

複素数値の位相函数とその応用

東大・大学院 田島 慎一

$P(x, D_x)$ は $M = \mathbb{R}^{m+1}$ 上の A -係数線型偏微分作用素。 $N = \{x_{m+1} = 0\}$ は P に関し非特异的。 $X = \mathbb{C}^{n+1}$, $Y = \mathbb{C}^n$ をそれぞれ M , N の複素近傍とする。このとき

$P(x, D_x)u = 0$ $x_{m+1} > 0$, $\frac{\partial^l u}{\partial x_{m+1}^l}(x) \Big|_{x_{m+1} \rightarrow +0} = \mu_l(x')$ $l=1, \dots, p$
なる境界値問題を超函数の立場で考えます。

以後 P の複素化 $P \in D_{\mathbb{C}}$ の特性多様体 $\text{Car}(P)$ は次の条件をみたすものを考える。

- (1) 複素の特性多様体 $\text{Car}(P)$ は正則。 multiplicity は一定。
- (2) $\text{Car}(P) \cap T^*X \times_X Y$ は T^*X の部分 symplectic 多様体の構造をもつ。

この時、複素領域においては、次田 [1], [2] 及び

P. Pallu De La Barriere et. P. Schapira [13] に明らかにされたように phase function が決定的役割を果たしている

河合[7]では、 E が更に strictly hyperbolic の条件をみたしているとき、初期値問題の基本解を、超函数として実現している。その際の phase は実数値函数であったことに注意しよう。又、SKK では、positive type の phase を使って、超局所可解性、解析性等を論じている。

境界値問題では positive type でない phase をも扱う必要がある。§.1 では complex phase について述べ、§.2 では境界値問題の Poisson 核の構成について述べる。

なを、最近 Anders Melin と Johannes Sjöstrand [10] [11] が、Fourier 積分作用素の立場から、同様の結果を得ていることをつけ加えておく。

§. 1.

X 上の正則函数 φ の零点集合を K とおく。更に $\partial\varphi \neq 0$ on K が成り立っている時、柏原、Schapira [5] に従って

$\mathcal{O}'_{K|X} = D_X^\infty \log \varphi$ と定める。この節では、 $\mathcal{O}'_{K|X}$ が $M_+ = \{x \in M \mid x_{nn} > 0\}$ 上、超函数として realify されている時に、(φ に適当な条件を加えて) $\mathcal{O}'_{K|X}$ を $\overline{M}_+$ 上に support をもつように M 上に realify する方法を与える。

また、その延長の方法が、境界値問題の立場からみて、“標準的延長”であることを証明する。

定義 1.1. 相原・河合 [3] : K が X の closed set のとき,

$K-M$ の $\tilde{M}_X = X-M \cup S_M X$ の中での閉包 $\overline{K-M}$ と $S_M X$ の共通部分を the normal set of K along M といい $S_M K$ で表わします。すなわち

$$S_M K = S_M X \cap \overline{K-M} \quad \text{である。}$$

$x_0 \in M$ において non-singular な超曲面 $K = \{z \in X \mid \varphi(z) = 0\}$ が " $\varphi(x_0) \neq 0$ ならば" 明らかに $(S_M K)_{x_0} = \emptyset$ ですが, $S_M K$ あるいは三輪 [12] により K が知られています。

命題 1.2 $\varphi(x) = f(x) + \sum g(x)$. $f(x)$ 及び $g(x)$ は M 上実数値をとり, $df(x_0) \neq 0$ として一般性を失わない。 $\varphi(x_0) = 0$.
このとき次の (i) ~ (iv) が成り立つ。

(i) $\{x \in U \cap M \mid f(x) = 0\}$ 上 $g(x) \equiv 0$ ならば

$$(S_M K)_{x_0} = \left\{ (x_0, u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}) \mid u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) = 0 \right\}$$

