

平均が既知の正規分布の分散の同時推定と

母数に線形不等式制約のある場合の Stein 推定量

慶大 工学部 篠崎信雄

張元宗

I. 平均が既知の正規分布の分散の同時推定 James &

Stein (1961) が多変量正規分布の母平均の推定問題で、通常の推定量よりも 'よい' 推定量を与えて以来、いくつかの母数と同時に推定するとき、通常の推定量を改良する問題が研究されている。(Clevenson & Zidek, 1975, Hudson, 1978 等)。

ここでは、平均が既知の正規分布の分散の同時推定問題を考える。平均が既知の場合、正規分布の分散の推定問題は次のように述べられる。 X という確率変数が θY , ここで Y は自由度 n の χ^2 変量として分布している, として分布しているとき, θ を推定する。平均二乗誤差を基準にすると, $X/(n+2)$ は, cX なる形 (ここで c は定数) の推定量の中で最良のものであり, 許容的推定量である (Hodges & Lehmann, 1951)。

いま X_i , $i=1, \dots, p$, が独立に, $\theta_i Y_i$, ここで Y_i は自由度 n_i の χ^2 変量, として分布しているとする。 $\theta_1, \dots, \theta_p$ を同時に推

定するときの損失を $\sum_{i=1}^p (\hat{\theta}_i - \theta_i)^2$ で定義する。推定量として

$$\hat{\rho}_i = \left\{ 1 + a \frac{f(X_1^2/b_1, \dots, X_p^2/b_p)}{X_i^2/c_i} \right\} \frac{X_i}{n_i+2}, \quad i=1, \dots, p$$

なる形のものを考える。 $f = f(X_1^2/b_1, \dots, X_p^2/b_p)$ としては、

$$(i) \min_k (X_k^2/b_k), \quad (ii) 1 / \left(\sum_k b_k / X_k^2 \right)$$

を考える。そのとき、 $0 < a < \delta(p-c)$ ならば、 $\hat{\rho}_i, i=1, \dots, p$ は $X_i/(n_i+2)$, $i=1, \dots, p$ よりも一様に危険関数の値が小さい、ここで

$$b_i = (n_i+2)^2(n_i-2)^2$$

$$c_i = (n_i+2)^2(n_i-2)$$

$$c = E \left\{ \max_k (n_k+2) / Y_k \right\} \quad \text{である。}$$

上の事実を証明してみよう。 θ_i の推定量として、 $\hat{\rho}_i$ と $X_i/(n_i+2)$ の損失の差は、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{X_i}{n_i+2} - \theta_i \right)^2 - \left\{ \frac{X_i}{n_i+2} + a \frac{f}{X_i^2/c_i} \frac{X_i}{n_i+2} - \theta_i \right\}^2 \\ &= -2a \frac{c_i}{X_i} \frac{f}{n_i+2} \left(\frac{X_i}{n_i+2} - \theta_i \right) - a^2 \frac{c_i^2}{X_i^2} \frac{f^2}{(n_i+2)^2} \\ &= 2a \left[\frac{c_i}{Y_i} \frac{f}{n_i+2} - \frac{c_i f}{(n_i+2)^2} - \frac{a}{2} \frac{f^2}{X_i^2/b_i} \right] \equiv 2a K_i, \end{aligned}$$

K_i の第1項は、

Lemma : χ^2 を自由度 n の χ^2 変量とすると、

$$E \{ g(\chi^2) / \chi^2 \} = E \{ g(\chi^2) \} / (n-2) - 2 E \{ g'(\chi^2) \} / (n-2)$$

を用いて,

$$E\left(\frac{C_i}{Y_i} \frac{f}{n_i+2}\right) = \frac{C_i}{n_i+2} \left\{ \frac{E(f)}{n_i-2} - \frac{2}{n_i-2} E\left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right) \right\}$$

$$\therefore E(K_i) = \frac{4C_i \cdot E(f)}{(n_i+2)^2(n_i-2)} - \frac{2C_i}{(n_i+2)(n_i-2)} E\left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right) - \frac{a}{2} E\left(\frac{f^2}{X_i^2/b_i}\right)$$

$$= 4E(f) - 2(n_i+2)E\left(\frac{\partial f}{\partial Y_i}\right) - \frac{a}{2} E\left(\frac{f^2}{X_i^2/b_i}\right)$$

