

数学ソフトウェアを利用した中学校・高等学校・大学の実践

石川 理雄
Michio Ishikawa

1 はじめに

「先生の話は生徒の理解と感動が中心にあり、それで感銘を受けました。」

2018 年講演終了後、ある参加者から発表 pdf 送付の依頼、これは返信メールの言葉。大変光栄、伝えたいことが伝わった。また、講演中にこにこして、時々頷き、講演後声をかけてくださった参加者。面白い問題を教えていただいた。

グラフ電卓を毎年数台購入し、高校生に貸与してはじめての実践。情熱を傾け、いろいろな困難を乗り越えてきた。とてもうれしい出来事であった。

本研究会に参加し、子どもたちの顔が見える実践報告があってもよいのではないかと感じていたので、2018 年に発表した。今回はその続きであり、「理解と感動」を中心に、数学ソフトウェア（主にグラフ電卓）を利用した実践の報告である。この「理解と感動」にはもう一つ大事なことがある。それは最後に述べることにする。

「数学の新しい扉を開くきっかけになった」「公式を丸暗記して計算していくだけで、考えるという作業を省いている場合が多い」「普段の私の勉強に対する姿勢を見つめ直す良い機会となりました」「僕は数学が嫌いだった... いつの間にか数学が好きになっていた... 数学が楽しくなったし、学びたいと思うようになった」など、生徒・大学生の声は示唆に富む。本稿における生徒・大学生の声は原文ママである。

2 グラフ電卓を利用した主な実践例

中学・高校は部活動など授業後、大学は (1)～(6) を授業実践。

(1) 絶対値記号のついた関数のグラフの探究 (2018 年 RIMS 発表)

(2) $x^n - 1$ の因数分解の探究

(3) 物体の投げ上げ、花火大会（動的描画機能）

(4) アルファベットを作ろう（動的描画機能）

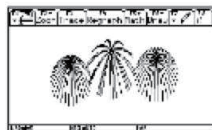
(5) 歩いて関数を理解しよう（グラフ電卓と超音波距離センサー）

(6) 関数グラフアート

(7) 太陽光を集めよう（附属高校シンポジウムにおいて公開授業）

など、数学ソフトウェア（グラフ電卓など）を必要とする教材。適宜発表の場を設ける。

機器は Voyage200, Naoco 社の短期貸出を利用。附属高校のとき、大学の学長裁量経費等により機器が充実した。



3 グラフ電卓について

グラフ電卓（Texas Instruments, TI-Nspire CXII CAS）は、数式処理、グラフ（関数、媒介表示、極方程式、数列、微分方程式、3D）、幾何、スプレッド・シート、統計、データ収集の機能があり、それらをドキュメントとして保存でき、財務計算やプログラミングもできる。（NaocoのHPより）

実践では主に Voyage200（販売終了）を使用。Voyage200 は、式を入力してキーを押すと、アニメーション（飛行機雲）のようにグラフを描く。操作は簡単である。Voyage200 は現場の声を聞いて開発されたと聞いている。Voyage200 の後継器や他の数学ソフトウェアは、一瞬にしてグラフを描画。動的描画機能がなかったら、グラフ電卓の実践はなかったかもしれない。

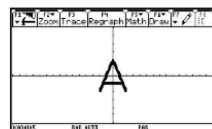
4 アルファベットを作ろう（媒介変数）

大学の授業（Voyage200）：自由課題

Activity

アルファベット 26 文字を描こう。式やパラメータなど工夫してください。ただし、式は xt , yt それぞれ一行ずつ一組とする。

一人の大学生が一週間で作った。書き順が違うのではないかと
いうと、改良版を作った。



5 関数グラフアート

「関数グラフアートとは、関数を用いて表現するアート・パフォーマンスです。生徒や学生は、知っている関数を用いて電卓の画面に思い思いの絵を描いていきます。数式の使い方のうまさ（数学力）と、美しさ（芸術性）とが合わさった世界、それが関数グラフアートです。」（福井工業高等専門学校 HP、関数グラフアート全国コンテストより）