(ii) $\{x \in U \cap M \mid f(x) = 0\}$ 上 $g(x) \geq 0$. $g(x) \neq 0$ ならば

$$(S_M K)_{x_0} = \left\{ (x_0, u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}) \mid u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \leq 0 \right\}$$

(iii) $\{x \in U \cap M \mid f(x) = 0\}$ 上 $g(x) \leq 0$. $g(x) \neq 0$ ならば

$$(S_M K)_{x_0} = \left\{ (x_0, u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}) \mid u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + u_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(x_0) \geq 0 \right\}$$

(iv) x_0 の近傍 U を充分小さくとり, (i) ~ (iii) の "す" が成立し
ない時

$$(S_M K)_{x_0} = (S_M X)_{x_0}.$$

命題 1.2 を得れば $\phi_{K|X}^1$ を M 上の超函数として実現すること
は ϕ が (i) ~ (3) をみたすならば容易です。しかし、 $\phi_{K|X}^1$ を
 $\overline{M}_+$ に台をもつように M 上に実現することを考える時は $S_M K$
では不適当なので $S_{\overline{M}_+} K$ なる集合を導入します。

定義 1.3. X の closed set K に対して $x \in \overline{M}_+$ のとき、

$$\theta \in C(\overline{M}_+ K)_x \quad \text{とは}$$

$$\diamond \quad \text{(i) } \theta \in T_x X. \quad \text{(ii) } \exists a_\ell > 0. \quad \exists k_\ell \in K. \quad k_\ell \rightarrow x. \quad \exists m_\ell \in \overline{M}_+.$$

$$m_\ell \rightarrow x. \quad \text{s.t.} \quad \theta = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_\ell (k_\ell - m_\ell).$$

(iii) $x \in M_+$ のときは (i) (ii) のみでよいが $x \in N$ のときは、更に

$$\langle \theta, dx_{m_\ell} \rangle \geq 0 \quad \text{をつけ加える。}$$

$\pi \overline{M}_+$ により、 πM の部分集合で M_+ 上の fibre は πM と同じで
 N 上では $\frac{\partial}{\partial x_{mH}}$ の係数が非負のものも表すとすると、定義 1.3
からわかるように $C(\overline{M}_+ K)_x$ は $\pi \overline{M}_+ x$ 方向に不変なので
同値類をとることができるから。

定義 1.4. X の closed set K に対して、 $x \in \overline{M}_+$ のとき、

the normal set of K along $\overline{M}_+$ を次で定義する。

$$S_{\overline{M}_+} K_x \stackrel{\text{def}}{=} [C(\overline{M}_+ K)_x / \pi \overline{M}_+ x \setminus 0] / \mathbb{R}_+$$

次の補題 1.5 と命題 1.6 が得られる。証明については
田島 [修論] を参照。

補題 1.5. X の closed set G に対し、次のことが成り立つ。

- (1) $S_{\overline{M}_+} G|_{M_+} = S_M G|_{M_+}$ (2) $S_{\overline{M}_+} G|_N \subset S_M G|_N$
 (3) $S_{\overline{M}_+} G \cup S_{\overline{M}_-} G = S_M G$ (4) $S_{\overline{M}_+} G \setminus S_{\overline{M}_-} G \subset q^{-1} S_{\overline{M}_+} G$
 (5) $S_N (G \cap Y) \subset S_{\overline{M}_+} G \cap S_{\overline{M}_-} G \subset S_M G|_N$

命題 1.6. $\varphi(x) = f(x) + Hg(x)$. $\varphi(0) = 0$. $df(0) \neq 0$.

