

教育学部および教育学研究科における数学研究の事例

熊本大学教育学部 伊藤 仁一 (Jin-ichi Itoh)
Faculty of Education, Kumamoto University

1 始めに

教育学部や教育学研究科における数学の研究としてどのようなものがありうるかということで、「教育学研究科における数学の研究 -直観幾何学的視点から-」([1]),「教育学研究科における数学の研究 -修士論文指導における 2, 3 の事例-」([2])を以前の講究録に書いた。更に, 前回は,「教育学部・教育学研究科における数学の研究 - 2 つの事例 -」というタイトルで, 教育学部の 3 年生から 4 年生にかけて立方体と正八面体の辺を切ってできる各々に 11 通りある展開図を再折りしてできる凸多面体を全て分類する研究と教員研修留学生の Buyat さんの初等幾何の垂心の多角形への拡張についての研究の報告した([3])。

今回はその続きとして, 今年教育学部 4 年生(高橋未帆)の「すべての曲率が定数となる曲線の特徴について」と教育学研究科修士一年生(山下雄太郎)の「円織面」の研究を紹介する。

曲率, 捩率等の Frenet 曲率が一定の一般次元の空間曲線は W-curve と呼ばれるようであるが, そのようになるための必要十分条件が「曲線上の 2 点の差とその接ベクトルの差が直交する」で与えた B.Y.Chen 達の論文([2-1])を 4 年生の高橋さんに読んでもらった。その中で, その条件を弱めたものについても 3 次元では必要十分条件となることが示されていた。B.Y.Chen 達の方法をそのまま使って 4 次元の場合にも成り立つことを高橋さんが示してくれた。部分多様体論の研究では有名な微分幾何学者の B.Y.Chen が 2006 年の論文で残した部分を進めたというとてもすぐ良い結果のようにも思われるが, 実際のところ, ただ複雑になった計算を, Mathematica を使って行ったということに過ぎない。だが, それによって, 数学の魅力を少しでも学生が感じってくれば良いと思っている。

線織面は有名であるが, 最近, その直線を円に代えて円織面の特異点について研究した泉屋氏達の研究([3-1])がある。それを学部 4 年生の時から読んでもらっていたが, 特異点がない滑らかな曲面となる必要条件を修士 1 年になってから山下くんに調べてもらった。まず, 円の半径は一定とし, 中心曲線は直線の場合に, 円を含んでいる平面の法ベクトルが一定のスピードで直線の周りに回転している場合に限って, その傾きに対して回転スピードが遅ければ滑らかな曲面となるのでその条件式を求めてもらった。また, 中心曲線が平面曲線の場合にはその曲率を用いて同様に考察できる。更に, 中心曲線が空間曲線で捩率をもつ場合にというように拡張して考えていってもらった。勿論, 円を含んでいる平面の法ベクトルの変化を接ベクトル方向の周りの回転だけではなく, 一般に円を含む平面の法ベクトル場の変化で記述できるはずであり, 更なる進展を期待している。

以下に, 高橋さん(4 年生)と山下くん(M1)に書いてもらった解説をほぼそのままの形で掲載する。

2 すべての曲率が定数となる曲線の特徴について

高橋未帆（熊本大学教育学部4年生）

2.1 すべての曲率が定数となる曲線 (W-curve)

2.1.1 曲率

部分区間 $J \subset I$ において, 導関数 $X'(s), \dots, X^{(n)}(s)$ は線形独立で, $X'(s), \dots, X^{(n+1)}(s)$ は線形従属とする. ($n \in \mathbb{N}, n \in [1, m]$)

このとき J 上の $e_1, \dots, e_n$ は次の条件で決まる.

- (i) $e_1, \dots, e_n$ は正規直交ベクトルである.
- (ii) すべての $k = 1, \dots, n$ において $\text{Lin}(e_1, \dots, e_k) = \text{Lin}(X'(s), \dots, X^{(k)}(s))$.
($\text{Lin}(X'(s), \dots, X^{(k)}(s))$ は $X'(s), \dots, X^{(k)}(s)$ で張られる線形空間を表す.)
- (iii) $\langle X^{(k)}(s), e_k \rangle > 0$.

($k = 1, \dots, n$; $\langle X^{(k)}(s), e_k \rangle$ はベクトル $X^{(k)}(s)$ と e_k の内積を表す.)

曲率 $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ は次の Frenet-Serret の公式によって求められる.

$$\begin{cases} e_1' = \kappa_1 e_2 \\ e_i' = -\kappa_{i-1} e_{i-1} + \kappa_i e_{i+1} \quad , i = 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ e_n' = -\kappa_{n-1} e_{n-1} \end{cases}$$

2.1.2 すべての曲率が定数となる曲線

定義 2.1 任意の次元のユークリッド空間において, Frenet 曲率が定数となる曲線. W-curve と呼ぶこともある.

