

K3曲面の周期の逆問題とKähler性

名大理 浪川幸考

§ 0. 問題と主定理

こゝでの話は、すべて、複素数体 $\mathbb{C}$ 上で考える。

定義 1 (A. Weil). 2次元 compact 複素多様体 S が、2条件:

- ① $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$; ② 標準束 K_S が自明 ($\Leftrightarrow S$ 上どこでも零にならない正則2次形式 ω が存在する) とみたとき、 S を K3曲面 と呼ぶ。

A) K3曲面の周期

$H^2(S, \mathbb{Z})$ には " $\wedge$ " によって、自然に内積 $\langle, \rangle$ が入り、 $H^2(S, \mathbb{Z})$ は、格子 (lattice) となる。これは、符号数が $(3, 19)$ で even ($\langle x, x \rangle \equiv 0 \pmod{2}$) かつ, unimodular ($|\det \langle, \rangle| = 1$), 従って、その構造は、一通りに決まって、

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq L = (-E_8) \perp (-E_8) \perp \mathbb{1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。以下 $L_{\mathbb{C}} = L \otimes \mathbb{C}$, $L_{\mathbb{R}} = L \otimes \mathbb{R}$ とする。

定義 2. (S, ψ) (しるし付き (marked) K3曲面 $\Leftrightarrow S$, K3曲面, $\psi: H^2(S, \mathbb{Z}) \simeq L$, 格子としての同型。

S の0でない正則2次形式 ω のコホモロジー類 $[\omega] \in H^2(S, \mathbb{C})$ は、 $H^0(S, \Omega_S^2) = H^{2,0} \subset H^2(S, \mathbb{C})$ を生成し、関係式

$$H^{0,2} = \overline{H^{2,0}}, \quad H^{1,1} = (H^{2,0} \oplus H^{0,2})^\perp$$

によって $H^2(S, \mathbb{C})$ の Hodge 構造を定めることに注意する。

また $[\omega]$ は 関係式

$$\langle [\omega], [\omega] \rangle = 0, \quad \langle [\omega], \overline{[\omega]} \rangle > 0$$

をみたす. ($H^2(S, \mathbb{C}) = H^2(S, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$ として, 内積 $\langle, \rangle$ は, 自然に拡張して考える.)

定義 3.

$$\mathcal{D} = \{ (a) \in \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) ; \langle a, a \rangle = 0, \langle a, \bar{a} \rangle > 0 \}$$

$$\subset \mathbb{P}(L_{\mathbb{C}}) \cong \mathbb{P}^{21}.$$

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{D}^c = \{ (a) ; \langle a, a \rangle = 0 \} \subset \mathbb{P}^{21}.$$

射影集合

二次超曲面

$\mathcal{D}$ は 上の注意から $L_{\mathbb{C}}$ 上の Hodge 構造全体である.

定義 4. (もし付き (marked) K3 曲面 (S, ψ) に対し, $[\omega_{(S, \psi)}]$

$:= (\psi_{\mathbb{C}}([\omega])) \in \mathcal{D}$ と (S, ψ) の 周期 (periods) と呼ぶ.

$\mathcal{D}$ には, L の直交群 $O(L)$ が 自然に作用しているが, (もし付き K3 曲面 (S, ψ) , $g \in O(L)$ に対し, 明らかに,

$$g([\omega_{(S, \psi)}]) = [\omega_{(S, g \circ \psi)}]$$

がなりたつ。つまり、 $\mathcal{D}$ 上での $O(L)$ の作用は、K3 曲面の (もし付き (marking)) を変えることに対応している。

B) 主結果 (→ 追記)

こゝでの目的は、Todorov のアイデアによる 次の二つの定理を証明することにある。

主定理 1 (逆向題). $\mathcal{D}$ の任意の点に対し、それを周期とする (もし付き K3 曲面が存在する。

主定理 2 (Kähler 性) 任意の K3 曲面は、Kähler 計量を持つ。

系 (小平予想). S を 2 次元 compact 複素多様体とする。

$$S \text{ が Kähler} \iff c_1(S) \text{ が偶数.}$$

分類理論から、 S が楕円曲面か K3 曲面以外の場合には、予想は正しいことが分る。楕円曲面の場合には、宮岡 [6] が既にこれを証明しているので、主定理 2 が上の予想に最終的解決を与えた。

(追: 主定理 2 の証明は、不満であった。追記 1 参照)