(i) $f = \min X_a^2/b_a$ のとき,

$$\frac{\partial f}{\partial Y_i} = 2f I_{Q_i}/Y_i, \quad \text{ここで } I_{Q_i} \text{ は } Q_i \text{ の indicator}$$

$$Q_i \text{ は } \min(X_a^2/b_a) = X_i^2/b_i$$

なる集合.

$$\therefore E(\sum K_i) = 4pE(f) - 4E\left(f \cdot \sum (n_i+2) I_{Q_i}/Y_i\right) - \frac{a}{2} \sum \frac{f^2}{X_i^2/b_i}$$

$$\geq 4pE(f) - 4E\left\{f \cdot \max\left(\frac{n_a+2}{Y_a}\right)\right\} - \frac{a}{2} E(f)$$

$$\geq 4E(f) (p - e - a/8) > 0$$

(ii) $f = 1/(\sum b_a/X_a^2)$ のときも同様にして

$$E(\sum K_i) \geq 4E(f) (p - e - a/8) \quad \text{が示される。}$$

注意 1. Y_i は通常の変定量 $X_i/(n_i+2)$ を, 最小分散不偏推定量 X_i/n_i にあけて (あるいは μ にあけて) 拡大する形になっていることに注意する。又, 改良は p が 2 以上ならば可能であることに注意する。(次の注意も参照)

注意 2. 実際に Y_i を使用するには, $e = E\left\{\max\left(\frac{n_a+2}{Y_a}\right)\right\}$ が評価

でまねばならない。同じような形の量の評価について Berger & Bock (1976) が議論している。彼等も述べているように、 $\min \eta_n \rightarrow \infty$ のとき、 c は 1 に近づく。また、 η_i が偶数ならば陽に表現は可能である。いま $\eta_i = \eta$, $i=1, \dots, p$ ならば、 c は $(n+2)E\{\max(1/Y_i)\}$ で、 $Y_1, \dots, Y_p$ は大きさ p の標本として考えられる。従って、標本のなかの最大値の期待値についての評価式 (Hartley & David, 1954) を用いれば、

$$(n+2)^{-1} c \leq (n-2)^{-1} + \sqrt{2} (p-1) / \{ \sqrt{2p-1} \cdot (n-2) \sqrt{n-4} \}$$

を得る。この評価を用いると、改良が可能なのは、各 p に対して n が次のような場合である、

p	2	3	4	5~8	9~
$n \geq$	11	8	7	6	5

注意 3. 上の議論は、形式的に、平均が未知の場合の正規分布の分散の同時推定にもあてはめられるが、平均が未知のとき、標本分散の定数倍のなかで最良の推定量は許容的ではない。(Stein, 1964)。

文献: Berger & Bock (1976): Statistical Decision Theory & Related Topics II, Clevenson & Zidek: JASA 70, 698-705, Hartley & David: AMS, 25, 85-99, Hodges & Lehmann: 2nd Berkeley Symp. 13-22. Hudson: AS, 6, 473-484, James & Stern: 3rd Berkeley Symp. 197-206. Stein: AISM, 16, 155-160.

正母数に線形不等式制約のある場合の Stein 推定量

μ を $N(\mu, I)$ に従う確率変数のベクトルとし, 次元 p を 3 以上の値であるとする。 μ を推定するときの損失を $(\hat{\mu} - \mu)'(\hat{\mu} - \mu)$ で定義すると推定量

$$\{1 - (p-2)/\mu' \mu\} \mu$$

が μ 自身よりよい推定量であることは James & Stein (1961) により示された。ここでは $\mu \equiv (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ に線形不等式制約がある場合, 最尤推定量の改良となる推定量を与えることを考える。典型として, 次の 2 つの線形不等式制約について考える。

$$1. \mu_i \geq 0 \quad i=1, \dots, p$$

$$2. \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p$$

1. $\mu_i \geq 0 \quad i=1, \dots, p$ について下記の結果が得られる。

$k \geq 3$ とする。 $D(i_1, \dots, i_k) \equiv \{\mu \mid \mu_{i_1} \geq 0, \dots, \mu_{i_k} \geq 0, \mu_{i_{k+1}} < 0, \mu_{i_p} < 0\}$ とおく。

定理 1 $X_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu_i, 1) \quad i=1, \dots, p$, 但し, $\mu_i \geq 0 \quad i=1, \dots, p$ とし, $\delta^1(x)$ の成分要素を $\delta_i^1(x)$ とすると $0 < a_k < 2(k-2)$ ならば " μ_i の推定量

$$\delta_{i_j}^1(x) = \begin{cases} \left(1 - a_k / \sum_{l=1}^k x_{i_l}^2\right) x_{i_j} & j=1, \dots, k \\ 0 & j=k+1, \dots, p \end{cases} \quad \text{if } \mu \in D(i_1, \dots, i_k)$$