Activity

関数 $y = f(x)$ のグラフを使って、絵を描こう。

※「絶対値記号のついた関数のグラフの探究」はすでに学び、グラフ電卓の操作には慣れている。

※ グラフ電卓を利用した授業では操作の説明は 20 分まで、操作で躓いたらすぐに質問する、教師は喋りすぎないことに留意する。

＜数学的活動の例＞

(1) 「 y 軸に平行な直線を描きたい」: $y = f(x)$ の形では, y 軸に平行な直線は描けないことを実感. 直線の傾きを大きくすれば, グラフは y 軸に平行な直線に近づく.

(2) 関数 $y = f(x)$ の定義域と値域を考える.

(3) 「円を描きたい」: 円とは何か → 原点中心半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ ($\because$ 三平方の定理) → 中心 (a, b) 半径 r の円 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ($\because$ 三平方の定理または原点中心の円を平行移動) → $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ を「 $y =$ 」に変形する.

わからないことは自分で調べ, 質問をし, いろいろなことを能動的に学んでいく.

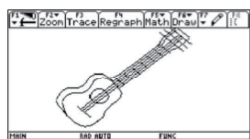
＜中学生と高校生の学んだこと・感想＞

[1] 中等教育学校 (6 年生のとき, 国際数学オリンピック銀メダル)

中学 1 年のとき, 第 9 回関数グラフアート全国コンテスト課題部門最優秀賞
作品名「アコースティックギター」(Voyage200)

※ 直線と曲線を滑らかにつなぐとき, 曲線の接線 (微分) を考えた.

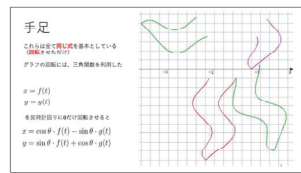
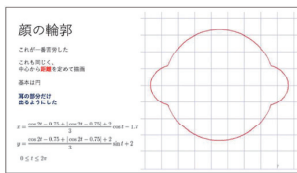
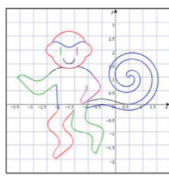
中学 2 年のとき, 第 10 回関数グラフアート全国コンテスト課題部門優秀作品
作品名「沼津からの富士山」(TI-Nspire CX CAS)



[2] 中等教育学校 (6 年生のとき, 国際数学オリンピック金メダル)

中学 1 年のとき, 第 11 回関数グラフアート全国コンテスト制限部門優秀作品
作品名「face」(TI-Nspire CX CAS)

中学 2 年のとき, 第 12 回関数グラフアート全国コンテスト課題部門優秀作品
作品名「媒介モンキー」(PC) 下図は生徒の発表資料の一部



＜「媒介モンキー」の感想＞

今回, グラフアートを作るに当たり, 年賀状の画像にしようと思って制作した. また, 自分のグラフアート技能の向上もねらった.

前は制限部門で応募したが, 今回はより表現力の高い媒介変数型グラフを使ってグラフアートを作ろうと思った. そして, できるだけ数式を少なく, シンプルに作ろうと思った. 今回の作品は, 芸術性があるというよりは, 技術がたくさん詰まった作品になった.

たと思う。

グラフアートの一番難しいところは、自分の考えている曲線を数式にすることだった。数式は無限にたくさんあるものだが、いざ作ってみようとなると、自分の知っている数式はかなり少ないことに気付いた。自分の知っている数式をどのように組み合わせ、どう表現していくかがかなり大変だった。しかし、どんな数式を組み合わせで描こうか考えるのはパズルみたいで楽しかった。思い通りの曲線が画面に現れたときは、本当にうれしかった。

