

山をすぎる二層流体の流れにおけるソリトンとトラップされた波の相互作用

京大工 船越 満明 (Mitsuaki Funakoshi)

1. はじめに

二層流体が水平スケールの大きい局在した山の上を速さ V で流れていく場合には、もし V が内部波モードの長波長極限での位相速度 c_p に近ければ、このモードの長波長の波が山によって共鳴的に励起される。さらに群速度が c_p に近い適当な波長の表面波モードの波も存在すると仮定すると、長波長の内部波モードとこの表面波モードの波束の間に共鳴的な相互作用が可能となる¹⁾。この共鳴相互作用と共鳴的な波の励起が同時に起こる場合を調べることを目的として、Funakoshi は非粘性流体の渦なし運動の基礎方程式から逡減摂動法を用いて、以下で述べる仮定の下で次の「外力項をもつ長波短波共鳴方程式」を導いた²⁾。

$$iS_T - i\lambda S_X - S_{XX} + SL = 0, \quad L_T - \lambda L_X - (|S|^2)_X + H_X = 0, \quad (1a,b)$$

ここで L は長波長内部波モードの界面変位であり、 S は短波長の表面波モードの波束の複素振幅である。また $H(X)$ は山の形を表し、 λ は V の c_p からの小さいずれを示す。また X は水平方向座標（流体は X の正方向から流れてくるものとしている）、 T は時間であり、 T と X の下つき添字は偏微分を表す。そして (1) におけるすべての変数は、(1) が簡単な値の係数をもつように、適当に無次元化されている。また (1) の導出において、 $a_s/h = O(\hat{\varepsilon})$, $a_\ell/h = O(\hat{\varepsilon}^{4/3})$, $a_b/h = O(\hat{\varepsilon}^2)$, λ_s/h , λ_ℓ/h , $\lambda_b/h = O(\hat{\varepsilon}^{-2/3})$, $(V - c_p)/\sqrt{g_0 h} = O(\hat{\varepsilon}^{2/3})$ であることを仮定している。ここで $0 < \hat{\varepsilon} \ll 1$ である。そして a_s, a_ℓ, a_b は、それぞれ短波の振幅、長波の波高、山の高さの代表値であり、 $\lambda_s, \lambda_\ell, \lambda_b$ は、それぞれ短波の波束、長波、山の代表的水平スケールである。また h は流体の厚さの代表値であり、 g_0 は重力加速度である。

(1) は、山にトラップされた波に対応する解をもつほか、底が平らなところで

は形を変えずに一定速度で伝搬するソリトン解をもつ。本論文では、遠方から伝搬してきたソリトンが山のところでトラップされた波と相互作用をしてどのような挙動を示すかを数値的、及び解析的に調べた結果を述べる。

2. トラップされた波

(1) は、山にトラップされた定常的な波に対応する解を持っている。この波は、 $S = 0$, $L = H(X)/\lambda$ の形の trapped long wave (以下では TLW と呼ぶ) と、

$$S = f(X) \exp\{i[\varphi(X) - \Omega T]\}, \quad L = g(X), \quad (2)$$

の形をもつ trapped coupled wave (以下では TCW と呼ぶ) から成る。ここで、 f , φ 及び g は

$$f(X) \rightarrow 0, \quad g(X) \rightarrow 0, \quad \text{as } X \rightarrow \pm\infty, \quad (3)$$

を満たす実関数であり、 Ω は実定数である。(2) を (1) に代入すると、

$$\varphi = -\frac{1}{2}\lambda X + \hat{X}_0, \quad f^2 - H + \lambda g = 0, \quad f'' + \frac{1}{\lambda}f^3 + \left(-\frac{1}{\lambda}H + \frac{1}{4}\lambda^2 - \Omega\right)f = 0, \quad (4a, b, c)$$

が得られる。ここで $\hat{X}_0$ は定数であり、プライムは X に関する微分を表す。境界条件 (3) と方程式 (4c) は、関数 H と λ の値が指定されたとき、 Ω を固有値とする固有値問題となり、関数 $f(X)$ と Ω はある種の shooting 法を使って計算できる²⁾。そして $g(X)$ は (4b) から計算できる。