$K = \{x \mid \varphi(x) = 0\}$ に対し、次の (1) ~ (4) が成り立つ。

(1) $g(x) \equiv 0$ ならば

$$(S_{\overline{M}_+} K)_0 = \left\{ (0, v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + v_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_{m+1}}) \mid v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \dots + v_{m+1} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(0) = 0 \right\}$$

(2) $g(x) \geq 0$, $g(x) \not\equiv 0$ ならば

$\{x \mid x_{m+1} \geq 0\} \cap \{x \mid f(x) = 0\}$ で成り立つならば

$$(S_{\overline{M}_+} K)_0 = \left\{ (0, v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + v_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_{m+1}}) \mid v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \dots + v_{m+1} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(0) \leq 0 \right\}$$

(3) $g(x) \leq 0$, $g(x) \not\equiv 0$ ならば

$\{x \mid x_{m+1} \geq 0\} \cap \{x \mid f(x) = 0\}$ で成り立つならば

$$(S_{\overline{M}_+} K)_0 = \left\{ (0, v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \dots + v_{m+1} \frac{\partial}{\partial y_{m+1}}) \mid v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(0) + \dots + v_{m+1} \frac{\partial f}{\partial x_{m+1}}(0) \geq 0 \right\}$$

(4) $x=0$ の近傍を δ だけ小さくとり、(1) ~ (3) のいずれも

も成り立たないときは

$$(S_{\overline{M}_+} K)_0 = (S_M X)_0$$

定義 1.7. M 上の関数 φ が $x_0 \in \overline{M}_+$ で M_+ に関して positive type とは、次の (1), (2) のいずれかを見つたときをいう。

$$(1) \varphi(x_0) \neq 0$$

$$(2) \operatorname{Re} d\varphi(x_0) \neq 0 \quad \exists W : x_0 \text{ の } M \text{ での直線 s.t.}$$

$$W \cap \{x \in \overline{M}_+ \mid \operatorname{Re} \varphi(x) = 0\} \text{ 上 } \operatorname{Im} \varphi(x) \geq 0.$$

さて命題 1.6 よりただちに次の補題が得られます。

補題 1.8 W を M の open set. φ は W 上の実解析関数。 φ は $W \cap \overline{M}_+$ の各点で $\overline{M}_+$ に関して positive type. (かつ $\forall x_0 \in W \cap N$ に対して $\varphi(x) = 0$ ならば $\operatorname{Re} d\varphi(x) \neq 0$ が必要) となれば $K = \{z \mid \varphi(z) = 0\}$ とおくと

$$\varphi \neq ((S_{\overline{M}_+ \cap W} K) \cap S_{N \cap W} Y) \subseteq (S_{N \cap W} (K \cap Y))$$

がなりたつ。

補題 1.8 の仮定をみたす φ は $W \cap \overline{M}_+$ では positive type となるから、 $\mathcal{O}_{K|X}^1$ の元は自然に $W \cap \overline{M}_+$ の開部分集合上の超関数として意味付けできますが、更に $Y(x_{n+1}) \mathcal{O}_{K|X}^1$ の元は holomorphic parameter $z_1, \dots, z_n$ 付きの超関数として理解できます。ここで $\mathcal{H}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}}^1(\mathcal{O}_X)$ の Γ を実領域 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ へ境界値をとれば $\mathcal{H}_{\mathbb{R}^{n+1}}^m(\mathcal{H}_{\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}}^1(\mathcal{O}_X)) \otimes \omega_{\mathbb{R}^{n+1}/\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}$ がなりたつので (SKK, Chap 1. 小松 [8]), $Y(x_{n+1}) \mathcal{O}_{K|X}^1$ の元は $\overline{M}_+$ 内に台をもつ超関数として実現できます。

定義 1.9. 今の定義域の延長を holomorphic parameter による標準的延長と呼ぶ。又 $Y(x_{n+1})$ の代りに $\delta(x_{n+1})$ を使ったとき、その $\delta(x_{n+1})$ の係数を $x_{n+1} > 0$ からの境界値という。

phase ϕ が positive type のとき境界値は初期値と一致する。
 又、境界値の特異台は、初期値の特異台の計算法と全く同じであることに注意。(補題 1.8 を使う)