関数グラフアートカンファレンスでは、多くの先生方にどのようにしてこの作品を作ったか説明した。前回も参加したのでどのような雰囲気かはわかっていたが、やはり人前で発表するのは緊張するもの。しかしできるだけわかりやすく発表しようと心掛けた。また、こんなすごい数式を使ってるんだよ、とも説明した。その甲斐あって、特別賞をとることができた。しかし、最優秀賞をとった作品を見ると、やはり技術力だけでなく、芸術性もあった。こんな素晴らしい作品を作る人がいるのだなあとと思った。自分の作品はただサルが1匹いるだけだが、ほかの作品は構図を考えているなど凝っている作品もあり、すごいと思った。次回は、もっと芸術性のある作品を作りたいと思った。

[3] 附属高校1年生

第1回関数グラフアート全国コンテスト 作品名「紅い鷗の唄」(Voyage200)

<感想>

私は、グラフ電卓を使っていくなかで、“考える数学”を知ることが出来ました。それまで私は、数学とは与えられた問題を解いて答えを出すものだと考えていたので、その答えにたどりつくまでの過程にあまり興味もなかったし、またそれはたいして重要なことでもないだろうと思っていました。でも、グラフ電卓を使っていくうちにその過程こそが数学の面白さではないかと思うようになりました。

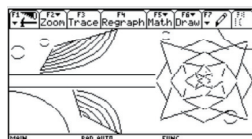
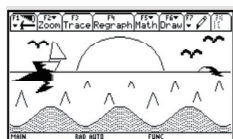
先生に聞いてしまえば簡単なことだったのかもしれないけど、小さなことでも自分で見つけていくところが数学の楽しさにつながりました。

グラフアートを作ったときは試行錯誤をたくさん繰り返しました。自分の描きたいグラフを描く方法の一つではなく、色々な式を試して、失敗して、考えて、だんだんと目指す形に近づけていきました。普段、教科書で学んでいる数学では、答えが違ったらそれは間違いであると思っていたけど、グラフアートを描くなかではその間違いが成功を見つける鍵になりました。

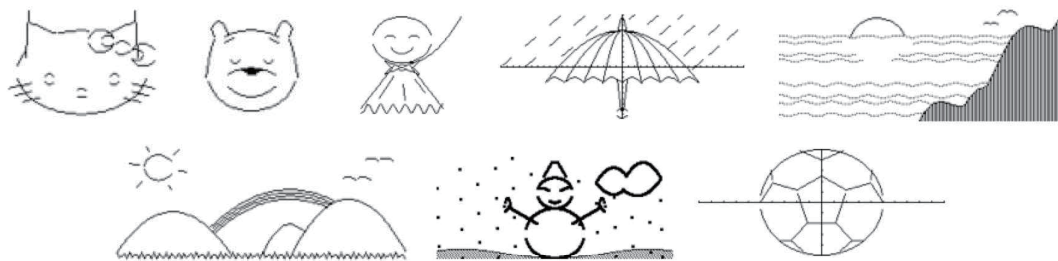
グラフ電卓は数学の新しい扉を開くきっかけになったと思います。

[4] 附属高校1年生

第1回関数グラフアート全国コンテスト 作品名「宇宙に輝け、地球という名の花」(Voyage200)



＜大学生の作品＞（Voyage200，制作日数は一週間で短い）



＜大学生の学んだこと・感想＞

[1] 私が特に楽しかったのは，グラフアートだ．面白い形のグラフになる式を知っていたとしても，わざわざ手で計算して絵を描こうとする人はいない．グラフ電卓だからこそ，できることだと思う．数学が嫌いな生徒でも興味を示すだろうと思う．自分が意図した図形を描こうとするとどうしても数学をしなくてははいけなくなる．しかし，絵をつくる，完成するという目標があるので楽しめたのだと思う．数学が数字ではなく絵として形を表す．自然界の形というものは，すべて数式で表現できるのだと感じた．

[2] 図を描くときに，「交点はどこだろう？」と自主的にノートで計算することもあるし，いろんなグラフの中から式を選択する際に悩み考えることができて，自分から勉強に取り組むことができた．