とくに $H = \text{sech}^2 X$ によって表される対称な形の山に対する TCW の計算では、 $f(X)$ の形が一つあるいは二つのピークをもつ対称な波の他に、多数のピークをもつ波、反対称な波、非対称 (すなわち対称でも反対称でもない) の波がみつがっている²⁾。図 1 はその一例を示したもので、この場合には対称な波と反対称な波に対応する 2 つの解のブランチが存在している。さらに $\lambda > -1/2$ に対しては、対称な TCW の一つである次のような解析的な解が存在する。

$$S = \sqrt{1 + 2\lambda} \text{sech} X \exp\left\{i\left[-\frac{1}{2}\lambda X - \left(1 + \frac{1}{4}\lambda^2\right)T\right]\right\}, \quad L = -2\text{sech}^2 X, \quad (5)$$

3. 底が平らなときの定常進行波

底が平らなとき ($H \equiv 0$) には、(1)は2種類の定常進行波解を持つ。その一つは、

$$\begin{cases} S = \sqrt{2(\lambda + \tilde{p})} \tilde{q} \operatorname{sech}[\tilde{q}(X - \tilde{p}T - X_0)] \exp\{i[-\frac{1}{2}(\lambda + \tilde{p})X - \hat{\Omega}T + \psi_0]\}, \\ L = -2\tilde{q}^2 \operatorname{sech}^2[\tilde{q}(X - \tilde{p}T - X_0)], \end{cases} \quad (6)$$

によって表されるソリトンである。ここで $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, X_0 , ψ_0 は任意の実定数であり、 $\hat{\Omega} = \tilde{q}^2 - \tilde{p}^2/4 + \lambda^2/4$ である。このソリトンは、長波と短波がカップルして速さ $\tilde{p}$ で伝搬する波であり、水平スケールが $\tilde{q}^{-1}$ によって特徴づけられる。もう一つの定常進行波は、 $S = 0$, $L = \psi(X + \lambda T)$ の形に書かれる、速さ $-\lambda$ で伝搬する free long wave(以下ではFLWと呼ぶ)である (ψ は任意の関数)。

4. ソリトンとトラップされた波の相互作用

$H = \operatorname{sech}^2 X$ の形の山に対して、伝搬してくるソリトンとトラップされた波の相互作用を、(1)を差分法で解くことにより調べた。差分化においては時間も空間も中心差分を用い、主にメッシュ間隔 $\Delta X = 0.05$ と時間きざみ $\Delta T = 0.0005$ を使って、周期的境界条件のもとで計算した。

まず図2のように、 $\lambda = 1.0$ に対して、ソリトンとTLWの相互作用を調べた。入射ソリトンの $\tilde{p}$ は1.0に固定し、 $\tilde{q}$ を0.8から1.2の範囲で変えてみると、最終状態におけるソリトンの数はつねに一つであるが、その挙動は大きく二つに分けられる。すなわち $\tilde{q} \leq 1.02$ のときは、図2(a)に示したようにソリトンは山のところで反射し、同時に振幅が大きくなる。一方、 $\tilde{q} \geq 1.04$ では、図2(b)に示したように、ソリトンはほぼそのまま透過する(すなわち山を通過したあとのソリトンの $\tilde{p}, \tilde{q}$ の値は初期での値に近い)。この挙動に対する説明としては、山のところが一種のバリヤーとなっていて、入射ソリトンの短波成分のエネルギーが十分大きいと通り抜けられるが、小さいとはねかえされてしまう、ということが考えられる。ソリトンの短波成分のエネルギー ($|S|^2$ の積分) は $\tilde{q}(\lambda + \tilde{p})$ に比例するので、上の説明とつじつまが合っているが、はっきりした結論を出すた

めには他の初期条件に対する計算も必要である。またソリトンが反射されるときに増幅することは、ソリトンの短波成分のエネルギーがほぼ保存される、という数値計算での結果から説明できる。すなわち、 $\tilde{q}(\lambda + \tilde{p})$ が一定であれば、反射によって $\tilde{p}$ が正から負に変わることにより $\lambda + \tilde{p}$ は減少し、 $\tilde{q}$ は増加する。これは、(6) の形からわかるように、 S, L の振幅を増加させる。

