

Kostant の generalized exponents と Young 図形.

東大・理 岡田聡一 (Soichi Okada)

東大・理 松沢淳一 (Jun-ichi Matsuzawa)

古典群においては, その表現論的な現象を Young 図形という言葉で言い直すことができます。その結果, 古典群の表現論に組合せ論的な側面が出てくるのですが, その一つの例として Kostant の generalized exponents を Young 図形を使って計算する試みを紹介します。

generalized exponents を Young 図形で計算することによって, それまでわからなかった generalized exponents の性質がわかったり, 逆に, 新しい Young 図形の変形操作のようなものが出てくるというような事があります。既にこの題材に關しては本講究録に報告([Ma 1])を出しておりますので, 表現論的な背景および概略につきましては, そちらを参照していただき, また詳細につきましては [Ma 2] を参照していただきたいと思います。本篇では [Ma 1] において詳しくふれなかった "prespecialization" という Young 図形の操作を中心に

解説したいと思います。

§1. Generalized exponents の定義.

G を複素連結 reductive なリ-群, $\mathfrak{g}$ をそのリ-環, S を $\mathfrak{g}$ 上の多項式環とする。 G の S への作用を $(g \cdot f)(x) := f(g^{-1} \cdot x)$, $(g \in G, f \in S, x \in \mathfrak{g})$ で定める。 ここで $g^{-1} \cdot x$ は adjoint 作用とする。 S の G 部分加群 H を次のように定義する。

$$H := \{ f \in S \mid \partial \cdot f = 0, \partial: \mathfrak{g} \text{ 上の定数係数微分作用素で, } \partial \cdot 1 = 0 \text{ かつ } \partial \text{ の作用は } G \text{ 作用と可換.} \}$$

H の元は G 調和多項式とよばれ、通常調和多項式のリ-群への拡張である。 S^G を S の G 作用に関する不変式環とすると次の定理が成り立つ。

[定理] (Kostant, [Kos])

写像 $S^G \otimes H \rightarrow S$ ($f \otimes h \mapsto fh$) は G 加群としての同型を与える。

従って S の G 加群としての構造は、 H のそれを知ればわかることになる。(S^G の構造はわかっているから)

さて ρ を G の有限次元複素既約表現とし、 H の k 次同次成分 H^k における ρ の重複度を $[H^k: \rho]$ とかき、

$$P_H(\rho, t) := \sum_{k=0}^{\infty} [H^k: \rho] t^k$$

とおくと $p_H(p, t)$ は多項式になり、その次数は p の最高なイトの、単純ルートに関する高士に等しいこと加わっている。
([kos]).

[定義] (Kostant) p を G の有限次元複素表現、

$p = \sum_{i=1}^r c_i p_i$ を p の既約分解とし、 $p_H(p, t) = \sum_{i=1}^r c_i p_H(p_i, t)$ とする。 $p_H(p, t)$ を係数1の単項式の和で書いたとき、即ち

$$p_H(p, t) = t^{m_1(p)} + t^{m_2(p)} + \dots + t^{m_s(p)}$$

としたとき、 $m_1(p), \dots, m_s(p)$ を p に関する *generalized exponents* という。

たとえば $p_H(p, t) = 2t^2 + t^3 = t^2 + t^2 + t^3$ のとき、その *generalized exponents* は 2, 2, 3 である。

§2. $GL(n, \mathbb{C})$ の *generalized exponents* と *prespecialization*.

$GL(n, \mathbb{C})$ の既約有理表現の同値類と Young 図形のペア (α, β) で $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ となるものの集合とは 1対1に対応する。(ここで $l(\alpha)$ は α の長さ)。それを $[\alpha, \beta]_{GL(n)}$ と書くことにすると、 α と β の大きさ $(|\alpha|, |\beta|)$ が等しくないときには $p_H([\alpha, \beta]_{GL(n)}, t) = 0$ となる。等しい時には次が成立する。(詳しくは [Ma1] または [Ma2] 参照)

[定理 2.1] $\alpha, \beta \in$ $|\alpha| = |\beta|$, $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ をみたす Young 図形