単純に「おもしろい!!」としか言えない．

[3] このグラフアートのレポートは意外に集中してとりくめた．しっかりと時間をとってやることができ，自分としても満足のいくものができた．だいぶ気力と体力を使いました．

[4] $y = f(x)$ の簡単な式をいくつかあわせることで，かわいい絵やむずかしい絵をかくことができる．

描きたい絵を考え，一つずつ数式に直して行って，グラフになおしてまた数式を作り直すの繰り返しで，考える力，計算力がつき，生徒にやらせたら夢中になるだろうと思った．

何回も計算を繰り返すことで数学，計算，考えることの楽しさをあらためて学んだ．

まずもし，グラフアートを授業でとり入れれば，生徒たちは夢中になってやることで，数学の楽しさ，計算の楽しさを学ぶと思った．そして数学が嫌な生徒も減っていき，また，自分の描きたい絵に，もし3次関数や双曲線などまだ授業で教えてもらっていない曲線などを必要とした時に，生徒は自分で考え，苦しみ，そして，教科書を参考にするによって，新しい知識をえることができ，その生徒の力の向上にもつながってとてもいいと思います．

また，円の式でも $x^2 + y^2 = a^2$ を $y =$ の形に直したり， x の範囲を考えることで描く場所を変えていったりと，とてもよい復習にもなって，まだまだ身に付いていない生徒

には、必要な式を作るにはその式がどのようなものか理解しなければいけないので、苦手をなくすのにも効果があると思いました。

がんばって作っていると、とても楽しくなってきて、考えるのも苦労じゃなくなってきました。

[5] 今回のグラフアートは、授業としてでなく、普段の私の勉強に対する姿勢を見つめ直す良い機会となりました。

[6] グラフから式を組み立てることの難しさと、自分が思い描いたとおりのグラフを表現できたときの喜びを学びました。

最初は簡単にできるかなと思っていましたが、やっていくうちになかなかイメージ通りの図ができなくて、とても苦労しました。でも、自分のイメージ通りの図ができたときの喜びは、何にもかえられないものでした。身近で数学を感じるということは、なかなかありませんが、このグラフアートは、数少ない身近に感じる数学のように思いました。このグラフアートによって数学嫌いになる子が減るのではないかという期待を僕も持ち始めました。

[7] さまざまな関数を組み合わせることで、とてもおもしろい絵ができるという楽しさと関数をおもしろいと感じさせる方法を学びました。

思った通りになってくれないときはとても腹がたつが、思ったとおりの関数を出すことができたときはとても心地よい。今まで、数学の授業で創作なんてやってこなかったので、自分が中高生のときにさわれていたらなあと思う。

グラフについての意識も高まった。だいたいこんな感じのグラフになるんじゃないの？とは思いつつ勘違いがあったりして感心するのもあった。

図ができあがっていくにつれてとてもワクワクしていった。数学でこんなワクワクを味わう機会なんてあんまりないんじゃないかなあと思った。

[8] 今回のグラフアートで学んだ事は数学を楽しむという事です。電車の中とかで、いろいろ考えるのはとてもおもしろかったです。

今回のように、数学を使って何かを作るという事はとてもいい事だという事がわかりました。理由は、生徒の興味をひきつける事が出来るし、数学の苦手な子も、今回のような簡単な絵ならかけてしまうからです。

将来、この機械を使っの授業をやっていただきたいと思います。数学の教師として、数学の面白さを伝えれるような授業をやっていききたいと思います。

6 グラフ電卓利用の授業について、大学生の学びと感想

[1] グラフ電卓を使って、一言で言えば楽しい数学ができた。グラフ電卓で扱った題材は、自分でやり方、方針を決めて、自分なりの解決を図るもので、大学受験までにやってきた模範解答のない数学だった。これまでは解決するために自分の知っている公式、定理を使っていかに簡単に問題を解くかを考えてきた。そして解決まで行かなくても部分点を狙って解答をかいたりもした。しかしグラフ電卓では、自分なりの方法で簡単に