命題 1.10. u が $W \cap \{x \mid x_{n+1} > 0\}$ で定義された $P(xD)u = 0$ の超函数解とする。 u が holomorphic parameter による標準的延長をもつならば、それは境界値問題の意味での標準的延長 $[u]^+$ と一致する。更に境界値に対しても

$$b_j(xD_x)u \Big|_{x_{n+1} \rightarrow +0} = b_j(zD_z)u(z) \Big|_{z_{n+1}=0} \quad \text{が成り立つ。}$$

注意. 一般に u から $[u]^+$ を得る方法は超越的であるけど、

holomorphic parameter による延長の方法は自然と考えられる。特に u が phase を使って表わされている時には、複素領域のどの方向にのがれて考えればよいか。命題 1.6 からたちにはわかる。これは片岡 [6] の mild な超函数の典型的場合になる。

§2

この節では、境界値問題の Poisson 核の構成を行う。まず、
P. Pallu De La Barriere et P. Schapira [13] の結果を紹介しよう。

X を複素多様体。 Y, Z はそれぞれ X, Y の超曲面とする。
 E は X 上の偏微分作用素。 $p: P^*X \times_X Y \setminus P_Y^*X \rightarrow P^*Y$
とする。次の条件 (H1), (H2) を置く。

(H1) Y は $E \equiv D_2$ に関し non-caractéristique.

(H2) $p^{-1}(P_Y^*Y)$ の近傍で $\text{Can}(E)$ は P^*X の正則多様体。

更に $\text{Can}(E) \cap (P^*X \times_X Y)$ は P^*X の部分 symplectique 多様体。

このとき、 Y の近傍において、 Z を通り、 E に関し caractéristique な超曲面 $K_1, \dots, K_d$ が存在し、 $K_1, \dots, K_d, Y$ は互いに横断的に交わる。 m_j ($j=1, \dots, d$) により $P_{K_j}^*X$ の近傍における $\text{Can}(E)$ の multiplicité を表すことにする。

$Y = \{z_{m+1} = 0\}$ としてよい。 $\sigma_R(f) = \frac{\partial^R}{\partial z_{m+1}^R} f \Big|_{z_{m+1}=0}$
と記号を定めておく。

定理 2.1. $\forall g \in \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{K_i|X}^1$ $\forall (h) \in (\mathcal{O}_{Z|Y}^1)^m$ に対して、

$f \in \bigoplus \mathcal{O}_{K_i|X}^1$ で $pf = g$ $\sigma_R(f) = h_R$ $R=0, \dots, m-1$.

を満たす f が Y の近傍で唯一存在する。

定理 2.2. $x \leq d$. $f \in \bigoplus_{i=1}^x \mathcal{O}_{K_i}^1 | X$ が

$pf \in \mathcal{O}_X$. $r_k(f) \in \mathcal{O}_Y$ $k=0, \dots, m_1 + \dots + m_x$ をみたすなら
 $f \in \mathcal{O}_X$ がなりたつ。

さて境界値問題では全ての特性係が使用できるとはな
 いので、 $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type の K_i 達あるという言葉
 をいふが元々は $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type の Lagrangean
 $p_{K_i}^* X$ を選ぶ必要がある。河合[7]が指摘したように、
 Cauchy data の数を少なくすれば、解 f を構成する際、特性面
 K_i 達のいくつかを選んで、それ以外で正則な解を得ることが
 できる。すなわち、

系 2.3 $p \leq m$ $\forall (r) \in (\mathcal{O}_{Z|Y}^1)^p$ に対して、 d 個の特性
 面 K_j $j=1, \dots, d$ のうちの q 個 $K_{j_1}, \dots, K_{j_q}$ を、 $m_{j_1} + \dots + m_{j_q} \geq p$
 と選ぶならば、 $f \in \bigoplus_{i=1}^q \mathcal{O}_{K_{j_i}}^1 | X$ で $pf = 0$ 。
 $r_k(f) = r_k$ $k=0, \dots, p-1$ をみたす f が Y の近傍
 で存在する。

