

Orientable 3-manifolds fibering over closed surfaces and codimension 2 fibrators

筑波大学 数学系 知念 直紹 (Naotsugu Chinen)

1. これまでの経過と結果

$p: M \rightarrow B$ を locally compact ANR 空間の間の proper な写像とする。写像 p が空間 X に対して *approximate homotopy lifting property* (AHLP) を持つとは、任意の B の open cover ε と、 $H_0 = p \circ h$ を満たす 2 つの写像 $h: X \rightarrow M$ と $H: X \times [0, 1] \rightarrow B$ に対して、写像 $\tilde{H}: X \times [0, 1] \rightarrow M$ が存在して $\tilde{H}_0 = h$ を満たし、 $p \circ \tilde{H}$ と H は ε -close となるときにいう。proper な写像 $p: M \rightarrow B$ がすべての空間に対して AHLP を持つとき、写像 p は *approximate fibration* という。[CD1] から、写像 $p: M \rightarrow B$ が approximate fibration で B が path-connected ならば、すべてのファイバーは shape 同値になることが知られている。

M を $(n+k)$ -manifold、proper な写像 $p: M \rightarrow B$ で各 $p^{-1}(x)$ はある closed n -manifold N_x の shape type をもつとする。[D1] と [D4] から、もし $k \leq 2$ ならば、空間 B は k -manifold with (possibly empty) boundary になることが知られている。 $k \leq 2$ とき、つぎの問題が考えられる。

Question. いつ proper な写像 $p: M \rightarrow B$ が approximate fibration になるか?

Daverman は次のような定義を導入した。closed connected n -manifold N が *codimension k fibrator* (あるいは *codimension k orientable fibrator*) であるとは、かつてな $(n+k)$ -manifold (あるいは orientable) から有限次元な空間 B への proper な写像 $p: M \rightarrow B$ で、もし各ファイバーは N と shape 同値ならば、写像 p が approximate fibration になるときにいう。この 10 年間色々な人々によって codimension 2 fibrators は研究されてきた。

1 次元球面 S^1 は codimension 2 fibrator でないことが知られている。そこで、orientable S^1 -bundle over closed surface を調べてみることにした。[D2, Example 6.1] の中で、Daverman はすべての orientable S^1 -bundle over the torus T は

codimension 2 fibratorでないことを証明した。もちろん、すべての twisted S^1 -bundle over the Klein bottle K は codimension 2 fibratorでないことは知られている。最初につぎのことを示した。

Proposition 1.1. N を S^1 -bundle over the torus T with obstruction b とする。このとき、

ある素数 p が存在して、 p^2 は b を割る $\Leftrightarrow$ cyclic covering $N \rightarrow N$ が存在する。

これは [D2, Corollary 6.3] が間違っていることを示している。またすぐにつぎのことがわかる。

Corollary 1.2. N を S^1 -bundle over the torus T with obstruction b とする。もしある素数 p が存在して p^2 は b を割れるならば、 N は codimension 2 orientable fibrator でない。

同様な方法から、つぎのことがわかる。

Proposition 1.3. N を S^1 -bundle over the Klein bottle K with obstruction b とする。もし b が奇数ならば、cyclic covering $N \rightarrow N$ が存在する。よって、 N は codimension 2 orientable fibrator でない。

群 G が hyperhopfian であるとは、かつてな準同型写像 $f: G \rightarrow G$ に対して、もし $f(G)$ が正規群で $G/f(G)$ が巡回群ならば、準同型写像 f は同型になるときにいう。

R. Daverman は次の定理を示した。

[D2, Theorem 6.4]. N を Nil structure を持つ向き付け可能な 3 次元閉多様体で、 S^1 -bundle over the torus T でないとする。このとき、 N は hyperhopfian fundamental group をもつ。よって N は codimension 2 orientable fibrator になる。

P. Scott の結果から、 N を S^1 -bundle over the Klein bottle K with nonzero obstruction b とすると、 N は Nil structure を持つことが知られている。よって、この Daverman の結果はまちがっていることを示している。よって、以前示したつぎの結果は重要になる。

Theorem 1.3. N を S^1 -bundle over the Klein bottle K with obstruction b と

する。もし $b \neq 0$ が偶数ならば、 N は codimension 2 orientable fibrator である。

[D2, Theorem 6.4] が間違っていることにより、もし $b \neq 0$ が偶数ならば、 N は hyperhopfian fundamental group をもつことはわからない。よって、つぎの問題が考えられる： N を S^1 -bundle over the Klein bottle K with obstruction b とする。もし $b \neq 0$ が偶数ならば、 N は codimension 2 fibrator か？

まず最初に次のことを示した。

Theorem 1.4. N を S^1 -bundle over the Klein bottle K with obstruction b とする。もし $b = 2^r$ ならば、 N は codimension 2 fibrator である。

Proposition 1.1 から次の予想が考えられる。

Conjecture 1.5. N を orientable S^1 -bundle over the Klein bottle K with obstruction b とする。