とする。

$$\mathcal{P}_{GL(n)}(\alpha, \beta) := \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \text{ は Young 図形 s.t. } |\xi| = |\eta|\}$$

$$\begin{aligned} \cdot \pi_{GL(n)}(S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta)) &= \text{sgn}_{GL(n)}(\xi, \eta) \pi_{GL(n)}(S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta)) \\ \text{sgn}_{GL(n)}(\xi, \eta) &= \pm 1 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \cdot \pi_{GL(n)}(S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta)) &= \text{sgn}_{GL(n)}(\xi, \eta) \pi_{GL(n)}(S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta)) \\ \text{sgn}_{GL(n)}(\xi, \eta) &= \pm 1 \end{aligned}} \right\}$$

ここで $\pi_{GL(n)}$ は GL の specialization homomorphism, $S_{\xi, \eta}(\alpha, \beta)$ は GL の universal character と呼ばれるもの. ($[K]$, $\varepsilon = \varepsilon$ は $[\xi, \eta]_{GL}$ と書かれている)

また,

$$a_k := \sum_{(\xi, \eta) \in \mathcal{P}_{GL(n)}(\alpha, \beta)} \sum_{\substack{\mu, \tau \\ |\mu| = k \\ \ell(\mu) \leq n}} \text{sgn}_{GL(n)}(\xi, \eta) LR_{\xi, \tau}^{\mu} LR_{\tau, \eta}^{\mu} \quad (k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

ここで $LR_{\xi, \tau}^{\mu}$ は Littlewood-Richardson 係数 (cf [LM])

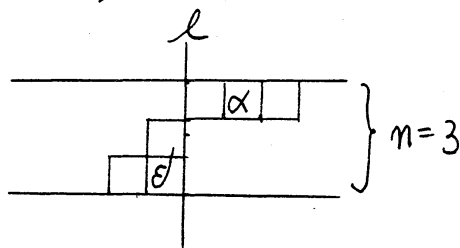
とする。

$$p_H(\alpha, \beta)_{GL(n)}(t) = \left\{ \prod_{i=1}^n (1-t^i) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right\}.$$

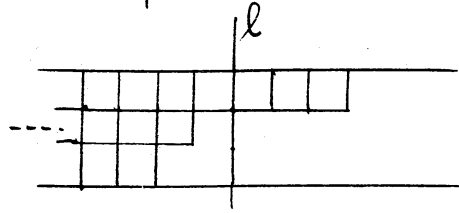
この定理の $\mathcal{P}_{GL(n)}(\alpha, \beta)$ を prespecialization と呼ぶ。この元は以下のようにして求められる。ここでは例で説明する。

$n=3$, $\alpha = (3) = \square\square\square$, $\beta = (2, 1) = \begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square \end{smallmatrix}$ とする。

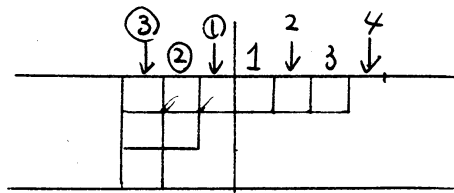
1) α, β を中央線 ℓ の左右に並べる。ただし β は 180° 回転しておく。



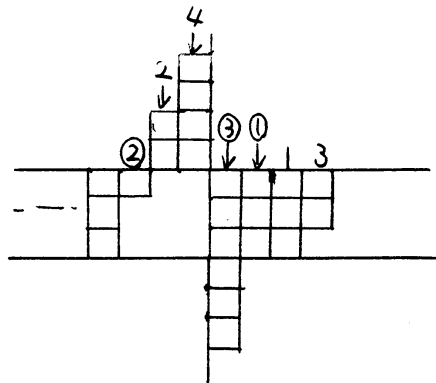
(2) l の左側については、 β をぬいた部分を考える。



(3) l の右側と左側とから、それぞれ同じ数だけの列を任意に選ぶ。ただし右側については、列がない所も 0 個のマス加あぞと思うことにする。例えば右側から 2 列と 4 列を、左側から 1 列と 3 列を選んだとする。