μ_{i_j} の最尤推定量 その他

は μ_i の最尤推定量 $x_i^+ \equiv \max(x_i, 0)$ よりよい推定量となり, さらに

$$\begin{aligned} \Delta R_1 &\equiv R(x^+, \mu) - R(\delta_1^1(x), \mu) \\ &= \sum_{D(i_1, \dots, i_k)} \int \frac{2a_k k - (4a_k + Q_k^2)}{\sum_{j=1}^k x_{i_j}^2} p(x, \mu) dx \end{aligned}$$

になり, $a_k = k-2$ のとき ΔR_1 は最小値である。ここで Σ は $1, \dots, P$ から 3 つ以上の要素からなる集合 $(i_1, \dots, i_k)$ のすべてのとり方についての和の意味であり, $p(x, \mu)$ は多次元正規分布の密度関数である。

定理 1 では x_i を原点に近づける Stein 推定量を与えた。いまそのかわりに標本平均に近づける Stein 推定量も次のようにつくられる。

$D(i_1, \dots, i_k)$ を前述の集合とし, $k \geq 4$ とする。

定理 2 $X_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu_i, 1)$ $i=1, \dots, P$ 但し, $\mu_i \geq 0$ $i=1, \dots, P$ とし, $\delta^2(x)$ の k 要素を $\delta_k^2(x)$ とすると, $0 < b_k < 2(k-3)$ ならば μ_i の推定量

$$\delta_{i_j}^2(x) = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &\bar{x}_{i_1, \dots, i_k} + \left(1 - \frac{b_k}{\sum_{l=1}^k (x_{i_l} - \bar{x}_{i_1, \dots, i_k})^2}\right) (x_{i_j} - \bar{x}_{i_1, \dots, i_k}), j=1, \dots, k \\ &0, j=k+1, \dots, P \end{aligned} \right\} & \text{if } x \in D(i_1, \dots, i_k) \\ \mu_{i_j} \text{ の最尤推定量} & \text{その他} \end{cases}$$

は μ_i の最尤推定量 x_i^+ よりよい推定量となり, さらに

$$\begin{aligned} \Delta R_2 &\equiv R(\mu^+, \mu) - R(\delta^2(x), \mu) \\ &= \sum_{D(i_1, \dots, i_k)} \left(\frac{2b_k R - (4b_k + b_k^2)}{\sum_{l=1}^k (x_{i_l} - \bar{x}_{i_1, \dots, i_k})^2} \right) p(x, \mu) dx \end{aligned}$$

になり, $b_k = k-3$ のとき ΔR_2 は最小値である。ここで Σ は $1, \dots, P$ から 4 つ以上の要素からなる集合 $(i_1, \dots, i_k)$ のすべてのとり方についての和の意味であり,

$$\bar{x}_{i_1, \dots, i_k} \equiv \sum_{l=1}^k x_{i_l} / k$$

である。

2. $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p$ について下記のような結果が得られる。

$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p$ という制約条件下で $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_p)'$ の最尤推定量は参考文献 [1] に与えられている。

定理 3 $X_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu_i, 1) \quad i=1, \dots, p$ 但し $-\infty < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p < \infty$ とする。 $p \geq 3$ ならば $0 < C < 2(p-2)$ のとき μ の推定量

$$\delta^3(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{C}{\sum_{i=1}^p x_i^2}\right) x & \text{if } -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p < \infty \\ \mu \text{ の最尤推定量 } x^*, & \text{その他} \end{cases}$$

は μ の最尤推定量 x^* よりよい推定量である。さらに

$$\begin{aligned}\Delta R_3 &\equiv R(x^*, \mu) - R(S_1^3(x), \mu) \\ &= \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} \frac{2CP - (4C + C^2)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} p(x, \mu) dx\end{aligned}$$

に於り, ΔR_3 は $C = p-2$ のとき最小値である。ここで

$$D_1 \equiv \{(x_1, \dots, x_p) \mid -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p < \infty\} \subset \mathbb{R}^p$$

