

Twisting Formulas of Jones polynomials

九州大学理学部 横田佳之

$K \in S^3$ 内の knot とし, $V \in K$ 内部に含む
Solid torus とする。 V の meridian disk と K の geometric
及び algebraic intersection number $\in \rho$, λ を表す。
 $K \in V$ の meridian disk に沿って twist したとき, その
Jones 多項式がどの様に変化するのかが調べる。

定義. (Jones polynomial)

$$(i) V_0(t) = 1$$

$$(ii) t^{-1} V_{\searrow}(t) - t V_{\swarrow}(t) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) V_{\rightarrow}(t)$$

定理. $K \in \mu$ 回 twist して得られる knot $\in K_\mu$
とせよ。このとき,

$$V_{K_\mu}(t) = \sum_{i=0}^{[\rho/2]} t^{\lambda_i \mu} \psi_i(t)$$

が成立。ただし

$$\begin{aligned} \lambda \text{ が偶数} &\Rightarrow \begin{cases} (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) \cdot \psi_i(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}] \\ 4\mu_i = 3\lambda^2 - 4i(i+1) \end{cases} \\ \lambda \text{ が奇数} &\Rightarrow \begin{cases} \psi_i(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}] \\ 4\lambda_i = 3\lambda^2 - 3 - 4i(i+2). \end{cases} \end{aligned}$$

Sketch of Proof: G_n は次の $a_i^{\pm 1}, e_i$ で生成される群とする。

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ a_i \end{array} & , & \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ a_i^{-1} \end{array} & , & \begin{array}{c} i \quad i+1 \\ \diagup \quad \diagdown \\ | \quad | \\ \diagdown \quad \diagup \\ e_i \end{array} \end{array}$$

さらに, $\mathbb{C}G_n$ の ideal I_n は

$$a_i - A^{-1} - A e_i,$$

$$a_i^{-1} - A - A^{-1} e_i,$$

$$e_i^2 + (A^2 + A^{-2}) e_i$$

で生成されるものとする。

$$\mathbb{C}G_n / \text{reg. iso} \otimes \mathbb{I} \cong J_n \text{ (Temperley Lieb algebra)}$$

となる。 J_n は semisimple であることが知られているが、その既約表現を $p_{n,i}, 0 \leq i \leq [n/2]$ で表す。

さて、任意の $\varepsilon \in G_n$ に対し、その closure $\hat{\varepsilon}$ は S^3 内の knot または link となる。このとき、次のことが

知られてゐる。

定理(村上).

$$V_{\xi}(t) = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} w_i \operatorname{Tr}(p_{n,i}(\xi))$$

こゝで, w_i は 適当な weight で,

$$\begin{cases} (t^{\frac{1}{2}} + t^{-\frac{1}{2}}) w_i \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}] & \text{if } n \text{ is even} \\ w_i \in \mathbb{Z}[t^{\pm \frac{1}{2}}] & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

さて 今 $K = \hat{\xi}$, $\xi \in G_n$ とする。

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1})^n$$

とすると,

$$K_{\mu} = \widehat{\Delta^{\mu} \cdot \xi}$$

とすることに注目する。 Δ^{μ} は G_n の center に含まれ

るので, $p_{n,i}(\Delta^{\mu})$ は scalar とする。

また, 表現 $p_{n,i}$ の構成法から

$$p_{n,i}(\xi) = 0 \quad \text{for } n > \lfloor p/2 \rfloor$$

が導びかれ, 定理の結果を得る。