しなくても目ざすものを作り上げるということをした。これにはかなり自分の考えというのが重要になり、また計算は電卓がやってくれるので考えることに集中できた。それは、グラフアートや花火でよく表れていた。

自分の描きたいものを頭に浮かべ、この線はどんな関数を使えば理想通りにいくかなど、時間を忘れて考え、またそれを楽しめた。グラフが理想に近づくたびに期待がふくらみ、もうすぐだという感覚に興奮させられた。

[2] グラフ電卓の授業では、今まで学んできた数学とは少し違った数学を学んだ気がします。

特にグラフアートの時間はとても楽しかった気がします。今まで数学をいかにも「勉強」という感じでとらえていましたが、グラフアートでは、「遊び」という感覚で数学を楽しむことができたと思います。色々な関数を使い、どのような絵を作ろうかと考えながら、絵を完成させていくのはとても楽しいものでした。発表の場があるのもとてもよかったと思います。

その他にも、因数分解では、その答えにあっと驚いて、「じゃあ、これはどうだろう」と色々因数分解してみたりもしました。そして、自分なりに法則を作れたときは、とてもうれしかったです。

このグラフ電卓の授業は、数学を、心から楽しめ、自分が数学が好きであることを再認識できる、すばらしい教材であったと思います。無邪気な気持ちで楽しむことができました。

[3] まず初めにやった式からグラフを推測するという普通の数学ではなく、グラフから式を作るというものは印象的である。いろいろな式を作り、推測し、どんどんグラフを近づけていく。知っているグラフをかけ合わせることで今まで知らなかったグラフを作る。これは今までの数学者が偉大な発見をしたときのような気分になれた。又、今までは、数学者が、この法則を見つけるのに何十年もの歳月をかけたというようなことを聞くと、なぜそんなにまでと思っていたが、自分も寝る間も惜しんでグラフ作りに没頭していたことを考えると、その気持ちがわかるとともに、数学のおもしろさを知ることができたと思う。

またグラフアートというのもこのグラフ電卓ならではの面白さであったと思う。今まではグラフと絵なんて全くの別もので接点なんて全然ないものだと思っていたが、作っていて感じたのが、数学式のすごさである。前に、いろいろなグラフを考えたとおかげもあるが、自分が描きたいと思った線をほとんど不自由なく表すことができ、本当に絵を描いているような楽しさがあった。また、完成したときは、何もない状態から何かを作り上げるという楽しみも味わうことができた。

$x^n - 1$ の因数分解では、まさに発見する喜びを実感することができた。 $x^{20} - 1$ くらいまで計算しておいて、そこから何か規則性はないか考え、何かそれらしいものがあれば、続きを計算していき、本当に合っているかをたしかめる。それが途中で合わなくなってしまうこともあったが、どんなときでも、成り立つことが分かった時は本当に自分が数学者であるかのように思えた。

花火大会では、前のグラフアートとは全く異なり t の変化を考える必要があった。前

のグラフアートでは、同じ図形を絵で表すことができたが、今回は時間とともにグラフが変化するという、まるでコンピューターグラフィックでもあつまっているかのように感じることでとてもよい経験になりおもしろかった。

最後の授業の時にもいろいろな使い方が説明されたが、このグラフ電卓の奥の深さにはびっくりした。たぶん高校の授業の1つとして、グラフ電卓という時間があっても十分やっていけると思うし、数学を好きな学生を増やせるのではと思った。

今回このグラフ電卓をつかって何回か授業をしたが、推測する楽しみ、発見する楽しみ、作り上げる楽しみ、などいろいろな楽しみを味わえ、又、楽しみながらも、今まで以上に数学を学ぶことができた実感でき、とても有意義な授業であった。