である。

証明

$$\begin{aligned}\Delta R_3 &\equiv R(x^*, \mu) - R(S_1^3(x), \mu) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{-\infty}^{x_{j+1}} \int_{-\infty}^{x_j} \int_{-\infty}^{x_2} \left(\frac{2Cx_1(x_1 - \mu_1)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{C^2 x_1^2}{(\sum_{i=1}^p x_i^2)^2} \right) p(x, \mu) dx_1 dx_2 \dots dx_j \dots dx_{p-1} dx_p \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{-\infty}^{x_{j+1}} \int_{-\infty}^{x_j} \int_{x_1}^{x_3} \left(\frac{2Cx_2(x_2 - \mu_2)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{C^2 x_2^2}{(\sum_{i=1}^p x_i^2)^2} \right) p(x, \mu) dx_2 dx_1 \dots dx_j \dots dx_{p-1} dx_p \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{-\infty}^{x_{j+1}} \int_{x_{j-3}}^{x_j} \int_{x_{j-2}}^{x_j} \left(\frac{2Cx_{j-1}(x_{j-1} - \mu_{j-1})}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{C^2 x_{j-1}^2}{(\sum_{i=1}^p x_i^2)^2} \right) p(x, \mu) dx_{j-1} dx_{j-2} \dots dx_1 dx_j \dots dx_{p-1} dx_p \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{-\infty}^{x_{j+1}} \int_{x_{j-2}}^{x_{j+1}} \int_{x_{j-1}}^{x_{j+1}} \left(\frac{2Cx_j(x_j - \mu_j)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{C^2 x_j^2}{(\sum_{i=1}^p x_i^2)^2} \right) p(x, \mu) dx_j dx_{j-1} \dots dx_1 dx_{j+1} \dots dx_{p-1} dx_p \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_p} \dots \int_{x_{p-3}}^{x_p} \int_{x_{p-2}}^{x_p} \left(\frac{2Cx_{p-1}(x_{p-1} - \mu_{p-1})}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{C^2 x_{p-1}^2}{(\sum_{i=1}^p x_i^2)^2} \right) p(x, \mu) dx_{p-1} dx_{p-2} \dots dx_1 dx_p \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x_1}^{\infty} \dots \int_{x_{p-2}}^{\infty} \int_{x_{p-1}}^{\infty} \left(\frac{2Cx_p(x_p - \mu_p)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{C^2 x_p^2}{(\sum_{i=1}^p x_i^2)^2} \right) p(x, \mu) dx_p dx_{p-1} \dots dx_2 dx_1\end{aligned}$$

になり，各項について x 部分積分を行なうと， ΔR_3 は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \Delta R_3 = & - \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_2, u_1, u_2; x_3, u_3; \dots; x_p, u_p) dx_2 dx_3 \dots dx_p \\
 & + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_1(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p \\
 & - \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_3, u_2, u_3; x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 dx_3 \dots dx_p \\
 & + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_1, u_2, u_1; x_3, u_3; \dots; x_p, u_p) dx_1 dx_3 \dots dx_p \\
 & + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_2(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p \\
 & + \dots \\
 & - \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_j, u_{j-1}, u_j; x_{j-2}, u_{j-2}; \dots; x_1, u_1; x_{j+1}, u_{j+1}; \dots; x_p, u_p) dx_{j-2} \dots dx_j \dots dx_p \\
 & + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_{j-2}, u_{j-1}, u_{j-2}; x_{j-3}, u_{j-3}; \dots; x_1, u_1; x_j, u_j; \dots; x_p, u_p) dx_{j-2} \dots dx_j \dots dx_p \\
 & + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_{j-1}(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p \\
 & - \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_{j+1}, u_j, u_{j+1}; x_{j-1}, u_{j-1}; \dots; x_1, u_1; x_{j+2}, u_{j+2}; \dots; x_p, u_p) dx_{j-1} \dots dx_{j+1} \dots dx_p
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_{j-1}, u_j, u_{j-1}; x_{j-2}, u_{j-2}; \dots; x_1, u_1; x_{j+1}, u_{j+1}; \dots; x_p, u_p) dx_{j-1} \dots dx_1 dx_{j+1} \dots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_j(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p \\
& - \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_{j+2}, u_{j+1}, u_{j+2}; x_j, u_j; \dots; x_1, u_1; x_{j+3}, u_{j+3}; \dots; x_p, u_p) dx_j \dots dx_1 dx_{j+2} \dots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_j, u_{j+1}, u_j; x_{j-1}, u_{j-1}; \dots; x_1, u_1; x_{j+2}, u_{j+2}; \dots; x_p, u_p) dx_j \dots dx_1 dx_{j+2} \dots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_{j+1}(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p \\
& + \dots \\
& - \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_p, u_{p-1}, u_p; x_{p-2}, u_{p-2}; \dots; x_1, u_1) dx_{p-2} \dots dx_1 dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_{p-2}, u_{p-1}, u_{p-2}; x_{p-3}, u_{p-3}; \dots; x_1, u_1; x_p, u_p) dx_{p-2} \dots dx_1 dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_{p-1}(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^{p-1}} f(x_{p-1}, u_p, u_{p-1}; x_{p-2}, u_{p-2}; \dots; x_1, u_1) dx_{p-1} dx_{p-2} \dots dx_1 \\
& + \int_{D_1 \subset \mathbb{R}^p} g_p(x_1, u_1; \dots; x_p, u_p) dx_1 \dots dx_p
\end{aligned}$$