2.2 すべての曲率が定数となる曲線の例

2.2.1 円

円は平面上で平面の一部分を囲む連続閉曲線に対し, その平面上にある定点 O とその連続閉曲線上の点とが一定の距離を保っているものをいう. また任意の2点を結んでできる弦はその2点における曲線の接線と一定の角度で交わるという特徴をもつ.

このことより以下の命題を得る.

命題 2.2 2次元ユークリッド空間において, 曲線 $X = X(s)$ を単位スピード曲線, $T(s) = X'(s)$ を曲線 X の単位接ベクトル場とする.

すこのとき, 以下のことは同値である.

- (i) 曲線 X は円である.
- (ii) 曲線 X が条件 (C): $\langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle = 0$ を満たす. ($\langle a, b \rangle$ はベクトル a, b の内積を表す.)

証明:

(i) $\rightarrow$ (ii)

曲線 X は円なので, $X(s) := (r \cos s, r \sin s)$, $X(t) := (r \cos t, r \sin t)$ とすると,

$X'(s) = (-r \sin s, r \cos s)$, $X'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$ となる.

$X(t) - X(s) = (r(\cos t - \cos s), r(\sin t - \sin s))$,

$X'(t) - X'(s) = (-r(\sin t - \sin s), r(\cos t - \cos s))$ より,

$$\begin{aligned} \langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle &= -r^2(\cos t - \cos s)(\sin t - \sin s) + r^2(\sin t - \sin s)(\cos t - \cos s), \\ &= (-r^2 + r^2)(\cos t - \cos s)(\sin t - \sin s), \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり, 曲線 X は条件 (C) を満たす.

(ii) $\rightarrow$ (i)

曲線 X は条件 (C) を満たすので,

$$\langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle = 0.$$

これを t に関して微分すると,

$$\begin{aligned} T(t) \cdot T(t) - T(t) \cdot T(s) + K(t) \cdot X(t) \cdot X''(t) - K(t) \cdot X(s) \cdot X''(t) &= 0, \\ T(t) \cdot (T(t) - T(s)) + K(t) \cdot X''(t) \cdot (X(t) - X(s)) &= 0. \quad (K(t) \text{ は曲線 } X \text{ の曲率}) \end{aligned}$$

この式をさらに t に関して微分すると,

$$\begin{aligned} K(t) \cdot X''(t) \cdot (T(t) - T(s)) + K(t) \cdot T(t) \cdot X''(t) + K'(t) \cdot X''(t) \cdot (X(t) - X(s)) \\ - K^2(t) \cdot T(t) \cdot (X(t) - X(s)) + K(t) \cdot X''(t) \cdot T(t) &= 0, \\ K(t)X''(t)(T(t) - T(s)) + K'(t)X''(t)(X(t) - X(s)) - K^2(t)T(t)(X(t) - X(s)) &= 0. \end{aligned}$$

この式を s に関しても微分すると,

$$\begin{aligned} -K(s) \cdot T(t) \cdot X''(s) + K'(t) \cdot X''(t) \cdot X(t)K'(t) \cdot X''(t) \cdot X(s) - K(t) \cdot X''(t) \cdot T(s) &= 0, \\ K'(t) \cdot X''(t) \cdot (X(t) - X(s)) &= 0. \end{aligned}$$

$N(t) \cdot (X(t) - X(s)) = 0$ ならば, 直交し続けるためには X は直線となる.

$K'(t) = 0$ のとき, $K(t)$ は定数となる.

よって, 曲線 X は円となる. □

2.3 研究内容

参考文献 [2-1] において, 条件 (C) が m 次元ユークリッド空間における曲率がすべて定数である曲線の必要十分条件であることがわかった. しかし条件 (C) は条件としては見えた目強い条件である. そこで m 次元ユークリッド空間において条件 (C) より見えた目弱い条件を次のように定める.

条件 (A): $\langle X(s) - X(t), T(s) - T(t) \rangle$ は $s - t$ に依存する.

($X(s)$ は単位スピード曲線, $T(s) = X'(s)$.)

同じ文献で 3 次元ユークリッド空間において, 以下のような定理が成り立つことが証明された.

定理 2.3 3次元ユークリッド空間において曲線 $X(s)$ は領域 I 上に定義された単位スピード曲線とする. このとき以下のことは同値である.

- (i) 曲線 $X(s)$ は曲率がすべて定数となる曲線である.
- (ii) 曲線 $X(s)$ は条件 (A) を満たす.

以下は定理の証明の概要である.