[4] 約2ヶ月にわたって、このグラフ電卓の授業を受けてきたのだが、非常に有意義な時間を過ごせたと思う。最初の絶対値のグラフは、この電卓になれていなかったせいか思ったようなグラフを描くことができず、イライラしていたこともあった。しかし、他のいろいろな機能を知るにつれて、そういったイライラは自然と消え、むしろこのグラフ電卓を使ってグラフを描くことが楽しくなってきた。たとえば、グラフアートである。教師はグラフの描きかたや注意点だけを教え、あとは自由な発想でグラフを描くことが出来たので非常に楽しめたと思う。またそれぞれの学生がつくった個性あふれるグラフアートを見ることができ、また表現の多様性にも気づくことができ、おもしろかったと思う。因数分解においては、公式としては高校のときに習ったものの、ただ丸暗記しただけであった。この授業では因数分解するだけではなく、その結果に何か規則性を見つけようという興味深い内容であり、これは今の学校教育の中で重要なことであると思う。なぜなら、現在はまだ公式を丸暗記して計算していくだけで、考えるという作業を省いている場合が多いからだ。それぞれの内容について深く考える作業こそが数学を学習していく上で必要であると思う。これは最後にやった軌跡の問題にもあてはまる。

私自身、一番楽しむことができ、また印象に残っているのは、投げ上げ関連の単位である。前回の感想のときにも述べたが、この問題は数学的な面からでも、物理学的な面からでも考えることができるユニークな教材である。この投げ上げは高校の物理で学んだが、あまりグラフ的には考える機会はなかったもので、投げ上げの問題を新たな視点から考えることができ、よかったと思う。つまり、この投げ上げの問題のみならず、ケプラーの法則、そして花火の課題に関して言えば、グラフ電卓は数学の授業ではもちろん、物理の授業でも使用できる優れた機械なのである。

最初に配られたプリントにある「自分で考え、実験して、数楽をすることによって、本当の数学の面白さを体験する」という目標は自己評価でいえば、達成できたと思う。作業の中では何度も何度も式を修正して、自分が表したいグラフに近づけるようにした。もちろんその作業はそう簡単にできるものではない。失敗を繰り返すことで、自分の表したいグラフをつくりあげていったのである。この作業こそが非常に楽しかったと自分自身では思う。もし、今後グラフ電卓に出会う機会があれば、もっと他の機能を学びたいと思う。そして自分が教員になったときには、授業あるいは有志の研究会など何らかの形でこのグラフ電卓を生徒に紹介したいと思う。

7 おわりに

「大学入試がなかったら、数学はどんなに面白い科目になるだろうと思う。江戸時代多くの人が、身分の垣根を越えて、数学に熱中したことを思うとその感が強い。点数によって簡単に序列をつけやすいために、数学はその本来の意味とは違って、この日本では、序列化の道具として使われてきた。一数学者として忸怩たる思いがある。」（四日市大学関孝和数学研究所長・京都大学名誉教授 上野健爾）

いわゆる進学校で、大学進学を希望しない生徒がいた。「課題を大量に出され、泣きながらやりました。もう勉強したくない」と母親から聞いた。クラス分けはテストの点数による上位クラス・下位クラス。公式を暗記して問題を解き、テストで良い点を取り、大学入学試験に合格することが目標、大学の合格実績をあげることが中心になっていた。

「ラグビーのボールを蹴る最適位置について」（微分・代数・幾何の三つのアプローチ）、「眠るように回るこま」（区分求積法で定積分を定義、微分と積分のドラマチックな出逢い。放物線こまの重心を求め厚紙でこまを作り回す）、「微分とは何か」（一円玉の縁を顕微鏡で見る）など数学のよさや魅力を伝える工夫をするが、教科書中心の一斉授業の主体は教師、生徒は受動的な理解であろう。紙幅の都合上詳細は割愛する。