今では N に関して positive type と仮定しておく。 $\mathcal{O}_{Z|Y}^1$ の
 π は N 上の超函数として意味付けできる。特性面 $K_{j_1}, \dots, K_{j_q}$
 が $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type であるとするは、

$p = m_{j_1} + \dots + m_{j_p}$ とおいて, $(h) \in (\mathcal{O}_{Z|Y}^1)^p$ を超函数とみなした時 $f \in \bigoplus_{i=1}^q \mathcal{O}_{K_j|X}^1$ 且 $x_{n+1} > 0$ での超函数解として考えられ, $\gamma_k(f) = h_k$ $k=0, \dots, p-1$ が必要になる場合がある。

注意すべきことは $\gamma_k(f)$ の特異台には条件が課せられるのでそれと合うように (h) を超函数として実現しなければならぬ点にある。

例 2.4.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} - \sum x_2^{2m} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u(x_1, x_2) = 0 & x_2 > 0. \\ u(x_1, x_2) \Big|_{x_2 \rightarrow +0} = \frac{1}{x_1 - x_1' \pm i0} \end{cases}$$

$$[u]^+ = b \frac{\Upsilon(x_2)}{z_1 - z_1' + \frac{\sum}{z^{2m+1}} x_2^{2m+1}} \quad \text{なので } x_2 > 0 \text{ からの}$$

境界値としては, $1 / (x_1 - x_1' + i0)$ のみが可能。

命題 1.6 と補題 1.8 を使えば $(h) \in (\mathcal{O}_{Z|Y}^1)^p$ をどのように超函数として実現しておけば, $f \in \bigoplus_{i=1}^q \mathcal{O}_{K_j|X}^1$ の $x_{n+1} > 0$ からの境界値と一致するかは明らかとなる。

8. Z が strictly positive type にとれる K_j 全て $x_{n+1} \geq 0$ に関して positive type にとれるならば, (h) の特異台を 1 点のみから成る様にとれることを注意しておく。

定理 2.5. Poisson 核の構成.

$P(x, D_x)$ は m 階線型偏微分作用素. N は $\mathbb{R}^n$ に関し非特性的
更に. $\varphi_m(x', 0; \bar{z}', \zeta_{n+1}) = 0$ ならば $\frac{\partial \varphi_m}{\partial \zeta_{n+1}}(x', 0; \bar{z}', \zeta_{n+1}) \neq 0$
がなりたつとする.

$$\begin{cases} P(z, D_z) u_R(z, y', \bar{z}') = 0. \\ \frac{\partial^l}{\partial z_m^l} u_R(z, y', \bar{z}') \Big|_{z_m=0} = \delta_{l,R} \frac{(m-1)!}{(-2\pi i)^n} \frac{1}{\langle z - y', \bar{z}' \rangle^{n-1}} \end{cases}$$

$0 \leq l, R \leq p-1$

$\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^n$ の原点の近傍 $\times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ における解.

$$u_R = \sum_{j=1}^p \frac{F_{d_j}(z, y', \bar{z}')}{\varphi_{d_j}(z, y', \bar{z}')} \delta_{d_j} + G_{d_j}(z, y', \bar{z}') \log \varphi_{d_j}(z, y', \bar{z}') + H_{d_j}(z, y', \bar{z}')$$

n 特性函数 $\varphi_{d_j}(z, y', \bar{z}')$ $j=1, 2, \dots, p$ が $x_{n+1} \geq 0$ に関して
positive type であるとする. このとき.

$$\begin{cases} P(x, D_x) u(x) = 0 & x_{n+1} > 0. \\ \frac{\partial^l}{\partial x_{n+1}^l} u(x) \Big|_{x_{n+1} \rightarrow +0} = M_l(x') & l=0, 1, \dots, p-1. \end{cases}$$

なる境界値問題は $\text{supp } M_l \subset N_0$ の条件のもととける.