証明: 3次元ユークリッド空間において曲線 $X(s)$ は領域 I 上に定義された単位スピードの曲線とする. また曲線 $X(s)$ は条件 (A) を満たすと仮定する. ここで, $\kappa_1 \neq 0$, もしくは $X(s)$ は曲率がすべて定数となる曲線の一部であると仮定する. すると以下の補題を得ることができる.

補題 2.4 m 次元ユークリッド空間において $X(s)$ を単位スピード曲線とし, 条件 (A) を満たすとする. 任意の整数 j, i のとき次が成り立つ.

$$\begin{aligned}\langle X^{(i)}(s), X^{(2j-i)}(s) \rangle &= (-1)^{j-i} (a_{j-1}s - b_{j-1}), \\ \langle X^{(i)}(s), X^{(2j-i+1)}(s) \rangle &= (-1)^{j-i} \left(j - i + \frac{1}{2} \right) a_{j-1} \\ (j \geq 2; i = 1, \dots, j; a_1, a_2, \dots, a_{j-1} \text{ と } b_1, b_2, \dots, b_{j-1} \text{ は定数である}).\end{aligned}$$

Frenet-Serret の公式と補題より,

$$\begin{cases} \kappa_1^2 = a_1s - b_1, \\ \kappa_1^2 \kappa_2^2 + \kappa_1^4 + \kappa_1'^2 = a_2s - b_2, \\ (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2)^2 + (2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2')^2 = a_3s - b_3 - \frac{9}{4} a_1^2. \end{cases}$$

これより, κ_1, κ_2 を次のように s の多項式で表すことができる.

$$\begin{aligned}\kappa_1^2 &= a_1s - b_1, \\ \kappa_2^2 &= \frac{4(a_2s - b_2)(a_1s - b_1) - 4(a_1s - b_1)^3 - a_1^2}{4(a_1s - b_1)^2}\end{aligned}$$

ここで3次元ユークリッド空間曲線の特徴について考えると以下の3つが挙げられる.

- (a) 平面曲線
- (b) κ_1 が定数となる曲線
- (c) κ_1, κ_2 が定数とは限らない曲線

それぞれの場合において求められた式を s についての恒等式として係数比較を行うと, $a_1 = 0, a_2 = 0$ となるので, κ_1, κ_2 は定数となることがわかる.

先ほどの証明で補題を用いた. この補題は m 次元ユークリッド空間において成り立つものである. そこでこの補題と Frenet-Serret の公式を活用することで, 任意の次元においても条件 (A) はすべての曲率が定数となる曲線の必要十分条件になるのではないかと考えた. この研究ではまず定理を4次元に拡張した以下の命題が成り立つかを考えた.

命題 2.5 4次元ユークリッド空間において曲線 $X(s)$ は領域 I 上に定義された単位スピード曲線とする. このとき以下のことは同値である.

- (i) 曲線 $X(s)$ は曲率がすべて定数となる曲線である.
- (ii) 曲線 $X(s)$ は条件 (A) を満たす.

証明: 定理の証明と同様に, 補題と Frenet-Serret の公式を用いると次の式を得る.

$$\begin{cases} \kappa_1^2 = a_1 s - b_1, \\ \kappa_1^2 \kappa_2^2 + \kappa_1^4 + \kappa_1'^2 = a_2 s - b_2, \\ (\kappa_1'' - \kappa_1^3 - \kappa_1 \kappa_2^2)^2 + (2\kappa_1' \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_2')^2 + \kappa_1^2 \kappa_2^2 \kappa_3^2 = a_3 s - b_3 - \frac{9}{4} a_1^2, \\ (\kappa_1^4 - 3\kappa_1'^2 - 4\kappa_1 \kappa_1'' + \kappa_1^2 \kappa_2^2)^2 + (-3\kappa_1^2 \kappa_1'' - 3\kappa_1' \kappa_1'^2 + \kappa_1''' - 3\kappa_1' \kappa_2^2 - 2\kappa_1' \kappa_2' \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_2')^2 \\ \quad + (-\kappa_1^3 \kappa_2 - \kappa_1 \kappa_2^3 + 3\kappa_1'' \kappa_2 + 3\kappa_1' \kappa_2' + \kappa_1 \kappa_2'' - \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3^2)^2 + (\kappa_1' \kappa_2 \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2' \kappa_3 + \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3')^2 \\ = a_4 s - b_4 \end{cases}$$

これより, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ の値を s の多項式で表すことができる. ここで 4 次元ユークリッド空間曲線の特徴について考えると以下の 3 つが挙げられる.