グラフ電卓を利用すると、自分で考え、試行錯誤し、受動的な勉強から能動的な学びになり、「教師が教える」から「生徒が自ら学ぶ」へと変化する。

何かに熱中する、集中するという時間をもつこと、ワクワク感は大事。人から与えられたものよりも自分が作り出すことに達成感がある。学んだこと、創作したものを発表する。発表の場は、多様な考え方に気づき、お互いのよさを認め合い、ともに高め合う暖かい雰囲気がある。

紙と鉛筆、そして数学ソフトウェアの利用により、遊ぶように学び、考えることを楽しみ、学びがより深く豊かになれば、数学が文化として根づいていくのではないだろうか。そのような学びの体験がよりよい社会をつくるのではないだろうか。

「自ら考える楽しさを知ることができた」（高校生）

「この授業がとても楽しくて、いいと思った。」（大学生）

「来年もできれば下の学年の人たちにもこの授業をやってあげてほしいです。僕が感じた感動をこれから勉強していく人たちにも感じてほしいです。ほんとうに楽しかったです。」（大学生）

生徒・大学生のすばらしさを感じ、勇気づけられた実践であった。感謝。

講究録目次の最後に、「本共同研究は、大学・研究所・高専・高校・中学といった幅広い機関の研究者・教育者が集まり、知見を共有することができる貴重な場となっております。」とある。この拙い実践が数学ソフトウェア利用の参考になれば幸いである。

最後に、2018年に発表した高校生の感想を再度紹介する。グラフ電卓を利用した学びの可能性をひらく出逢いであった。

意欲的な高校生は部活動で活躍。暇そうな生徒二人に声をかけ、放課後、グラフ電卓の実践を開始。一人の生徒が見学に来た。普段にこにこして口数が少ない。「やってみたい？ グラフ電卓を貸してあげるよ」、彼は黙って頷いた。成績は中くらい、数学は苦手、多分数学が嫌い。この生徒を理解し感動した感想である。

はっきり言って、僕は数学が嫌いだった。ただひたすらに速さと正確さを求めるだけの面白くない教科だと思っていた。

そんな時、友達の一人がなんとも不思議な形をした線が載っているプリント^aを持っていた。なんとそれは関数のグラフだというのだ。関数といえば、比例・反比例・一次関数・二次関数くらいしか知らなかった僕は、そんな形が関数のグラフとして表現できることに感動した。それが僕の MTT^bとの出会いだった。

それから僕の数学観は大きく変わった。数学とは論理であり、テストで最も問われているのは思考力だ、と思い始めた。すると、つまらないと思っていた数学が、なんとも面白味のあるものに思えてきた。そして、僕はいつの間にか数学が好きになっていた。

MTT は、単位がつくわけではないし、大学入試の出題範囲に入っているわけでもない。はっきり言って遊びの一種である。しかし、数学で遊ぶことが数学への興味を湧き立たせ、更には思考力をも養うことになった。もはや受験に関係ないとは言い難いだろう。

興味の無いことを学びたいとは決して思わないだろう。数学に限らず、あらゆる分野で「楽しむ」ということが、その分野を学ぶ上で最も大切なことは言うまでもない。MTTを経験して、僕は数学が楽しくなったし、学びたいと思うようになった。MTT は、今、最も必要とされている教育スタイルと言えるだろう。

^a絶対値記号のついた関数のグラフの探究 (2018 年 RIMS 発表)。

^bMathematics Thinking with Technology の略。グラフ電卓を利用した学びのこと。

数学ソフトウェア（グラフ電卓など）を利用することにより、『生徒』の「理解と感動」。そして『教師』の生徒に対する「理解と感動」、生徒に対する見方が変わった。

子どもが主人公

愛知教育大学の飯島康之先生には、附属高校のときいろいろお世話になった。心より感謝申し上げたい。

参考文献

- [1] 石川理雄：グラフ電卓がひらく数学教育 ― 自ら考え、数学を楽しむ ―，愛知教育大学出版会，2007
- [2] 石川理雄：グラフ電卓を活用した中学校・高等学校・大学の実践，京都大学数理解析研究所講究録 2105, pp.79-88, 2019