C) 証明に用いる本質的な諸定理

Todorov のアイデアは、次に述べる 2 つの深い結果を巧みに結びつけるところにある。彼の証明は、本質的な点があいまいだったが、幸いなことに筋道は正しかった。又、Andreotti の方法 ([2]) を用いたことで (これは Griffiths の注意による)、Atiyah - Hitchin - Singer の方法 [1] は、その枠組だけしか必要でなくなる。

そして、逆に、後者の方法のより自然な見方が得られ、その方面での応用が期待される。

定理 1' (偏極 K3 曲面に対する逆問題)。

1) $\mathcal{D}$ 内の点 $(a) \in \mathcal{D}$ がさらに条件 (A) “ L 内の元 c で、 $\langle c, c \rangle > 0$, $\langle a, c \rangle = 0$ となるものがある” を満たしているとする。このとき、もし付き K3 曲面 (S, ψ) と、 S 上の *quasi-ample* な直線束 $\mathcal{L}$ があって、後者の Chern 類を $c(\mathcal{L}) \in H^2(S, \mathbb{Z})$ とすれば、

$$[\omega_{(S, \psi)}] = (a), \quad \psi(c(\mathcal{L})) = c$$

をみたす。

2) 上でさらに c が条件 (B) “ $\langle p, p \rangle = -2$ であるようなすべての $p \in L$ に対し $\langle a, p \rangle \neq 0$ または $\langle c, p \rangle \neq 0$ ” を満たすならば、上の $\mathcal{L}$ は、*ample* になる。

この定理が、今の場合最も本質的なものといえる。実は、上の定理を、この形で述べた文献は、今のところない。これは、K3 曲面の周期に関する一連の深い事実を用いて証明される。その証明の粗筋は、§4 で示す。

定理 2' (Yau : Carabi 予想の解 [10])。K3 曲面上の、任意の *kähler* 計量に対し、対応する計量形式の コホモロジー 類が同じであるような、*Ricci flat* な *kähler* 計量が存在する。

定理 1' から、定理 1 を導く上で用いられる自明でない唯一の深い結果がこれである。上記 2 定理から、主結果は、以下に見るように実に明快な道筋をたどって導か

|||

れる。

定理 3' (Torelli の定理弱形, Looijenga-Peters 式 [5]). 2 つのしりし付き K3 曲面 $(S_1, \psi_1), (S_2, \psi_2)$ があって, S_1 は kähler とする. このとき

$$[\omega_{(S_1, \psi_1)}] = [\omega_{(S_2, \psi_2)}] \Rightarrow S_1 \cong S_2.$$

この定理は, すべての K3 曲面が kähler であることを示すのに必要である.

つまり, この定理から, $\mathcal{L}$ の各点 (a) に対し, それを周期とする kähler K3 曲面が 存在する ことを言えばよいわけである.

(追: この定理証明の不備が見出された. 追記 1 参照)

§ 1. $\mathcal{L}$ 内の円錐曲線族

補題 1. $L_{\mathbb{R}}$ 内の 3 次元ベクトル空間 M 上内積 $\langle, \rangle$ が, 正定値ならば,

$$Q = P(M_{\mathbb{C}}) \cap \{(a); \langle a, a \rangle = 0\} \subset \mathcal{L}$$

である. Q は $P(M_{\mathbb{C}}) (\cong \mathbb{P}^2)$ 内の二次曲線で, 従って, $\mathbb{P}^1$ と同型であることに注意しておく.

証明. $(a) \in Q$ に対し, 条件から $\langle a, \bar{a} \rangle > 0$ である.

注意. 上記のような形の Q 全体は, $O(L_{\mathbb{R}})$ の等方部分群をふくむ, 極大

compact 部分群の軌道 (orbit) としてあらわれる部分多様体の全体と一致する.

補題 2. $(a) \in \mathcal{Q}$ に対し, $L_{\mathbb{R}}$ 内の平面 P_a を

$$\begin{aligned} P_a &= (\mathbb{C}a + \mathbb{C}\bar{a}) \cap L_{\mathbb{R}} \\ &= \mathbb{R} \operatorname{Re} a + \mathbb{R} \operatorname{Im} a \end{aligned}$$

として定義する. すると P_a 上内積 $\langle, \rangle$ は正定値である.

証明. $\operatorname{Re} a = x$, $\operatorname{Im} a = y$ とおけば

$$0 = \langle a, a \rangle = (\langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle) + 2\sqrt{-1} \langle x, y \rangle.$$

$$0 < \langle a, \bar{a} \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, y \rangle.$$

よって $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle > 0$, $\langle x, y \rangle = 0$.