- (a) $\kappa_3 \neq 0$ となる曲線
- (b) κ_1 が定数となる曲線
- (c) κ_1 が定数とは限らない曲線

それぞれの場合において求められた式を s についての恒等式として係数比較を行うと, $a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0$ となるので, $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ は定数となることがわかる. $\square$

以上より, 4 次元ユークリッド空間において条件 (A) は曲線 X の曲率が定数となる必要十分条件であることがわかった. さらに次元を拡張したとしても補題と Frenet-Serret の公式を用いれば条件 (A) は任意の次元のユークリッド空間において, 曲線 X の曲率が定数となる必要十分条件となると考える.

2.3.1 参考文献

- [2-1] B. Y. Chen, D. S. Kim and Y. H. Kim, *New characterizations of W-curves*, Publ. Math. Debrecen **69** (2006), 457-472.
- [2-2] W. Kühnel, *Differential geometry, curves-surfaces-mainfolds*, Translated from the (1999) German original by Bruce Hunt. Student Mathematical Library, Vol 16, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [2-3] 小林昭七, 曲線と曲面の微分幾何, 裳華房, 1997

3 円織面

山下雄太郎（熊本大学教育学研究科修士1年）

3.1 円織面 (Circular Surface)

3.1.1 定義

線織面における直線概念を円へと拡張させ、円織面について考えていく。つまり円織面とは、円を連続的に移動させた軌跡として得られる曲面のことであり、次のような写像として定義されるものとする。

$$\begin{aligned} V : I \times \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \gamma, a_1, a_2 : I &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ r : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ V(t, \theta) &= V_{(\gamma, a_1, a_2, r)}(t, \theta) = \gamma(t) + r(t)\{\cos \theta a_1 + \sin \theta a_2\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、 a_1, a_2 は、すべての $t \in I$ に対して $a_1 \cdot a_1 = a_2 \cdot a_2 = 1, a_1 \cdot a_2 = 0$ をみたすものとする。さらに、 $\gamma(t)$ を base curve といい、基準となる円 $\theta \mapsto \gamma(t) + r(t)\{\cos \theta a_1 + \sin \theta a_2\}$ を generating circle という。 r が定数のとき、定数半径の円織面 (circular surface with contact radius) といい、まずは定数半径の円織面について考えていく。

円織面 $V(\gamma, a_1, a_2, r)(t, \theta)$ において、

$$\gamma'(t) \cdot a_1(t) = \gamma'(t) \cdot a_2(t) = 0 \quad (3.2)$$

ならば、任意の $t \in I$ に対して generating circle が曲線 $\gamma(t)$ の法平面上にある。このような曲面のことを canal surface という。これとは逆に、

$$\gamma'(t) \cdot a_1(t) \neq 0 \text{ または } \gamma'(t) \cdot a_2(t) \neq 0 \quad (3.3)$$

をみたすとき、non-canal だという。

3.2 円織面に関する研究

3.2.1 研究の概要

研究の対象とするのは、 $\gamma'(t)$ と a_3 方向が一致しない円織面 (non-canal) である。ここで、 a_3 方向とは、generating circle が存在する平面の軸となる a_1, a_2 と垂直となっている方向であり、 $a_1 \times a_2 = a_3$ だとする。この a_3 を、 $\gamma'(t)$ を軸として回転させることを考え、その時にできる円織面が曲面として成り立つための条件に関する研究を行う。

定理 1 a_3 を $\gamma'(t)$ を軸として回転させることによりできる円織面が、自己交叉を含まず、なめらかな曲面となるための条件は、

$$a < \frac{1}{\tan \psi} - \frac{\kappa}{\tan \psi} + \tau \quad (3.4)$$

ここで、 a は回転の速度、 $\kappa > 0, \tau > 0$ はそれぞれその点における base curve の曲率、捩率を表す。

3.2.2 base curve が直線の場合

円織面 $V(t, \theta) = \gamma(t) + \cos \theta a_1 + \sin \theta a_2$ において,

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

とする。すなわち、base curve を直線、特に今回は x 軸だと考える。すると、

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

となる。この $\gamma'(t)$ に対して、 z 軸方向に ψ だけ傾けて、回転させたものを a_3 とする。

$$a_3 = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin at \sin \psi \\ \cos at \sin \psi \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

ここで、 a は回転の速度として捉えることができる。 $\psi \rightarrow \psi + \frac{\pi}{2}$ として、これを a_1 とする。

$$a_1 = \begin{pmatrix} \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) \\ \sin at \sin(\psi + \frac{\pi}{2}) \\ \cos at \sin(\psi + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin at \cos \psi \\ \cos at \cos \psi \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

最後に a_2 を、 $a_2 \cdot a_2 = 1, a_2 \cdot a_1 = 0, a_2 \cdot a_3 = 0$ となるように定める。すると、

$$a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos at \\ \sin at \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