但し N_0 は $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ の原点の適当な近傍である.

注意 定理の煩雑さを避けるため simple characteristic の場合
のみ述べたが, 今までのことから constant multiplicity の場合
に拡張できる. また平面波だけでなく曲面波を使ってもよい.

証明の方針.

$E_R(x, y') = \int u_R(x, y', z') \omega(z')$ とおく. E_R は $x_{n+1} > 0$ における超函数で $x_{n+1} = 0 \cap$ holomorphic parameter による標準的延長をもつ.

$$u(x) = \sum_{R=1}^P \int E_R(x, y') \mu_R(y') dy'$$

が $x_{n+1} > 0$ における解であることはよい.

$$[u(x)]^+ = \sum_{R=1}^P \int [E_R(x, y')]^+ \mu_R(y') dy'$$

と holomorphic parameter による標準的延長を行う.

holomorphic parameter による境界値と、偏微分方程式の解の意味での境界値は一致するので証明された.

系 2.6. 定理 2.5 に表わされた係数関数 φ_{α_j} が、 $x_{n+1} \geq 0$ に関し $\geq$ positive type であるのみならず、 M 上で $\geq$ positive type であるならば、 $x_{n+1} > 0$ での解 $u(x)$ は、 $x_{n+1} \leq 0 \cap$ 方程式の解として接続される。すなわち、境界値は集は初期値となる。

参考文献

- (1) Yasaku HAMADA : The singularities of the solutions of the Cauchy problem
Publ. RIMS Kyoto Univ. 1969.
- (2) Akira KANEKO : Singular Spectrum of boundary values of solutions
of partial differential equations with real analytic coefficients.
- (3) Masaki KASHIWARA, Takahiro KAWAI : Micro-hyperbolic pseudo-
differential operators. J. Math Soc. Japan. vol. 27. 1975.
- (4) 柏原正樹・河合隆裕. 楕円型境界値問題の理論とその応用
数理科序講 238
- (5) Masaki KASHIWARA, Pierre SCHAPIRA : Problème de Cauchy pour
les systèmes microdifférentiels dans le domaine complexe.
Inventiones math. 46. 1978. 17-38.
- (6) 井岡清臣 : Mild は超函数と Green の公式について.
- (7) Takahiro KAWAI : Construction of local elementary solutions for linear
partial differential operators with real analytic coefficients I & II.
Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1971/72.
- (8) Hikosaburo KOMATU : An introduction to the theory of hyperfunctions.
Springer Lecture Note 289.
- (9) Anders MELIN and Johannes SJÖSTRAND.
Fourier integral operators with complex valued phase
functions. Springer Lecture Note. 459.

- (10) Anders MELIN and. Johannes SJOSTRAND.

Fourier integral operators with complex phase functions and
parametrix for an interior boundary value problem.
comm. in partial differential equations 1. (4). 1976. 313-400.

- (11) " " "

A calculus for Fourier integral operators in domains with
boundary and applications to the oblique derivative problem.
comm in partial differential equations. 2 (9). 1977 857-935

- (12) Tetsuji MIWA : Propagation of micro-analyticity for solutions of pseudo-
differential equations I. 数理科学講義録 226.

- (13) P. Pallu De La. Barriere et P. SCHAPIRA.

Application de la theorie des microfonctions holomorphes au
probleme de Cauchy a donnees singulieres.

Seminaire Goulaouic - Schwartz 1975/76.

- (14) P. SCHAPIRA : Propagation au bord et reflexion des singularites
analytiques des solutions des equations aux derivees
partielles I. II. Seminaire Goulaouic-Schwartz. 76.

- (15) J. SJOSTRAND : Applications of Fourier distributions with complex-
phase functions Springer Lecture Note 459.

- (16) Hassler. WHITNEY. Complex analytic varieties.
Addison-Wesley.