補題 3. $(a) \in \mathcal{Q}$, Q を補題 1 のものとする. すると

$$(a) \in Q \Leftrightarrow P_a \subset M$$

証明 $(a) \in Q \Leftrightarrow \mathbb{C}a \subset M_{\mathbb{C}}$ だが, これから $\mathbb{C}\bar{a} \subset M_{\mathbb{C}}$ に注意すれば $P_a \subset M$. 逆に $P_a \subset M$ のとき P_a の基底 x, y で $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle > 0$, $\langle x, y \rangle = 0$ なるものをとって $a' = x + \sqrt{-1}y$ とおくと $\mathbb{C}a = \mathbb{C}a'$ 又は $\mathbb{C}a = \mathbb{C}\bar{a}'$ となることがすぐ分る.

補題 4. a) M 上の特殊直交群 $G = SO(M)$ は $P(M_{\mathbb{C}})$ への作用により Q 上に推移的に作用している.

b) G -共変な $2:1$ 被覆写像

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(M) = M - \{0\} / \mathbb{R} - \{0\} \\ \omega & & \omega \\ (a) & \longrightarrow & P_a^{\perp} \end{array}$$

があり. ($Q \simeq S^2$ を考慮すれば) これは 次の G -共変な 同相写像を経由する.

$$\begin{array}{ccc} Q & \xrightarrow{\iota} & M - \{0\} / \mathbb{R}^+ \\ & \searrow \bar{\iota} & \downarrow \text{普通被覆} \\ & & \mathbb{P}_{\mathbb{R}}(M) \end{array}$$

$2:1$ となるのは $\bar{\iota}(a) = \bar{\iota}(\bar{a})$ であることによる.

証明. 補題 3 から明らか.

§2. 偏極 K3 曲面をふくむ 円錐曲線上の K3 曲面の族.

序. S_0 を射影的 K3 曲面とし. $\psi: H^2(S_0, \mathbb{Z}) \simeq L$ を任意のしるし付けとする. ω_0 と S_0 の正則二次形式とし. 対応する $L_{\mathbb{C}}$ の元を同じ記号であらわす

$\mathcal{L}$ を S_0 上の ample な直線束とし. $C = C(\mathcal{L}) \in H^{1,1}$

$\cap H^2(S_0, \mathbb{Z})$ と その Chern 類とし. L の元をも同じ記号であらわす.

$\mathcal{L}$ が Hodge 計量 (従って Kähler) を定めることに注意すれば. 定理 2' から

計量形式 μ のコホモロジー類が C となる Ricci flat な Kähler 計量 g が存在する。

$M = \{\operatorname{Re} \omega_0, \operatorname{Im} \omega_0, C\}_{\mathbb{R}} \subset L_{\mathbb{R}}$ に対応して §1 補題 1 から

② 内の円錐曲線 Q が定まる。 $P_0 = \{\operatorname{Re} \omega_0, \operatorname{Im} \omega_0\}_{\mathbb{R}} \subset M$ だから

§1 補題 3 から $0 = (\omega_0) \in Q$ である。

本節の目標は Q 上に S_0 の変形族 $\mathcal{S}$ を構成することである。これは Atiyah-Hitchin-Singer の方法 [1] の 特別な場合であるが、今の場合、下に述べる Andreotti の方法 (命題 2) を用いることで、より直接的な構成法がえられる。なお、二次元複素トーラスの場合も事情は全く同じであり、この場合 Blanchard の構成法と本質的に同じであることが、容易に確かめられる。

この部分の Todorov の推論は混乱している。補題 1 の証明は、いたずらに複雑であり、補題 2 は不十分な形で書かれ、定理 2' を用いる本質的な部分が全く見過ごされている。

補題 1. S_0 を 4次元実解析多様体としてみて、これを X と書く。

$$\Lambda^+ = \{\operatorname{Re} \omega_0, \operatorname{Im} \omega_0, \mu\}_{\mathbb{R}} \subset \Lambda^2 T_X^*$$

は、階数 3 の部分ベクトル束である。(T_X^* は X の (実) 余接束)

証明. 両者の複素化を考えて、同じことを言えはよい。ところが

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^+ = \{\omega_0, \bar{\omega}_0, \mu\}_{\mathbb{C}} \subset \Lambda^2 T_X^* \otimes \mathbb{C}.$$

各点 $x \in X$ で S_0 の複素構造に関し. ω_0 は $(2, 0)$ 型, $\bar{\omega}_0$ は $(0, 2)$ 型 μ は $(1, 1)$ 型で, しかもどれも 0 にならない. 従って, 3者は $\Lambda^2 T_{X,x}^* \otimes \mathbb{C}$ 内で一次独立である.

