)

Kuo [19]、Chang-Lu [8] の議論を用いることにより、 $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ の時、 $w \in J_K^r(n,1)$ に対し $\tau(L_1) \Rightarrow w$ は次数 r で「 C^0 -安定」は容易にわかる。逆、即ち同値は成立するだろうか？この節では $K = \mathbb{R}$ の場合のみについて述べる。 $K = \mathbb{C}$ の場合は次節に委ねる。

例. (Kucharz)

(E-1) $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 - 3x_1x_2^5 + x_3^3$ ([16]) とする。

$u = j^6 h$ は C^0 -sufficient in $\mathcal{E}_{[6]}(3,1)$... (i),

$w = j^7 h$ は C^0 -sufficient in $\mathcal{E}_{[7]}(3,1)$ でない ... (ii).

(E-2) $w = x^3 + 3x^3y^3 + 3xy^{10} \in J''(2,1)$ ([17]) とする。

w は C^0 -sufficient in $\mathcal{E}_{[13]}(2,1)$,

w は C^0 -sufficient in $\mathcal{E}_{[12]}(2,1)$ でない。

主張. ある r -jet $w \in J^r(n,1)$ とある整数 $s \geq 1$ が存在して、 w は C^0 -sufficient in $\mathcal{P}_{[r+s]}(n,1)$ であるが C^0 -sufficient

in $\mathcal{E}_{\text{tr+s}}(n,1)$ でないとする。その時、ある k -jet $v \in J^k(n,1)$ が存在して、 v は次数 k で C^∞ -安定だが、 (L_1) は満たさない。
 [証明は小池-Kucharz [15] と似た議論を用いる。]

次数 r で C^∞ -安定だが (L_1) を満たさない例。

(E-1) : (i) より w は次数 7 で C^∞ -安定。

(ii) と定理 A より、 w は (L_1) を満たさない。

(E-2) : 主張より、ある k -jet $v \in J^k(2,1)$ でそのような例が存在する。厳密には、ある 2 変数 12 次の齊次多項式 H が存在して

$$v = x^3 + 3x^3y^3 + 3xy^{10} + H \in J^{12}(2,1)$$

とおく時、 v は次数 12 で C^∞ -安定だが (L_1) を満たさない。

従って、 $w \in J^r_{\mathbb{R}}(n,1)$ に関して次の事が自然に問題になる。

問題 1. "次数 r で C^∞ -安定" の特徴付けを見つけよ !!

その第一歩として、

問題 2. 次数 r で C^∞ -安定なら孤立特異点を持つか?

[2] C^∞ -同値.

補題 3. (Martinet, 泉屋) $w \in J^r(n,1)$ に対し、次の条

件は同値である。

(1) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ は C^∞ -sufficient in $\Sigma[\infty](n, 1)$ 。

(2) 任意の $z \in \pi_{r+1}^{-1}(w)$ が条件 (V) を満たす。

但し、 $\pi_{r+1} : J^{r+1}(n, 1) \rightarrow J^r(n, 1)$ は自然な射影とする。

定理 B. (Stefan) $w \in J^r(n, 1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) r -jet $w \in J^r(n, 1)$ は次数 r で C^∞ -安定。

(2) w は条件 (V) を満たす。

注意. $\pi_r^{-1}(\pi_r^{-1}(w)) \cong \mathbb{R}^N$ と同視しよう。この時、集合

$$\{v \in \mathbb{R}^N \mid v \text{ は条件 (V) を満たさない.}\}$$

は $\mathbb{R}^N$ の代数的集合、従って閉集合である。この事実から、

Mather の有名な "有限既定性" に関する論文 [23] と全く平行な議論で定理 B は直ちにわかる。

補題 3、定理 B については [25] も参照のこと。

補題 3 と定理 B より、

系. r -jet $w \in J^r(n, 1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) $w \in J^r(n, 1)$ は C^∞ -sufficient in $\Sigma[\infty](n, 1)$ 。

(2) $w \in J^r(n, 1)$ は C^∞ -sufficient in $\text{Per}[r+1](n, 1)$ 。

注意. この系は C^0 -同値の主張に対応している。

次に条件 (V) と (L_1) , (L_5) の関係について次を得る。

命題 2. $w \in J^r(n, 1)$ に対し、次の事実が成立する。

- (1) 条件 (V) を満たすならば、条件 (L_1) を満たす。
- (2) $w \in J^r(n, 1)$ が C^∞ -sufficient in $E_{[\infty]}(n, 1)$ でも条件 (L_1) を満たさないものが存在する。
- (3) $w \in J^r(n, 1)$ が C^∞ -sufficient in $E_{[\infty]}(n, 1)$ ならば、条件 (L_5) を満たす。

- (1) 計算により示される。
 - (2) 条件 (V) は満たさないが 4-既定である Siersma [26] による例、 $w = x^3 - 3xy^3 \in J^4(2, 1)$ がこの例となっている。
 - (3) (1) と補題 3 より。

§ 2. 複素関数の場合.