次に、 $\lambda = -0.3$ に対してソリトンと (5) の対称 TCW の相互作用を調べた。ここで入射ソリトンの $\tilde{p}$ は 1.0 に固定し、 $\tilde{q}$ は 0.05 から 2.0 の範囲で変えた。その計算例が図 3 に示してある。この場合には最終状態におけるソリトンの数はつねに 2 であり、ソリトンの分裂がみられる。さらにソリトンの後方には L の正の部分からなる FLW が作られ、速さ $-\lambda$ で伝搬していく。また山のところでの最終状態はつねに対称 TCW に近いものであるが、初期状態 (5) とは一般に異なり、初期の $\tilde{q}$ の値に応じて図 1 の対称解のブランチ上のいろいろな点に対応する解となる。この最終的な TCW の $\tilde{q}$ に対する依存性は図 4 に示したようになっており、 $\tilde{q}$ がかなり大きいときあるいはかなり小さいときは初期の TCW に近いが、中間の $\tilde{q}$ に対しては複雑な依存性を示す。とくに $\tilde{q}$ が 0.89 や 1.20 のところでは、TLW に近い最終状態となっている（一例として図 3(b) 参照）。

5. 摂動計算

§4 で示した入射ソリトンの反射と透過を説明する目的で、Grimshaw ら³⁾ の用いた forced K-dV 方程式に対する計算方法を拡張して、以下のような摂動計算を行った。まず山が低いと仮定して、(1) で $H \rightarrow \varepsilon H$ とした

$$iS_T - i\lambda S_X - S_{XX} + SL = 0, \quad L_T - \lambda L_X - (|S|^2)_X + \varepsilon H_X = 0, \quad (7)$$

を考える。ただし、 ε は $0 < \varepsilon \ll 1$ を満たす定数である。そして、(6) のソリトン解の形を参考にして、

$$S = q(\theta, \tau, \varepsilon) \exp \left\{ i \left(-\frac{1}{2}(\lambda + v)\theta + \sigma \right) \right\}, \quad L = r(\theta, \tau, \varepsilon), \quad (8)$$

と仮定する。ここで、 q は複素数値関数、 r は実数値関数であり、 $\tau = \varepsilon T$ は引き

のばされた時間である。また θ と σ は実関数であり、(6) で $\tilde{p} \rightarrow v$, $\tilde{q} \rightarrow s$ と変えたものに対応する

$$\frac{\partial \theta}{\partial T} = -v, \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 1, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial T} = -s^2 - \frac{1}{4}(\lambda + v)^2, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial X} = 0, \quad (9)$$

を満たしているとし、かつソリトンパラメータに対応する s と v は τ の関数であると仮定する。(7) において、 $\partial/\partial T \rightarrow \partial/\partial T + \varepsilon \partial/\partial \tau$ とし、(9) を使うと、

$$s^2 q - q_{\theta\theta} + qr + \varepsilon \left(i q_\tau + \frac{1}{2} q \theta v_\tau \right) = 0, \quad (v + \lambda) r_\theta + (qq^*)_\theta + \varepsilon (-r_\tau - \hat{H}_\theta) = 0, \quad (10)$$

を得る。ここで、

$$\hat{H}_\theta = \frac{\partial}{\partial \theta} H(\theta + \Psi), \quad \Psi = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau v(\tau') d\tau' + X_0, \quad \theta = X - \Psi, \quad (11)$$

であり、 X_0 は定数である。また $*$ は複素共役を表す。従って、時刻 $T=0$ での入射ソリトンの位置を $X = X_0$ とすると、 $X = \Psi$ はソリトンの位置を示す。次に、関数 q と r を ε で展開して、

$$q(\theta, \tau, \varepsilon) = q_0(\theta, \tau) + \varepsilon q_1(\theta, \tau) + \dots, \quad r(\theta, \tau, \varepsilon) = r_0(\theta, \tau) + \varepsilon r_1(\theta, \tau) + \dots, \quad (12)$$

と置き、(12) を (10) に代入することにより、 $O(1), O(\varepsilon), \dots$ の式が得られる。その $O(1)$ の式は q_0 と r_0 だけを含むが、その $\theta \rightarrow \pm\infty$ で 0 に漸近する解は

$$q_0 = \sqrt{2(\lambda + v)} s \operatorname{sech} s\theta, \quad r_0 = -2s^2 \operatorname{sech}^2 s\theta, \quad (13)$$