注意. 計量 g から定義される作用素 $*$ を用いると.

$$\Lambda^+ = \{ \Omega \in \Lambda^2 T_X^* ; * \Omega = \Omega \}$$

となる. $*^2 = 1$ から $\Lambda^2 T_X^* = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$, $\Lambda^- = \{ \Omega ; * \Omega = -\Omega \}$, に注意しておく. Atiyah-Hitchin-Singer の方法は. この $S(\Lambda^\pm) (\simeq X \times S^2)$ に 複素構造を入れるものである.

補題 2. $a = \alpha \omega_0 + \beta \bar{\omega}_0 + \gamma c \in M_{\mathbb{C}}$ に対し. $(a) \in Q$ とする. すると X 上の 2 次形式 $\omega_a = \alpha \omega_0 + \beta \bar{\omega}_0 + \gamma \mu$ は

$$\omega_a \wedge \omega_a = 0, \quad \omega_a \wedge \bar{\omega}_a > 0$$

(X の自然な向き付けに関して)

を満たす.

証明. $\omega_a \wedge \bar{\omega}_a = (\alpha \bar{\alpha} + \beta \bar{\beta}) \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0 + \gamma \bar{\gamma} \mu \wedge \mu > 0.$

$$\omega_a \wedge \omega_a = 2\alpha\beta \omega_0 \wedge \bar{\omega}_0 + \gamma^2 \mu \wedge \mu.$$

条件 $(a) \in Q$ から.

$$\int_X \omega_a \wedge \bar{\omega}_a = 0$$

であるから、次の命題を示せば十分である。

命題 1. S を K3 曲面 (又は、2次元複素トーラス) とし、 ω を S 上の 0 でない正則 2 次微分形式とする。 S 上の Kähler 計量 g を考え、その計量形式を μ とする。そのとき、

$$g \text{ が Ricci flat } \Leftrightarrow \omega \wedge \bar{\omega} = c\mu \wedge \mu, c \in \mathbb{R}^+.$$

証明. 仮定から、正の実数値関数 f があって、

$$f\omega \wedge \bar{\omega} = \mu \wedge \mu$$

とかける。 S の局所座標 (z'_α, z''_α) を適当にとれば

$$\omega = dz'_\alpha \wedge dz''_\alpha,$$

$$\mu \wedge \mu = \frac{1}{4} (\det g)_\alpha dz'_\alpha \wedge dz''_\alpha \wedge d\bar{z}'_\alpha \wedge d\bar{z}''_\alpha$$

と表わされる。従って、

$$f = \frac{1}{4} (\det g)_\alpha.$$

ところで、

g is Ricci flat

$$\Leftrightarrow \partial\bar{\partial}(\log(\det g)_\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \partial\bar{\partial} \log f = 0 \text{ (つまり } \log f \text{ は, 大域的調和関数)}$$

$$\Leftrightarrow f = \text{const.} \quad (\text{証明 終})$$

命題 2 (Andreotti [9] p.252). X を向き付けられた 4 次元可微分

多様体とする. ω が 2 次の複素 C^∞ -微分形式で, 条件 i) $\omega \wedge \omega = 0$,

ii) $\omega \wedge \bar{\omega} > 0$ (向きに関して), iii) $d\omega = 0$ を満足するならば, X 上に

ω を正則微分形式とする複素構造が一意的に定義される.

証明. 各点 $x \in X$ で $\omega_x \in \bigwedge^2 T_{X,x}^*$ は ii) より, 0 ではない. 条件

i) $\omega_x \wedge \omega_x = 0$ から, ω_x は decomposable, つまり, $T_{X,x}^*$ の元 u_x ,

v_x があって, $\omega_x = u_x \wedge v_x$ となる. $F_x = \mathbb{C}u_x + \mathbb{C}v_x \subset T_{X,x}^*$ とし

ければ, 再び条件 ii) から, $F_x \oplus \bar{F}_x = T_{X,x}^*$ となる. 従って, $\bigcup_x F_x$

$\subset T_{X,x}^*$ は X 上の複素構造を定める. 条件 iii) は, この複素構造が

積分可能であることを示すに他ならない. この複素構造に関して, ω が正則形式である

ことは, 上の決め方から明らかである.