{1} C^0 -同値.

定理 C. (Chang-Lu [8], Bochnak-Kucharz [2], Teissier [28])

$w \in J_{\mathbb{C}}^r(n, 1)$ に対し、次の条件は同値である。

- (1) (L_5) .
- (2) r -jet $w \in J_{\mathbb{C}}^r(n, 1)$ は C^0 -sufficient in $\mathcal{H}(n, 1)$.

定理 A, C より、実数の場合の (L_1) , (L_2) , 複素数の場合の (L_2) は、 C^∞ -sufficiency の特徴付けになっている。一方、複素数の場合の (L_1) はどういう意味を持つだろうか。今 §1 と同様に、 $W \in J_{\mathbb{C}}^r(n, 1)$ とし

$F: (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $Y = \{0\} \times \mathbb{C}^N$, $Z = \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N - \{0\} \times \mathbb{C}^N$ とする。

定理 2. $W \in J_{\mathbb{C}}^r(n, 1)$ に対し、次の条件は同値である。

(1) (L_1) .

(2) r -jet $W \in J_{\mathbb{C}}^r(n, 1)$ は、次数 r で C^∞ -安定。

(3) 対 (Z, Y) は、 $0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^N$ で condition (A_F) を満たす。

(1) $\Leftrightarrow$ (3) は命題 1, (1) $\Rightarrow$ (2) も既に述べたように明らか。
 (2) $\Rightarrow$ (1) は Zanki 予想 (下の注意) の部分解と補題 1、
 位相不変 $\Rightarrow \mu$ -不変 (Teissier [27]) を用いて示した。
 Teissier [28] の議論を用いた証明も考えられる。

注意. (超曲面の重複度に関する Zanki 予想 [35])

「 A, B を $\mathbb{C}^n$ の超曲面とし、 $p \in A, p' \in B$ とする。 A, B が p, p' の周りで局所的に埋め込まれた超曲面として位相同型ならば、 $\text{mult}_p(A) = \text{mult}_{p'}(B)$ である。ここで $\text{mult}_*()$ は $*$ における $()$ の重複度を表わす。」

曲線の場合には、Zanki [36] によって示された。この予

想の部分解については Gau-Lipman [9] の序文, Lê-Teissier [22] を参照のこと。

$J_K^r(n,1) \subset J_K^{r+1}(n,1)$ と見ることにした時、次の事実が成立している：

(1) $w \in J_K^r(n,1)$ に対し、定理 2 より

次数 r で C^∞ -安定 $\Rightarrow$ 次数 $r+1$ で C^∞ -安定。

(2) $w \in J_R^r(n,1)$ に対し、定理 B より

次数 r で C^∞ -安定 $\Rightarrow$ 次数 $r+1$ で C^∞ -安定。

問題 3. $w \in J_R^r(n,1)$ に対し、

次数 r で C^∞ -安定 $\Rightarrow$ 次数 $r+1$ で C^∞ -安定か？

注意. 何か起こっても不思議に感じられない実数 (real) の特異点の問題だから、反例が存在するかもしれない。でも少し信じ難い。

{2} 問題.

定理 (b)-(R)-(w). 左の各正則性条件について次の関係が成立している。

(1) $\mathbb{R}$ -subanalytic の場合、

$$(w) \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \times \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} (R) \begin{array}{c} \xrightarrow{(i)} \\ \times \\ \xleftarrow{(iii)} \end{array} (b) .$$

(i) は Kuo [20]、(ii), (iii) は Brodensen-Trotman [7]

(2) $\mathbb{C}$ -analytic の場合.

$$(w) \iff (R) \iff (b).$$

(Henry-Merle [12], Teissier, Navarro; [31] も参照)

定理 (b)-(R)-(w) より、複素数の場合の (b)-regularity は実数の場合のものより強い情報を持っていることがわかる。特に超曲面の場合には、variety が囲りの level surface の情報をも支配しているのではないだろうか? (例えば $(b) \Rightarrow (a_f)$ のような!!)