となる。当然のことながら、(13) の q_0, r_0 を (8) の q, r のところに使ったものはソリトン解(6) に対応している。次に $O(\varepsilon)$ での式は

$$q_1 = A + i B, \quad r_1 = C, \quad (A, B, C \text{ は実関数}) \quad (14)$$

を用いて

$$M \mathbf{A} = \mathbf{n}, \quad (15)$$

$$M = \begin{pmatrix} s^2 + r_0 - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & 0 & q_0 \\ 0 & s^2 + r_0 - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & 0 \\ 2 \frac{\partial}{\partial \theta} q_0 & 0 & (v + \lambda) \frac{\partial}{\partial \theta} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} q_0 \theta v_\tau \\ -q_{0\tau} \\ r_{0\tau} + \hat{H}_\theta \end{pmatrix},$$

と書ける。そして M の随伴作用素の独立な解のうち、 $\theta \rightarrow \pm\infty$ で 0 に漸近するものは

$$\mathbf{m}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sech}s\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 及び } \mathbf{m}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2(\lambda+v)}\operatorname{sech}s\theta\tanh s\theta \\ 0 \\ -\operatorname{sech}^2s\theta \end{pmatrix}, \quad (16)$$

である。ゆえに compatibility condition より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{n} \cdot \mathbf{m}_j d\theta = 0, \quad (j = 1, 2) \quad (17)$$

となる。(17) の $j = 1$ に対する式より

$$\frac{d}{d\tau}\{2(\lambda+v)s\} = 0, \quad (18)$$

を得る。よって

$$s = \frac{k}{2(\lambda+v)}, \quad (19)$$

と書ける。ここで k は s と v の初期値から決まる定数である。そして

$$2(\lambda+v)s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q_0^2 d\theta, \quad (20)$$

なので、(18) は、「ソリトンのパラメータ s, v は、方程式(7)の積分不変量である $\int_{-\infty}^{\infty} |S|^2 dX$ を不変に保つように時間発展をする」ということを表している。

また(17) の $j = 2$ に対する式より、

$$\frac{ds}{d\tau} = \frac{4s^3}{16s^4 + k^2} J_1, \text{ ただし } J_1 = s \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}_\theta \operatorname{sech}^2 s\theta d\theta, \quad (21)$$

を得る。ここで(19)を用いた。従って、山の形 $H(X)$ が与えられると、 $\hat{H}_\theta$ は θ と Ψ の関数として決まるので、 J_1 は s と Ψ の関数として決まる。さらに(11), (19)より、

$$\frac{d\Psi}{dT} = v = \frac{k}{2s} - \lambda, \quad (22)$$

なので、この式と、(21) で $\varepsilon = 1$ とした

$$\frac{ds}{dT} = \frac{4s^3}{16s^4 + k^2} J_1, \quad (23)$$

が s と Ψ についての連立微分方程式系になり、これらを解くことにより、ソリトンの動きや振幅の変化が調べられる。

いまとくに、

$$H = h_0 \operatorname{sech}^2 b_0 X, \quad (24)$$

の場合を考えることにすると、(22), (23) は

$$\frac{d\Psi}{dT} = \frac{k}{2s} - \lambda, \quad \frac{ds}{dT} = -\frac{8s^4 h_0 b_0}{16s^4 + k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 b_0(\theta + \Psi) \tanh b_0(\theta + \Psi) \operatorname{sech}^2 s \theta d\theta, \quad (25)$$