したがって、 a_3 方向を x 軸に関して回転させることによりできる円織面は、次のように表すことができる。

$$V(t, \theta) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin at \cos \psi \\ \cos at \cos \psi \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos at \\ \sin at \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

このとき、各パラメータにおいて偏微分を行うと、

$$\begin{aligned} V_t &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ a \cos at \cos \psi \\ -a \sin at \cos \psi \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 \\ a \sin at \\ a \cos at \end{pmatrix} \\ V_\theta &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin \theta \begin{pmatrix} -\sin \psi \\ \sin at \cos \psi \\ \cos at \cos \psi \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos at \\ \sin at \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$V(t, \theta) = (x(t, \theta), y(t, \theta), z(t, \theta))$ として考えれば, 次のように書き表すことができる.

$$\begin{pmatrix} V_t \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t & y_t & z_t \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

すると, 曲面片に関する定義より, この行列の階数が2であればよい. したがって, V_t と V_θ が線形独立であるための条件, もしくはこの行列のどれか1列を除いてできる行列の行列式が0でないための条件を導けばよい. $x_\theta = (\sin \theta \sin \psi)x_t$ より,

$$\begin{aligned} \sin \theta \sin \psi (a \cos \theta \cos at \cos \psi + a \sin \theta \sin at) &= -\sin \theta \sin at \cos \psi - \cos \theta \cos at \\ \sin \theta \sin \psi (-a \cos \theta \sin at \cos \psi + a \sin \theta \cos at) &= -\sin \theta \cos at \cos \psi + \cos \theta \sin at \end{aligned} \quad (3.13)$$

これを a について解くと,

$$a = \frac{1}{\tan \psi}$$

したがって, これを否定し,

$$a \neq \frac{1}{\tan \psi}$$

これが, 曲面片として存在するための条件であるが, 自己交叉の有無までは言及されていない. $a > \frac{1}{\tan \psi}$ のとき, singularity (微分不可能な点) は存在しないが, 自己交叉を含んでいる状態となる. したがって, base curve が直線の場合, 曲面片として存在し, 自己交叉を含まない曲面となるための最終的な条件は, 以下のようになる.

$$a < \frac{1}{\tan \psi} \quad (3.14)$$

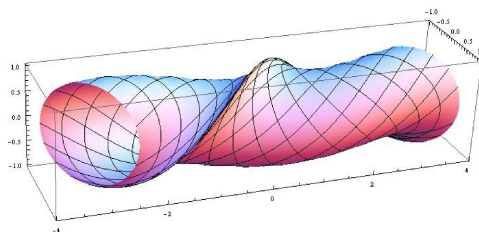


図 1: $\psi = \frac{\pi}{4}, a = 1$ ($a = \frac{1}{\tan \psi}$)

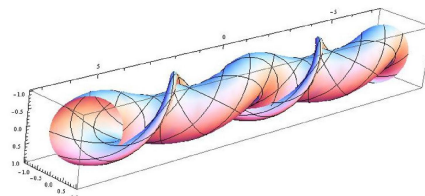
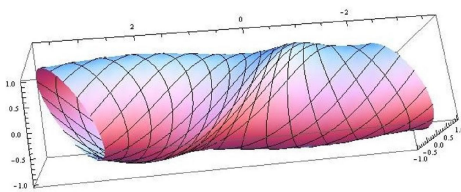


図 2: 左: $\psi = \frac{\pi}{6}, a = 1$ ($a < \frac{1}{\tan \psi}$), 右: $\psi = \frac{\pi}{3}, a = 1$ ($a > \frac{1}{\tan \psi}$)

3.2.3 base curve が平面曲線の場合

base curve が曲線の場合、直線の場合の条件に加えて、曲率や捩率に関する条件の考察を行う。まずは base curve を平面曲線、つまり、捩率 $\tau = 0$ とする。曲率に関する条件を考察するにあたって、ある点における曲線の近傍を円の一部分として考え、曲率半径に注目することで条件を求める。

まず、base curve $\gamma(t)$ を円として次のように定義する。

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{t}{r} \\ r \sin \frac{t}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