問題. $F: (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ を C^∞ 関数とする。

$F^{-1}(0) = \bigcup_{i=0}^l S_i$ を Whitney stratification、但し $S_0 = F^{-1}(0) - \Sigma F$ (非特異部分) とする。この時、任意の $i=1, \dots, l$ に対し $(\mathbb{C}^n - F^{-1}(0), S_i)$ (又は $(\mathbb{C}^n - \Sigma F, S_i)$) は (a_f) -regular か?

注意. (1) 逆問題 (a_f) -regular ならば (b) -regular か、という問題は正しくない。"位相自明だから (b) -regularity を満たさない" 又 " μ -constant だから μ^* -constant ([27] を参照) でない" 例として有名な Brieskorn-Speder [4] の例

$$F(x, y, z; t) = z^5 + t y^6 z + y^7 x + x^{15}$$

が、この逆問題の反例になっている。

(2) Hamm-Lê [11] にもこの問題に関連した記述がある。

(3) 実数の場合には "bump" が起こるか、複素数の場合には起こらない。

$$f = x^2(x^2 + y^2) \text{ とする.}$$

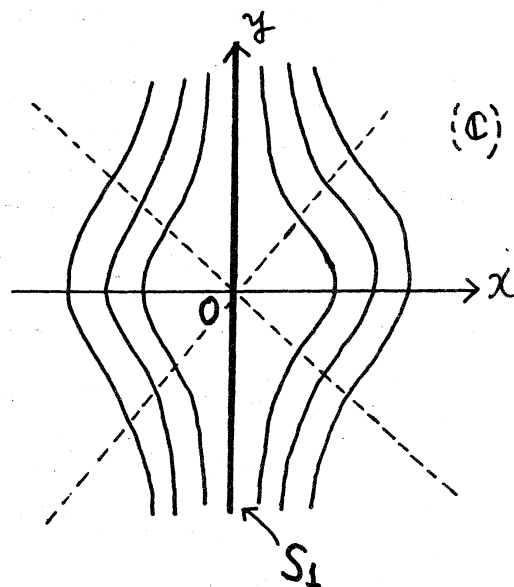
① 実数の時: $f^{-1}(0) = \Sigma f = \{y\text{-軸}\}$.

$f^{-1}(0) = \{S_1\}$; 自明な stratification.

一方、 $0 \in \mathbb{R}^2$ で (df) -regular でない。

つまり、(b) $\neq$ (af) である。

② 複素数の時: $f^{-1}(0) \supset \{y\text{-軸}\} \ni 0$ であるが、 $0 \in \mathbb{C}^2$ は実数の場合と違って y -軸の特別な点である。



(4) 関数の場合であるというのは本質的である。つまり、周りの level surface が余次元 1 という状態で支配されているのではないか?

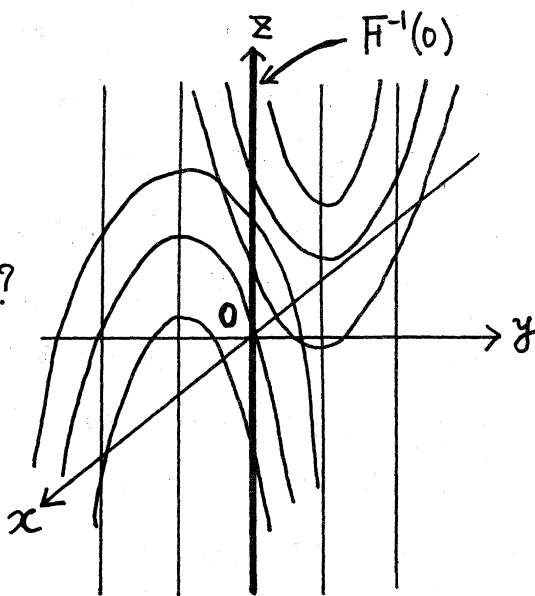
$$F: (\mathbb{C}^3, 0) \longrightarrow (\mathbb{C}^2, 0) \text{ を}$$