となる。そして、図2で示したのと同様の $\lambda > 0$, $h_0 > 0$, $b_0 > 0$ の場合を考え、初期に山から充分離れた $X = X_0 (< 0)$ にパラメータ $s_0, v_0 (> 0)$ のソリトンを与えると、 k は(19) から正の値として決まる。そして(25)での Ψ, s の初期値は X_0, s_0 となる。ソリトンが山に近づくまでは、 ds/dT は0に近いので、 s, v はほとんど初期値から変化せず、 Ψ はほぼ v_0 の速さで増加する。しかし、ソリトンが山に近づくとも $ds/dT > 0$ となり s が増加し始めるので、 v は減少していく。ここで、もしソリトンが山($X = 0$) に到達する前に v の値が0を横切ると、 $v < 0$ となるので Ψ は減少しはじめる。すなわちソリトンは山のところで反射され、もとに戻り始める。一方、もしソリトンが山のところまで到達した時点でも依然として $v > 0$ ならば、ソリトンは山を越えて $\Psi > 0$ となる。そうなるとも ds/dT が負に変わるので、 s は減少し始め、 v が増加していく。さらに方程式の形より、山から充分離れたところでは s, v は s_0, v_0 に戻ることをわかる。ゆえにソリトンは山のところを透過すると言ってよい。こうして、摂動計算によって、図2で示したようなソリトンの透過と反射が定性的に説明できた。しかし、反射と透過の境目となる (s_0, v_0) の値は解析的に求めることができなかったのもので、数値計算を行った。図5は、横軸を Ψ (すなわちソリトンの位置)、縦軸を s として、入射ソリトンの挙動の一例を示したものであるが、 v_0 を1に固定したとき、 $s_0 = 0.8$ では透過、 $s_0 = 0.7$ では反射(と増幅)を示している。図6は、 $\lambda = 1$, $b_0 = 1$, $v_0 = 1$ の場合について、いろいろな (s_0, h_0) の値に対して、透過か反射かを調べた結果である。§4で調べた場合に対応する $h_0 = 1$ では、 s_0 の値にかかわらず透過となり、(1)に基づく計算と摂動計算の結果は合わない。これは、 $h_0 = 1$ という条件が、山が低いという摂動計算での仮定を満たしていないためだと思われる。今

後は摂動理論の有効性を調べるために、もっと山の低い場合について(1)の数値シミュレーションを行う予定である。

6. まとめ

$\text{sech}^2 X$ の形の山の上を共鳴的な速さ V で流れる二層流体中での、互いに共鳴相互作用をする長波長の内部波モード（位相速度 c_p ）と短波長の表面波モードの波を考え、山のところにトラップされた波（TCW 及び TLW）と遠方から伝搬してきたソリトン(6)の相互作用を、(1)のモデル方程式に基づいて調べた。その結果、次のことがわかった。

- (i) V の c_p からのずれを表す λ の値が 1.0 のときは、 $\tilde{p} = 1.0$ の入射ソリトンは、 $\tilde{q}$ が大きいときは TLW との相互作用のあとほぼそのまま透過するが、 $\tilde{q}$ が小さいと反射されかつ増幅する。
- (ii) $\lambda = -0.3$ に対する $\tilde{p} = 1.0$ のソリトンと(5)の対称 TCW の相互作用を調べると、ソリトンの分裂がみられたほか、山のところでの最終状態が入射ソリトンの $\tilde{q}$ の値に複雑に依存することがわかった。
- (iii) 上の(i)で述べた入射ソリトンの反射と透過の挙動は、山が低いという仮定の下での摂動計算により定性的に説明できる。

参考文献

- 1) Funakoshi, M. and Oikawa, M., (1983) The resonant interaction between a long internal gravity wave and a surface gravity wave packet. J. Phys. Soc. Jpn., Vol.52, pp.1982-1995.
- 2) Funakoshi, M., (1993) Steady trapped solutions to forced long-short interaction equation. J. Phys. Soc. Jpn., Vol.62, pp.1993-2006.
- 3) Grimshaw, R., Pelinovsky, E. and Tian, X., (1994) Interaction of a solitary wave with an external force. Physica D, Vol.77, pp.405-433.