(証明 終)

定理. 本節序の状況のもとで, $\mathcal{Q}$ をパラメーターとする S_0 の複素解析

変形族,

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{Q}, \quad (S_p = \pi^{-1}(p), p \in \mathcal{Q})$$

および Q 上の格子の同型族

$$\bar{\Psi} : R^2\pi_*\mathbb{Z}_{\mathcal{S}} = \bigcup_{p \in Q} H^2(S_p, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} Q \times L$$

であって、任意の $p \in Q$ に対し

$$[\omega_{(S_p, \bar{\Psi}_p)}] = p,$$

かつ、 $0 \in Q$ では S_0 は与えられたもので $\bar{\Psi}_0 = \psi$ となるものが存在する。

証明 $\mathcal{X} = X \times Q$ を考え、 $\bar{\Psi}_0 = \psi : H^2(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L$ をそのまま、自然に Q 上に拡張して $\bar{\Psi}$ をつくる。 Q 上の各点

$$p = (\omega), \quad \omega = \alpha\omega_0 + \beta\bar{\omega}_0 + \gamma\mu, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$$

に対し、補題 2 を用いれば、命題 2 の条件 i), ii) が満たされていることが

分る。条件 iii) は $\omega_0, \bar{\omega}_0, \mu$ すべてが床形式だから明らかに満たされる。

そこで、 $\mathcal{X}_p = X \times p$ 上の複素構造 S_p を命題 2 によって定める。 ω の

Q による変化が正則であることに注意すると、小平-Nirenberg-Spencer [3],

p. 458 f. の推論により、 $\pi : \mathcal{S} = \bigcup_{p \in Q} S_p \rightarrow Q$ は複素解析変形族であ

ることが分る。周期についての性質は、命題 2 から明らかである。

命題 3. $\pi : \mathcal{S} \rightarrow Q$ を上の定理で定めたものとする。各点 $p \in Q$

に対し、 S_p 上には、Kähler 計量 g_p があって p に関し、smooth に変

化する.

証明. §1, 補題4 の $\iota: Q \rightarrow M - \{0\} / \mathbb{R}^+$ を考え. さらに.

$\iota(0) = \mathbb{R}^+ \mu$ となるようにとる. そこで $p \in Q$ に対し $p = \sigma(0)$ である $\sigma \in SO(M)$ をとって $\mu_p = \sigma(\mu)$ とする. $0 = \sigma(0) \Leftrightarrow \sigma(p_0) = p_0 \Leftrightarrow \sigma(\mu) = \mu$ より μ_p は矛盾なく定義されることが分る. また ι の定義から μ_p は S_p 上の $(1, 1)$ 型の微分型式である. $x \in X$ で 余接空間 $T_{x,x}^*$ に g の定める計量を入れ. その等距離変換を $G_x (\cong O(4))$ とすれば. 補題1 の後の注意から G_x の $\wedge^2 T_{x,x}^*$ への作用は M を保ち M の直交変換となっていることが分る. すなわち. 全準同型写像

$$p: G_x \rightarrow SO(M)$$

が 自然にある. (注: 実は. これは. 自然な完全列

$$\begin{array}{ccccccc} 1 \rightarrow \{\pm 1\} & \rightarrow & G_x (\cong SO(4)) & \rightarrow & SO(3) \times SO(3) & \rightarrow & 1 \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \text{Iso}(T_{x,x}^*) & \rightarrow & \text{Iso}(\wedge^+) \times \text{Iso}(\wedge^-) & & \end{array}$$

の一方への射影に他ならない.) 命題2 の証明をふりかえれば.

$\tilde{\sigma} \in G_x$, S_0 の x での局所座標 (z'_0, z''_0) , S_p の x での局所座標 z'_p, z''_p があって. 条件 $p(\tilde{\sigma}) = \sigma$, $\tilde{\sigma}(dz'_0) = dz'_p$,

$\tilde{\sigma}(dz_0^2) = dz_p^2$, をみたすことが分る. すると $\mu = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_0^\alpha \wedge d\bar{z}_0^\beta$ としたとき.

$$\mu_p = \sigma(\mu) = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_p^\alpha \wedge d\bar{z}_p^\beta,$$

だから μ_p は 計量 $g_p = \sum g_{\alpha\bar{\beta}} dz_p^\alpha d\bar{z}_p^\beta$ を定める.