$$F(x, y, z) = (x, y^2 + xz)$$

で定義する。この時、右図から

わかるように、variety $F^{-1}(0)$ は

周りの level surface に今考えている意味 (level surface の並び方) では何の影響も与えていない。



References

- [1] J. Bochnak : Relèvements des jets, Lecture Notes in Math., vol. 275, pp. 106-118, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [2] J. Bochnak, W. Kucharz : Sur les germes d'applications différentiables à singularités isolées, Trans. Amer. Math. Soc. 252 (1979), 115-131.
- [3] J. Bochnak, S. Łojasiewicz : A converse of the Kuiper-Kuo theorem, Lect. Notes in Math., vol. 192, pp. 254-261, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [4] J. Briançon, J. P. Speder : La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney, C. R. Acad. Sc., Paris, 280 (1975), 365-367.
- [5] T. H. Bröcker : Differentiable germs and Catastrophes, London Math. Soc. Lect. Notes Series 17, Cambridge Univ. Press.
- [6] H. Brodersen : A note on sufficient and non-sufficient jets, J. London Math. Soc., 27(2) (1983), 167-175.
- [7] H. Brodersen, D. J. A. Trotman : Whitney (b)-regularity is weaker than Kuo's Ratio Test for real algebraic stratifications, Math. Scand. 45 (1979), 27-34.
- [8] S. H. Chang, Y. C. Lu : On C^0 -sufficiency of complex jets, Canad. J. Math. 25 (1973), 874-880.
- [9] Y. N. Gau, J. Lipman : Differential invariance of multiplicity on analytic varieties, Invent. Math. 73 (1983), 165-188.
- [10] P. Griffiths, J. Harris : Principles of algebraic geometry, J. Wiley, New York, 1978.
- [11] H. A. Hamm, Lê D. T. : Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4^e Serie t. 6 (1973), 317-366.
- [12] J. P. G. Henry, M. Merle : Limites de normales, conditions de Whitney et éclatement d'Hironaka, Proc. of Sympos. in Pure Math., 40 (1983), Part I,

575-584.

- [13] S. Koike : On condition (a_f) of a stratified mapping, Ann. Inst. Fourier 33(1) (1983), 177-184.
- [14] S. Koike : Łojasiewicz inequalities on gradient of functions, preprint.
- [15] S. Koike, W. Kucharz : Sur les réalisations de jets non-suffisants, C. R. Acad. Sc., Paris, 288 (1979), 457-459.
- [16] W. Kucharz : Examples in the theory of sufficiency of jets, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 163-166.
- [17] W. Kucharz : Letter to T. C. Kuo.
- [18] N. Kuiper : C^1 -equivalence of functions near isolated critical points, Symposium Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge 1967), Annals of Math. Studies, no. 69, pp. 199-218, 1972.
- [19] T. C. Kuo : On C^0 -sufficiency of jets of potential functions, Topology 8 (1969), 167-171.
- [20] T. C. Kuo : The ratio test for analytic Whitney stratifications, Lect. Notes in Math., vol. 192, pp. 141-149, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [21] T. C. Kuo, Y. C. Lu : Sufficiency of jets via stratification theory, Invent. Math. 57 (1980), 219-226.
- [22] Lê D. T., B. Teissier : Report on the problem session, Proc. Symp. in Pure Math. 40(2) (1983), 105-116.
- [23] J. N. Mather : Stability of C^∞ mappings. III. Finitely determined map-germs, Publ. Math. I.H.E.S. 35 (1968), 127-156.
- [24] J. Milnor : Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Math. Studies, no. 61, 1968.
- [25] T. Poston, I. N. Stewart : Catastrophe theory and its applications, Pitman, London-San Francisco-Merbourne, 1978.
- [26] D. Siersma : The singularities of C^∞ functions of right-codimension smaller or equal than eight, Indag. Math., 35(1) (1973), 31-37.

- [27] B. Teissier : Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney, Astérisque 7-8 (1973), 285-362.
- [28] B. Teissier : Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces, Invent. Math. 40 (1977), 267-292.
- [29] D. J. A. Trotman : A transversality property weaker than Whitney (a)-regularity, Bull. London Math. Soc. 8 (1976), 225-228.
- [30] D. J. A. Trotman : Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 12 (1979), 453-463.
- [31] D. J. A. Trotman : Comparing regularity conditions on stratifications, Proc. Symp. in Pure Math. 40(2) (1983), 575-586.
- [32] D. J. A. Trotman : Whitney stratifications : faults and detectors, Doctoral Thesis, Warwick (1977).
- [33] J.-L. Verdier : Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard, Invent. Math. 36 (1976), 295-312.
- [34] C. T. C. Wall : Finite determinacy of smooth map-germs, Bull. London Math. Soc. 13 (1981), 481-539.
- [35] O. Zariski : Some open questions in the theory of singularities, Bull. Amer. Math. Soc. 77 (1971), 481-491.
- [36] O. Zariski : On the topology of algebroid singularities, Amer. J. Math. 54 (1932), 453-465.