(1) もしすべての素数 $p \geq 3$ に対して p^2 は b を割れないならば、 N は codimension 2 fibrator である。

(2) もしある素数 $p \geq 3$ に対して p^2 は b を割るならば、 N は codimension 2 fibrator でない。

2. 証明の方針

Proposition 1.1 の略証明. $(\Rightarrow)$ N を S^1 -bundle over T with positive obstruction b とし、ある素数 p が存在して p^2 は b を割るとする。すると $H_1(N)$ は $Z \times Z \times Z_b$ と同型になることが知られている。まず、2つの全射な準同型 $d_1: Z \rightarrow Z_{p^2}$ と $d_3: Z_b \rightarrow Z_p$ 、単射な準同型 $k: Z_p \rightarrow Z_{p^2}$ 、trivial な準同型 $t: Z \rightarrow Z_{p^2}$ が存在する。この準同型の合成を $r = d_1 \times t \times (k \circ d_3): Z \times Z \times Z_b \rightarrow Z_{p^2}$ とする。この全射を使って、 $\text{Ker}(r \circ h)$ から導かれる p^2-1 cyclic covering $\theta: N(1) \rightarrow N$ が得られる。ここで $h: \pi_1(N) \rightarrow H_1(N)$ は Hurewicz 準同型とする。あとは、 $N(1)$ が S^1 -bundle over T with obstruction b であることを示せば良い。

$(\Leftarrow)$ 省略 $\square$

Proposition 1.2 の略証明. N を orientable S^1 -bundle over K with odd obstruction b とする。すると $H_1(N)$ は $Z \times Z_4$ と同型になることが知られている。

よって、 $((p_N)_* \circ h)^{-1}(Z \times 0)$ から導かれる 4-1 cyclic covering $\theta : N(1) \rightarrow N$ が存在する。ここで $h : \pi_1(N) \rightarrow H_1(N)$ は Hurewicz 準同型で、 $p_N : N \rightarrow K$ は射影とする。あとは $N(1)$ が orientable S^1 -bundle over K with obstruction b であることを示せば良い。 $\square$

N を closed orientable manifold とする。proper 写像 $p : M \rightarrow B$ が N -Like であるとは、各ファイバーが N と shape 同値のときにいう。proper 写像 $p : M \rightarrow B$ の mod 2 continuity set C_p' とは

$$C_p' = \{x \in B : x \text{ の近傍 } U \text{ と shape retraction } R : p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(x) \text{ が存在して、すべての } x' \in U \text{ に対して } \deg\{R|_{p^{-1}(x')} : p^{-1}(x') \rightarrow p^{-1}(x)\} = 1 \in \mathbb{Z}_2\}$$

と定義する。

つぎの Lemma が Theorem 1.4 の本質的な所である。

Lemma 2.1. N' を orientable S^1 -bundle over T with obstruction $4b$ 、 N を orientable S^1 -bundle over the Klein bottle K with obstruction b とする。さらに、すべての素数 $p \geq 3$ に対して p^2 は b を割れないとする。もし次の条件を満たすならば、 N は codimension 2 fibrator である。

(☆) もしすべての orientable 5-manifold からの N' -like 写像 $p : M \rightarrow B$ で p の mod 2 continuity set が B と一致するならば、 p が approximate fibration である。

Theorem 1.4 の略証明. $b=2^r$ のとき、orientable S^1 -bundle N' over T with obstruction $4b$ が Lemma 2.1 の条件(☆)を満たすことを示せば良い。 $\square$

REFERENCES

- [C1] N. Chinen, *Finite groups and codimension-2 fibrators*, Topology Appl. To appear.
- [C2] N. Chinen, *Manifolds with finite cyclic fundamental groups and codimension 2 fibrators*, Topology Appl. To appear.
- [C3] N. Chinen, *Products of manifolds with nonzero Euler characteristic and codimension-2 fibrators*, preprint.
- [CD1] D. Coram and P. Duvall, *Approximate fibrations*, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 275- 288.
- [CD2] D. Coram and P. Duvall, *Approximate fibrations and a movability condition for maps*, Pacific J. Math. 72 (1977), 41-56.

- [D1] R.J. Daverman, *Submanifold decompositions that induce approximate fibrations*, Topology Appl. **33** (1989), 173-184.
- [D2] R.J. Daverman, *3-manifolds with geometric structure and approximate fibrations*, Indiana University Math. J. **40** (1991), 1451-1469.
- [D3] R.J. Daverman, *Hyperhopfian and approximate fibrations*, Compositio Math. **86** (1993), 159-176.
- [E] D.B.A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc. (3) **16** (1966), 369-383.
- [H] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Stud., No.86, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ, 1976.
- [J] W. Jaco, *Lectures on Three Manifolds Topology*, Conference boards of Math., No.43, 1980.
- [M] J.R.Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley Publ. Co., New York, 1984.
- [MS] S. Mardesic and J. Segal, *Shape theory*, North-Holland Publishers, Amsterdam, 1982.
- [S] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, (McGraw Hill, New York, 1966).
- [Sc] P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 147-238.

E-mail : naotsugu@mail.wics.ne.jp