ここで、 $r > 0$ は定数半径である。すると、

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

次に、この $\gamma'(t)$ に対して、 z 軸方向に ψ だけ傾けて、回転させたものを考え、 a_3 とする。base curve が直線のときは前節 3.2 で分かっているので、それを用いて求める。すると、 $(1,0,0)$ を xy 平面上の単位円周上の点として考えれば、その点における接ベクトル方向は $(0,1,0)$ となる。よって、 $(1,0,0)$ を z 軸方向に ψ だけ傾けたものを、 $(1,0,0)$ に関して回転させ、その回転軸を接ベクトル方向へと xy 平面における線形変換（回転）によって移動させると考えればよい。したがって、

$$\begin{aligned} a_3 &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{t}{r} + \frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin at \sin \psi \\ \cos at \sin \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} & -\cos \frac{t}{r} & 0 \\ \cos \frac{t}{r} & -\sin \frac{t}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin at \sin \psi \\ \cos at \sin \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \cos \psi - \cos \frac{t}{r} \sin at \sin \psi \\ \cos \frac{t}{r} \cos \psi - \sin \frac{t}{r} \sin at \sin \psi \\ \cos at \sin \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.17)$$

そして、 $\psi \rightarrow \psi + \frac{\pi}{2}$ として、これを a_1 とする。

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) - \cos \frac{t}{r} \sin at \sin(\psi + \frac{\pi}{2}) \\ \cos \frac{t}{r} \cos(\psi + \frac{\pi}{2}) - \sin \frac{t}{r} \sin at \sin(\psi + \frac{\pi}{2}) \\ \cos at \sin(\psi + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{r} \sin \psi - \cos \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ -\cos \frac{t}{r} \sin \psi - \sin \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ \cos at \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

最後に a_2 を、 $a_2 \cdot a_2 = 1, a_2 \cdot a_1 = 0, a_2 \cdot a_3 = 0$ となるように定める。すると、

$$a_2 = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{r} \cos at \\ \sin \frac{t}{r} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

したがって、円織面は次のように表すことができる。

$$V(t, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \frac{t}{r} \\ r \sin \frac{t}{r} \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{r} \sin \psi - \cos \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ -\cos \frac{t}{r} \sin \psi - \sin \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ \cos at \cos \psi \end{pmatrix} + \sin \theta \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{r} \cos at \\ \sin \frac{t}{r} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

このとき、各パラメータにおいて偏微分を行うと、

$$\begin{aligned} V_t &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \cos \frac{t}{r} \sin \psi + \frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \sin at \cos \psi - a \cos \frac{t}{r} \cos at \cos \psi \\ \frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \sin \psi - \frac{1}{r} \cos \frac{t}{r} \sin at \cos \psi - a \sin \frac{t}{r} \cos at \cos \psi \\ -a \sin at \cos \psi \end{pmatrix} \\ &\quad + \sin \theta \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \cos at - a \cos \frac{t}{r} \sin at \\ \frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \cos at - a \sin \frac{t}{r} \sin at \\ a \cos at \end{pmatrix} \\ V_\theta &= -\sin \theta \begin{pmatrix} \sin \frac{t}{r} \sin \psi - \cos \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ -\cos \frac{t}{r} \sin \psi - \sin \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ \cos at \cos \psi \end{pmatrix} + \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{r} \cos at \\ \sin \frac{t}{r} \cos at \\ \sin at \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.21)$$

ここで、任意の点において、自己交叉をもたず、なめらかな曲面となる条件を求めるためには、 $\sin \theta = 1 (\cos \theta = 0)$ を考えれば十分である（証明については次節で述べる）。

$$\begin{aligned} V_t &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \\ \cos \frac{t}{r} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \cos at - a \cos \frac{t}{r} \sin at \\ \frac{1}{r} \sin \frac{t}{r} \cos at - a \sin \frac{t}{r} \sin at \\ a \cos at \end{pmatrix} \\ V_\theta &= \begin{pmatrix} -\sin \frac{t}{r} \sin \psi + \cos \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ \cos \frac{t}{r} \sin \psi + \sin \frac{t}{r} \sin at \cos \psi \\ -\cos at \cos \psi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.22)$$

前節 3.2 と同様に、

$$\begin{pmatrix} V_t \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_t & y_t & z_t \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \end{pmatrix}$$

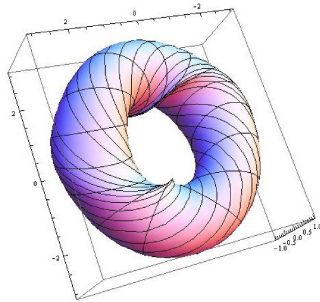
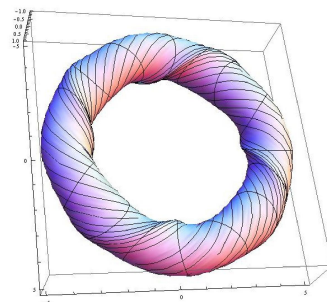
として、まずは線形従属となる条件を求める。行列式を 0 として a について解くと、

$$a = \frac{1}{\tan \psi} + \frac{1 \cos at}{r \tan \psi} \quad (3.23)$$

ゆえに、base curve が平面曲線の場合、曲面片として存在し、自己交叉を含まない曲面となるための最終的な条件は、以下のようになる。

$$a < \frac{1}{\tan \psi} - \frac{\kappa}{\tan \psi} \quad (3.24)$$

ここで、曲率半径の考え方より、曲面の任意の点における曲率 κ について、 $\kappa = \frac{1}{r}$ となる。

図 3: $\psi = \frac{\pi}{6}, a = 1, r = 2$ 図 4: $\psi = \frac{\pi}{6}, a = 1, r = 4$