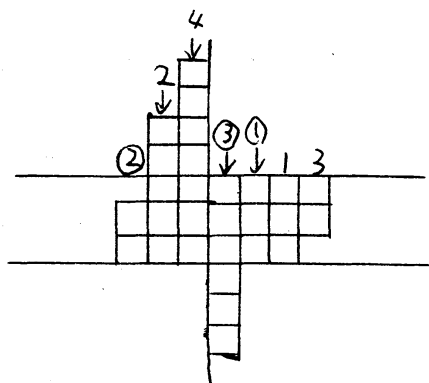


(4) 列というしを入れかえることにより、選んだ列をそれぞれ l に關して反対側の l 寄りに運ぶ。このとき各列は右に 1 つ移動する毎に 1 つ増え、左に 1 つ移動する毎に 1 つ減るとする。ただし、選ばれなかった列の相対的順番と、同じ側にあった選ばれた列の相対的順番は変えないとする。



上にとび出した分はマイナスに数える。

(5) 左側の部分については $n=3$ から各列を引いて Young 図形をつくる。



その右側を π , 左側を 180° 回転したものを η とする。

$$(\pi, \eta) \in \mathcal{P}_{GL(3)}([\text{III}, \text{IV}]).$$

符号 $\text{sgn}_{GL(3)}(\pi, \eta)$ は以上の操作において列の入れかえの回数を m としたとき $\text{sgn}_{GL(3)}(\pi, \eta) = (-1)^m$.

以上の操作を各 $k \in \mathbb{Z}_{20}$ について任意の k 列を選んで行なう。 $\mathcal{P}_{GL(m)}(\alpha, \beta)$ の元を加えて求める。

これをまとめると、以下のようになる。

α, β を $l(\alpha) + l(\beta) \leq n$ をみたす Young 図形とする。 α, β の転置図形 (transpose, conjugate) を

$$\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_r), \quad \bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_s) \quad \text{とする。}$$

$$(a_1, a_2, \dots) = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2 - 1, \dots, \bar{\alpha}_r - r + 1, -r, -r-1, \dots)$$

$$(b_1, b_2, \dots) = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2 - 1, \dots, \bar{\beta}_s - s + 1, -s, -s-1, \dots)$$

$$\delta = (0, 1, 2, \dots) \quad (\text{いずれも無限列})$$

とにおいて、 $k \in \mathbb{Z}_{20}$ と自然数列 $(i \in) i_1 < i_2 < \dots < i_k, (j \in) j_1 < j_2 < \dots < j_k$ に対して、Young 図形の対 $g_{i_1 \dots i_k, j_1 \dots j_k}(\alpha, \beta)_m =$

(3.7) を

$$\bar{\xi} = (n+1-b_{j_k}, n+1-b_{j_{k-1}}, \dots, n+1-b_{j_1}, a_1, a_2, \dots, \hat{a}_{i_1}, \dots, \hat{a}_{i_2}, \dots) + \delta.$$

$$\bar{\eta} = (n+1-a_{i_k}, n+1-a_{i_{k-1}}, \dots, n+1-a_{i_1}, b_1, b_2, \dots, \hat{b}_{j_1}, \dots, \hat{b}_{j_2}, \dots) + \delta.$$

($\wedge$ は Σ の数字を $\wedge$ にくと示す)

で定めろ。このとき、

[命題 2.2]

$$P_{GL(n)}([\alpha, \beta]) = \left\{ g_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k}(\alpha, \beta)_n \mid \begin{array}{l} k \in \mathbb{Z}_0, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \end{array} \right\}$$

$$\text{sgn}_{GL(n)}(g_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_k}(\alpha, \beta)_n) = (-1)^{k + \sum_{p=1}^k (i_p + j_p)}$$

前の例では $g_{2,4,1,3}(\text{四}, \text{田})_3 = ((4,4,3,1,1,1), (3,3,2,2,2,1,1))$

§3. $Sp(2m, \mathbb{C})$ の generalized exponents と prespecialization.