$i=1, 2$ のときの計算結果は第 1 項から第 5 項までであり, 第 4 項の変数 x_1 を x_2 に変換すると第 1 項符号を変えたものになり打消しあう。同様に $i=j-1, j, j+1$ ($2 \leq j \leq p-1$) 第 $3(j-1)+1$ 項と $3(j-2)$ 項と互いに消え, 第 $3j+1$ 項と $3(j-1)$ 項と互いに消える。同じように $3(p-1)$ 項と $3(p-2)$ 項は互いに消える。よって残るのは第 $2, 5, 8, \dots, 3p-2$ 項であり, よって

$$\Delta R_3 = \int_{D \subset \mathbb{R}^p} \frac{2Cp - (4c + c^2)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} p(x, \mu) dx$$

になる。ここで

$$\begin{aligned} & f(x_{j+1}, \mu_j, \mu_{j+1}; x_{j-1}, \mu_{j-1}; \dots; x_1, \mu_1; x_{j+2}, \mu_{j+2}; \dots; x_p, \mu_p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\mu_{j+1} - \mu_j)^2}{2}} \frac{2C x_{j+1}}{x_1^2 + \dots + x_{j-1}^2 + 2x_j^2 + x_{j+1}^2 + x_{j+2}^2 + \dots + x_p^2} p(x_{j-1}, \mu_{j-1}) \dots p(x_1, \mu_1) p(x_{j+1}, \mu_{j+1}) \dots p(x_p, \mu_p) \end{aligned}$$

$$g_i(x_1, \mu_1; \dots; x_p, \mu_p) \equiv \left(\frac{2C}{\sum_{i=1}^p x_i^2} - \frac{(4c + c^2)x_i^2}{\left(\sum_{i=1}^p x_i^2\right)^2} \right) p(x, \mu)$$

$p(x_i, \mu_i)$ は x_i の密度関数

定理 2 と同じように原典に近づける Stein 推定量のかわりに標本平均に近づける Stein 推定量も次のようにつくられる。

定理 4 $X_i \stackrel{\text{ind}}{\sim} N(\mu_i, 1) \quad i=1, \dots, p$ 但し $-\infty < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_p < \infty$ とする

。 $p \geq 4$ ならば $0 < d < 2(p-3)$ のとき μ の推定量

$$\delta_1^4(\mathbf{x}) = \begin{cases} \bar{x} + \left(1 - \frac{d}{\sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2}\right)(\mathbf{x} - \bar{x}) & \text{if } -\infty < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p < \infty \\ \mu \text{ の最尤推定量 } \mathbf{x}^* & \text{その他} \end{cases}$$

は μ の最尤推定量 $\mathbf{x}^*$ よりよい推定量である。さらに

$$\Delta R_4 = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{R}^p} \frac{2d(p-1) - (4d+d^2)}{\sum_{i=1}^p x_i^2} p(\mathbf{x}, \mu) d\mathbf{x}$$

により, ΔR_4 は $d = p-3$ のとき最小値である。ここで $\bar{x} \equiv \sum_{i=1}^p x_i / p$, $\bar{\mathbf{x}} \equiv (\bar{x}, \dots, \bar{x})$ である。

以上の結果は Hudson (1978) によって与えられた分布のクラスの場合に拡張できる。

参考文献

- [1] Barlow, Bartholomew, Bremner and Brunk (1972), Statistical Inference under Order Restrictions; The Theory and Application of Isotonic Regression, New York; John Wiley & Sons.
- [2] Hudson, H.M (1978) A Natural Identity for Exponential Families with Applications in Multiparameter Estimation. The Annals of Statistics. Vol. 6, No. 3, P 473-484
- [3] James, W. and Stein, C (1961) Estimation with Quadratic Loss.

Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist Prob. 1. P 361-379
, Univ of California Press.