3.2.4 base curve が空間曲線の場合 (定理 1 の証明)

次に, base curve が空間曲線, つまり, $\tau \neq 0$ の場合を考えることで, 定理 1 の証明とする.

base curve を弧長パラメータ t を用いて, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とする. すると,

$$\begin{aligned}
 e_1(t) &= \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) \\
 e'_1(t) &= \gamma''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t)) \\
 e_2(t) &= \frac{1}{\kappa(t)} e'_1(t) \\
 e'_2(t) &= -\kappa(t) e_1(t) + \tau(t) e_3(t) \\
 e_3(t) &= e_1(t) \times e_2(t) \\
 e'_3(t) &= -\tau(t) e_2(t) \\
 \kappa(t) &= |e'_1(t)| \\
 \tau(t) &= \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t), \gamma'''(t))}{\kappa(t)^2}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

ここで, $e_1(t)$ を $e_3(t)$ 方向に ψ だけ傾けたものを a_3 と考えて, この a_3 を $e_1(t)$ を軸として回転させることによりできる円織面について, なめらかな曲面となる条件を導く. すると, a_3 は次のような式で表すことができる.

$$a_3 = \cos \psi e_1(t) + \sin at \sin \psi e_2(t) + \cos at \sin \psi e_3(t) \tag{3.26}$$

そして, $\psi \rightarrow \psi + \frac{\pi}{2}$ として, これを a_1 とする.

$$a_1 = -\sin \psi e_1(t) + \sin at \cos \psi e_2(t) + \cos at \cos \psi e_3(t) \tag{3.27}$$

最後に a_2 を, $a_2 \cdot a_2 = 1, a_2 \cdot a_1 = 0, a_2 \cdot a_3 = 0$ となるように定める. すると,

$$a_2 = \cos at e_2(t) - \sin at e_3(t) \tag{3.28}$$

したがって, 円織面は次のように表すことができる (ここでは e_1 のように, 助変数を省略する).

$$V(t, \theta) = \gamma(t) + \cos \theta \{-\sin \psi e_1 + \sin at \cos \psi e_2 + \cos at \cos \psi e_3\} + \sin \theta \{\cos at e_2 - \sin at e_3\} \tag{3.29}$$

このとき、各パラメータにおいて偏微分を行うと、

$$\begin{aligned}
 V_t &= e_1 + \cos \theta \{-\kappa \sin at \cos \psi e_1 + (a \cos at \cos \psi - \kappa \sin \psi - \tau \cos at \cos \psi) e_2 \\
 &\quad + (\tau - a) \sin at \cos \psi e_3\} \\
 &\quad + \sin \theta \{-\kappa \cos ate_1 + (\tau - a) \sin ate_2 + (\tau - a) \cos ate_3\} \\
 V_\theta &= -\sin \theta \{-\sin \psi e_1 + \sin at \cos \psi e_2 + \cos at \cos \psi e_3\} + \cos \theta \{\cos ate_2 - \sin ate_3\}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

ここで、任意の点において、自己交叉をもたず、なめらかな曲面となる条件を求めるためには、 $\sin \theta = 1 (\cos \theta = 0)$ を考えれば十分である理由を述べる。今回は a_3 を先に決めて、それをもとに a_1 と a_2 を決めている。さらに、 a_2 に関しては曲線における e_2 と同じ方向となるように定めているので、 a_1, a_2, a_3 が必ずしも右手系となるとは限らない。すると、円織面の式から、 a_2 の方向が最大となるのは $\sin \theta = 1 (\cos \theta = 0)$ であり、特異点に関してこの部分が一番の要因となることは明らかである。つまり、この部分において自己交叉を含まず、なめらかとなれば、曲面全体も自己交叉を含まず、なめらかとなる。したがって、 $\sin \theta = 1 (\cos \theta = 0)$ とすれば、

$$\begin{aligned}
 V_t &= (1 - \kappa \cos at) e_1 + (\tau - a) \sin ate_2 + (\tau - a) \cos ate_3 \\
 V_\theta &= \sin \psi e_1 - \sin at \cos \psi e_2 - \cos at \cos \psi e_3
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