Σ は $2m$ レフテックス群 $Sp(2m, \mathbb{C}) = \{ A \in GL(2m, \mathbb{C}) \mid {}^t A J A = J, \$

$J = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -1 & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \downarrow n \\ \uparrow n \end{matrix} \}$ の有限次元複素既約表現の同値類は長さ n 以下の Young 図形と 1 対 1 に対応する。これを $\lambda_{Sp(2n)}$ とかく。

(λ は $l(\lambda) \leq n$ をみたす Young 図形)。このとき、

[定理 3.1]

λ を $l(\lambda) \leq n$ をみたす Young 図形とする。

$$P_H(\lambda_{\text{Sp}(n)}, t) = \left\{ \prod_{i=1}^n (1-t^i) \right\} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu \in P_{\text{Sp}(n)}(\lambda)} \text{sgn}_{\text{Sp}(n)}(\mu) \left(\sum_{\substack{(C, D) \\ |C|=k \\ l(C) \leq 2n}} L R_{\frac{2C}{2D}, \mu}^{2C} \right) \right) t^k \right\}.$$

$$\text{ここで } P_{\text{Sp}(n)}(\lambda) = \left\{ \mu \mid \pi_{\text{Sp}(n)}(\mu_{\text{Sp}}) = \text{sgn}_{\text{Sp}(n)}(\mu) \lambda_{\text{Sp}(n)} \right\}.$$

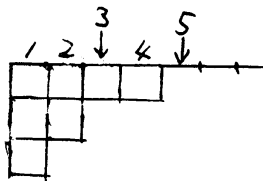
$\pi_{\text{Sp}(n)}$ は Sp の specialization homomorphism, μ_{Sp} は Sp の μ に対応する universal character $([k-T])$. また.

Young 図形 $k = (k_1, \dots, k_n)$ に対し $2k = (2k_1, \dots, 2k_n)$.

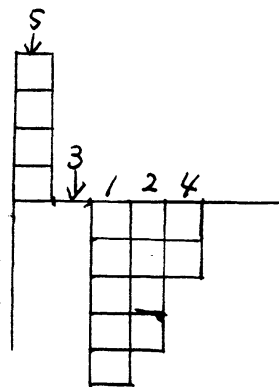
$P_{\text{Sp}(n)}(\lambda)$ を λ の prespecialization とよぶ。これは次の操作により求められる。これも例から説明を始めた。

$$n=5, \lambda = (4, 2, 1) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & & \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}$$

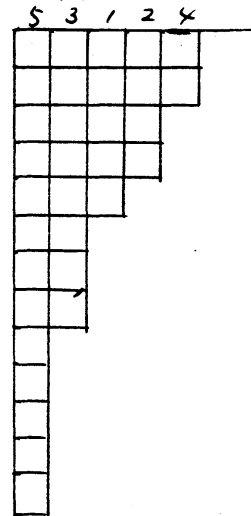
(1) Young 図形 λ の列から任意にいくつかの列を選ぶ。ただし右方向には 0 の列がずっと並んでいると考える。ここでは 3 列と 5 列を選ぶ。



(2) 選んだ列を左端に寄せ、それを逆順に並べかえる。このとき各列は右に 1 つ移動する毎に 1 つ増え、左に 1 つ移動する毎に 1 つ減る。



(3) 選んだ列については、まずの数を $2m+2=8$ から引く、
ただし上にとび出した部分はマイナスとする。



こうして得られた図形を μ とする。

$$\mu \in P_{Sp(6)}(\lambda).$$

また、(2)での列の入れかえの回数と選んだ列の数の和を s とする。

$$\text{sgn}_{Sp(6)}(\mu) = (-1)^s.$$

以上をまとめる。

$$\bar{\lambda} = (k_1, k_2, \dots, k_{\lambda_1}, 0, 0, \dots), \quad \delta = (0, 1, 2, \dots)$$

$$(a_0, a_1, \dots) = \bar{\lambda} - \delta = (k_1, k_2 - 1, k_3 - 2, \dots)$$

整数 $(0 \leq) i_1 < i_2 < \dots < i_r$ に對し、Young 図形 $p_{i_1, \dots, i_r}^{Sp(m)}(\lambda)$ を、

$$p_{i_1, \dots, i_r}^{Sp(m)}(\lambda) = (2m+2-a_{i_r}, 2m+2-a_{i_{r-1}}, \dots, 2m+2-a_{i_1}, a_0, a_1, \dots, \hat{a}_{i_1}, \dots, \hat{a}_{i_r}) + \delta$$

とする。("A" は数字の消去) となる。

[命題 3.2]

$$P_{Sp(m)}(\lambda) = \{ p_{i_1, \dots, i_r}^{Sp(m)}(\lambda) \mid r \geq 0, 0 \leq i_1 < \dots < i_r \}$$

$$\text{sgn}_{Sp(m)}(p_{i_1, \dots, i_r}^{Sp(m)}(\lambda)) = (-1)^{r + \sum_{j=1}^r i_j}.$$

§4 $SO(m, \mathbb{C})$ の generalized exponents と prespecialization.