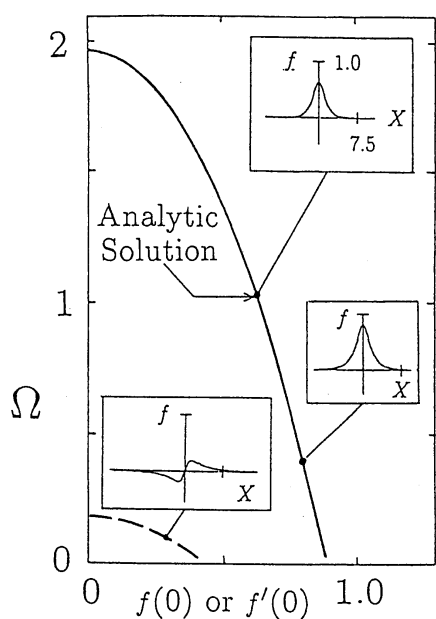


図1 TCW の例。 $\lambda = -0.3$ 。実線（破線）は対称（反対称）な $f(X)$ の解のブランチ。横軸は対称解に対しては $f(0)$ 、反対称解に対しては $f'(0)$ 。

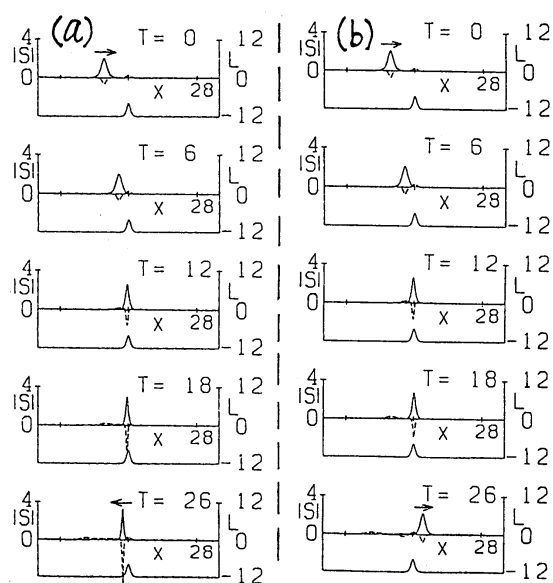


図2 ソリトンと TLW の相互作用。 $\lambda = 1.0$ 。実線は $|S|$ 、破線は L を表す。各時刻の図の一番下の線は $H(X)$ を示す。(a) $\tilde{q} = 1.00$ 、(b) 1.04。

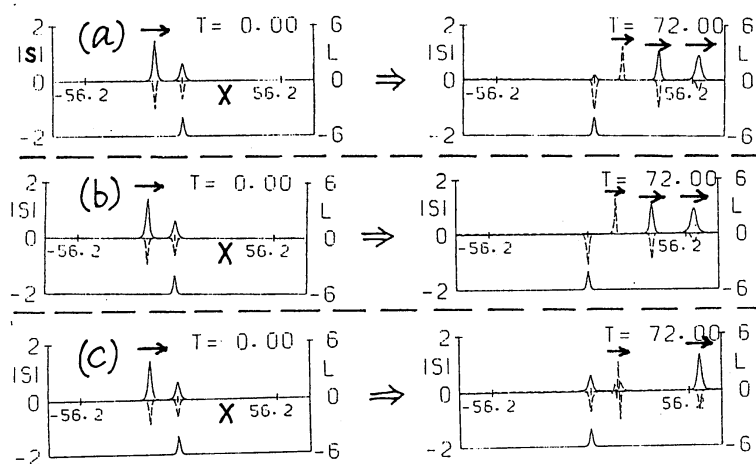


図3 ソリトンと (5) の TCW の相互作用。 $\lambda = -0.3$ 。図の各線の意味は図2と同じ。(a) $\tilde{q} = 1.23$ 、(b) 1.20、(c) 1.17。

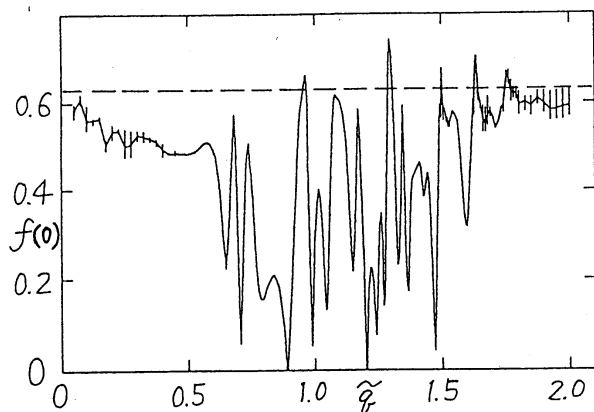


図4 ソリトンと (5) の TCW の相互作用における最終状態での対称 TCW の $f(0)$ 。 $\lambda = -0.3$ 。横軸は入射ソリトンの $\tilde{q}$ 。破線は (5) の TCW での $f(0)$ 。