さらに、 V_t と V_θ が線形独立となる条件を求めるために、まずは線形従属となる条件について外積を用いて考える。線形従属（2つのベクトルが平行）となるのは外積が0となる場合なので、

$$V_t \times V_\theta = 0 \tag{3.32}$$

について考え、その解を否定することで線形独立となるための条件を導く。外積を計算すると、

$$\begin{aligned}
 V_t \times V_\theta &= \{\cos at \cos \psi (1 - \kappa \cos at) + (\tau - a) \cos at \sin \psi\} e_2 \\
 &\quad + \{\sin at \cos \psi (1 - \kappa \cos at) + (\tau - a) \sin at \sin \psi\} e_3 = 0
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

e_2 と e_3 は線形独立なので、

$$\begin{aligned}
 \cos at \cos \psi (1 - \kappa \cos at) + (\tau - a) \cos at \sin \psi &= 0 \\
 \sin at \cos \psi (1 - \kappa \cos at) + (\tau - a) \sin at \sin \psi &= 0
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

これを a について解くと、

$$a = \frac{1}{\tan \psi} - \frac{\kappa \cos at}{\tan \psi} + \tau \tag{3.35}$$

したがって、base curve が空間曲線の場合、曲面片として存在し、自己交叉を含まない曲面となるための最終的な条件は、以下ようになる。

$$a < \frac{1}{\tan \psi} - \frac{\kappa}{\tan \psi} + \tau \tag{3.36}$$

□

下の図は、base curve を常螺旋 (helix) とした際の例である。

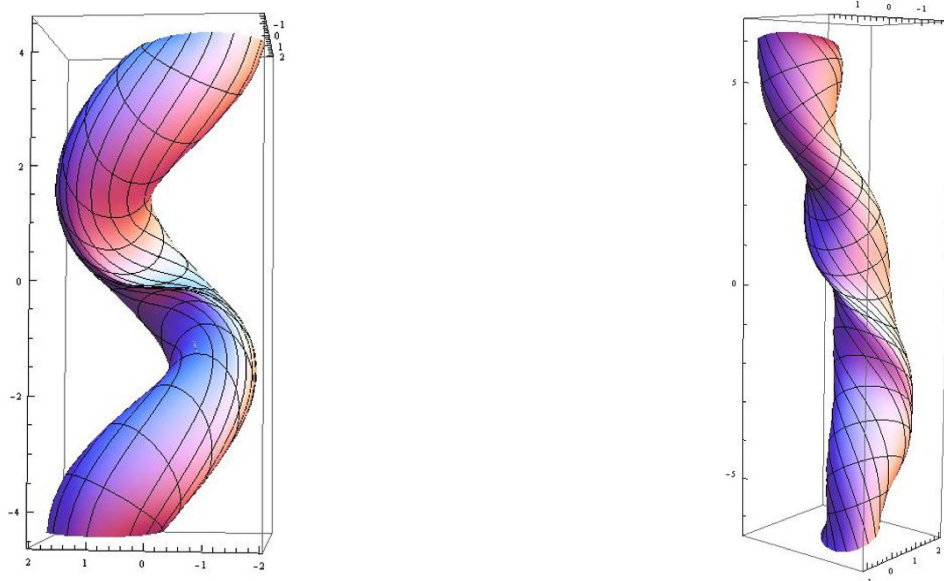


図 5: 左 : $\psi = \frac{\pi}{6}, a = 1, \kappa = \frac{1}{2}, \tau = \frac{1}{2}$ ($a = \frac{1}{\tan \psi} - \frac{\kappa}{\tan \psi} + \tau$)

図 6: 右 : $\psi = \frac{\pi}{6}, a = 1, \kappa = \frac{1}{10}, \tau = \frac{3}{10}$ ($a < \frac{1}{\tan \psi} - \frac{\kappa}{\tan \psi} + \tau$)

3.2.5 参考文献

- [3-1] S. Izumiya, K. Saji, N. Takeuchi: *Circular surfaces*, Adv. Geom. 7 (2007), 295-313
- [3-2] N. Takeuchi: *A closed surface of genus one in E^3 cannot contain seven circles through each point*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 145-147
- [3-3] 荻上紘一,「多様体」, 共立出版, 1977 年.

参考文献

- [1] 伊藤仁一, 教育学研究科における数学の研究 -直観幾何学的視点から-, 京都大学数理解析研究所講究録 1657 (2009), 157-176.
- [2] 伊藤仁一, 教育学研究科における数学の研究 -修士論文指導における 2, 3 の事例-, 京都大学数理解析研究所講究録 1711 (2010), 204-209.
- [3] 伊藤仁一. 教育学部・教育学研究科における数学の研究 - 2 つの事例 -, 京都大学数理解析研究所講究録 1867 (2013), 171-179.