$\lambda_{SO(m)}$ ($m = 2n+1$ or $2n$, $\ell(\lambda) \leq n$) を Young 図形 λ に對し

する $SO(m, \mathbb{C})$ の表現とする。このとき、

[定理 4.]

$$P_H(\lambda_{SO(m)}, t) = F(m, t) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{\mu \in P_{SO(m)}} \text{sgn}_{SO(m)}(\mu) \left(\sum_{\substack{(c, \lambda) \\ |c|=k \\ l(2(c)) \leq m}} L R_{2(c)}^{\overline{2(c)}} \right) \right) t^k \right\}.$$

$$\text{ここで } F(m, t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (1-t^{2i}) & \text{if } m=2n+1. \\ (1-t^n) \prod_{i=1}^{n-1} (1-t^{2i}) & \text{if } m=2n. \end{cases}$$

$$P_{SO(m)}(\lambda) = \left\{ \mu \mid \pi_{SO(m)}(\mu_{SO}) = \text{sgn}_{SO(m)}(\mu) \lambda_{SO(m)} \right\}$$

$\pi_{SO(m)}$ は specialization homomorphism, μ_{SO} は Young 図形 μ に
対応する universal character ([K-T])

$P_{SO(m)}(\lambda)$ については Sp の場合とほとんど同じで、違いは
 Sp の例の (3) で $2m+2$ から引く所を m から引くことと、 sgn の
計算で S が列の入れかえの回数のみになることである。

従って

$$\bar{\lambda} = (k_1, k_2, \dots, k_{\lambda_1}, 0, 0, \dots), \quad \delta = (0, 1, 2, \dots)$$

$(a_0, a_1, a_2, \dots) = \bar{\lambda} - \delta$ とする。整数 $(0 \leq) i_1 < i_2 < \dots < i_r$

に対し、

$$\overline{p_{i_1, \dots, i_r}^{SO(m)}}(\lambda) = (m - a_{i_r}, m - a_{i_{r-1}}, \dots, m - a_{i_1}, a_0, a_1, \dots, \hat{a}_{i_1}, \dots, \hat{a}_{i_r}) + \delta$$

としたとき、

[命題 4.2]

$$P_{\text{so}(2n+1)}(\lambda) = \left\{ p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{so}(2n+1)}(\lambda) \mid r \geq 0, 0 \leq i_1 < \dots < i_r \right\}$$

$$P_{\text{so}(2n)}(\lambda) = \left\{ p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{so}(2n)}(\lambda) \mid \begin{array}{l} \ell(\lambda) < n \text{ a.e. } r \geq 0, \ell(\lambda) = n \text{ a.e. } \\ r \geq 1, \quad 0 \leq i_1 < \dots < i_r \end{array} \right\}$$

$$\text{sgn}_{\text{so}(m)}(p_{i_1, \dots, i_r}^{\text{so}(m)}) = (-1)^{\sum_{j=1}^r i_j}$$

参考文献.

- [K] K. Koike : On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups ; to appear in Adv. Math.
- [K-T] K. Koike and I. Terada : Young-diagrammatic methods for the representation theory of the classical groups of type B_n, C_n, D_n ; J. Algebra, 107 (1987) 466 - 511.
- [Kos] B. Kostant : Lie group representations on polynomial rings ; Amer. J. Math, 85 (1963), 327-404.
- [M] I.G. Macdonald : Symmetric Functions and Hall Polynomials ; Oxford Univ. Press, Oxford, 1979.
- [Ma1] 松沢淳一 : 古典複素素リ一群の generalized exponents, Young 図形と universal character と Kostant の generalized

exponents ; 京大数理解講究録 630. (1987).

[Ma2] J. Matsumura: On the generalized exponents of classical lie groups ; to appear in Comm. Alg.