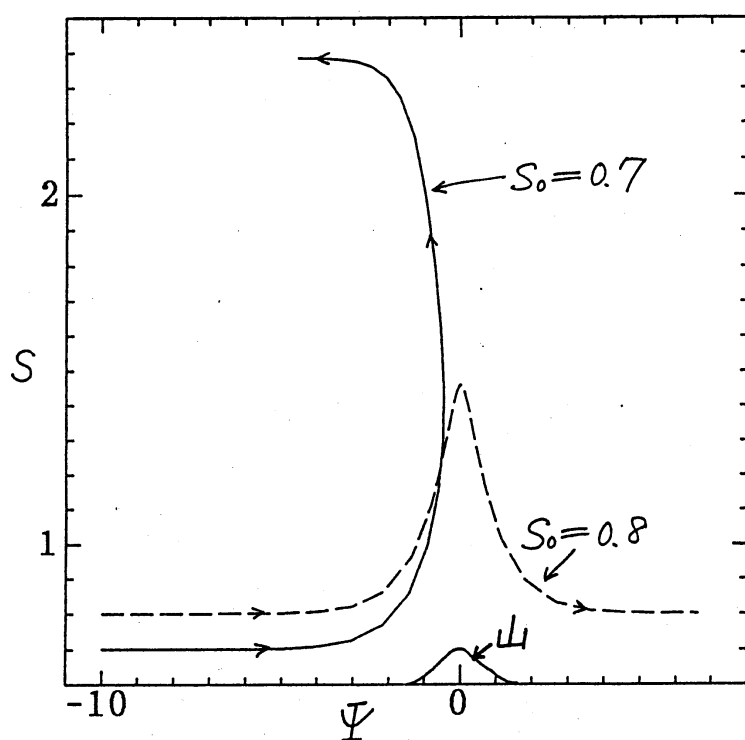


図5 (25)に基づく入射ソリトンの挙動。 $\lambda = 1.0$, $b_0 = 1.0$, $h_0 = 1.4$, $v_0 = 1.0$ 。

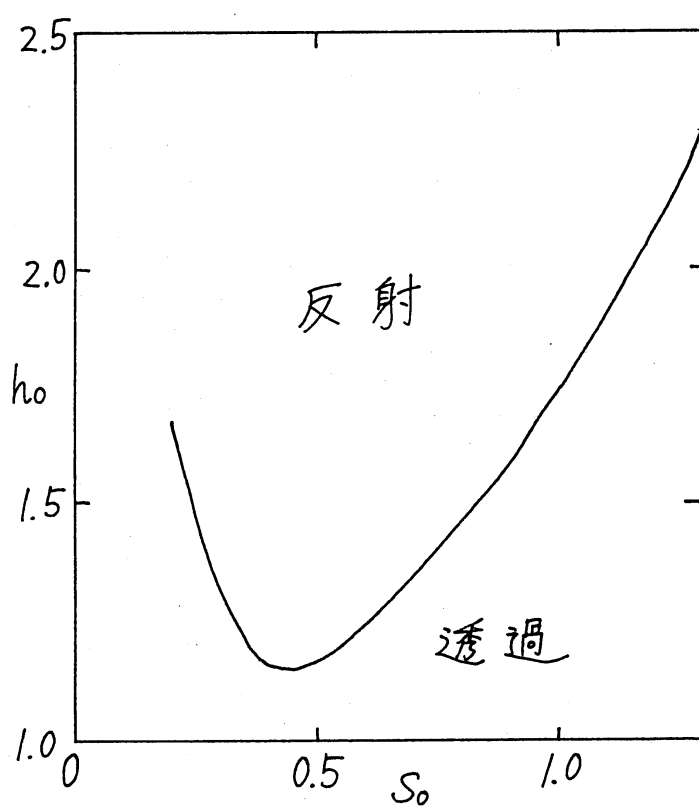


図6 (25)に基づく入射ソリトンの挙動の分類。 $\lambda = 1.0$, $b_0 = 1.0$, $v_0 = 1.0$ 。