§3. 主定理の証明

A) 主定理 7 の証明

$p_1 = (\omega_1) \in \mathcal{Q}$ をとり. §1 により P_{ω_1} を定義する.

$$V = \{a \in P_{\omega_1}^+; \langle a, a \rangle > 0, \text{ 任意の } p \in L; \langle p, p \rangle = -2, \\ \text{に対し } \langle a, p \rangle \neq 0 \text{ 又は } \langle \omega_1, p \rangle \neq 0\}$$

と置く. これが 閉集合になることは. 比較的容易に分る. (本質的に次節命題 2, 3)

ここで L の元 C で $C = C' + C''$, $C' \in V$, $C'' \in P_{\omega_1}$, となるものを選ぶ. V が閉錐であることから. これは可能である.

$$M = P_{\omega_1} + \mathbb{R}C = P_{\omega_1} + \mathbb{R}C'$$

よく, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は 正定値で. これから §1 の方法で p_1 を含む円錐曲線 Q が

定まる。 C に対し、§1 補題 4 より $0 = \langle \omega_0 \rangle \in Q$, $\langle \omega_0, C \rangle = 0$

となる点 $(\in \bar{C}^{-1}(C))$ が存在する。この点に §0. 定理 1' を適用すれば、

しるし付き K3 曲面 (S_0, ψ) と S_0 上の直線束 $\mathcal{L}$ があって $\omega_{(S_0, \psi)}$

$= \lambda \omega_0$, $\psi(C(\mathcal{L})) = C$ となるものがある。ここで、上の C の決め方と、

定理 1' 2) から、 $\mathcal{L}$ は ample になる。なぜなら、条件 B) と確かめればよいが、

$p \in \mathcal{L}$ が $\langle p, p \rangle = -2$, $\langle p, \omega_0 \rangle = 0$ から $\langle p, C \rangle = 0$

より、これから $p \in M^\perp$, とくに、 $\langle p, \omega_1 \rangle = 0$, から $\langle p, C' \rangle$

$= \langle p, C \rangle = 0$ で、これは $C' \in V$ に矛盾。

$M = \{\operatorname{Re} \omega_0, \operatorname{Im} \omega_0, C\}$ であることに注意すると、前節の定理から、

Q 上にしるし付き K3 曲面の族ができ、しかもその周期は パラメータの点にな

っている。特に、 $p_i \in Q$ 上にも、それを周期とする K3 曲面がある。

B) 主定理 2 の証明

S を任意の K3 曲面とし、あるしるし付け ψ を定める。主定理 1 から

$p_i = [\omega_{(S, \psi)}] \in \mathcal{D}$ を周期とする K3 曲面 S' があり、しかも §2

命題 3 から S' は kähler 計量をもつ。§0. 定理 3' から $S \cong S'$

で、従って S は kähler である。

注意. (S, ψ) をしるし付き K3 曲面とし、 $(\omega) = [\omega_{(S, \psi)}] \in \mathcal{D}$

をその周期とする。 μ が S 上の kähler 計量形式であれば、

$$\psi(\mu) \in V = \{a \in P_{\omega}^+; \langle a, a \rangle > 0, \text{ 任意の } p \in L, \\ \langle p, p \rangle = -2 \text{ に対し } \langle a, p \rangle \neq 0 \text{ 又は } \langle \omega, p \rangle \neq 0\} \quad (\text{cf } A))$$

であるが、逆に任意の V の元が(しるし付け ψ を取りかえれば) kähler 計量形式に対応するかどうかは、面白い問題である。Todorov はこれを証明したと述べているが信じ難い。小平の定理から、 $V \cap L$ は Hodge 計量形式に対応していることが分る。

(追: Looijenga が肯定的証明を与えた。追記 2 参照)

§. 4 定理 1' の証明の概要

定理 1' は、この形では既発表の文献に載っていないが、K3 曲面についての、一連の主要結果を組みあわせることにより、次のように証明される。

ステップ 1). $C \in L$, $\langle C, C \rangle > 0$, に対し $\mathcal{Q}(C) = \{(a) \in \mathcal{Q}, \langle a, C \rangle = 0\}$ の稠密開集合 U では、定理がなりたつ。

C は、原始的 ($C = mC'$, $m \geq 2$, とは書けない) としてよい。

$\langle C, C \rangle$ に対し、K3 曲面 S と、その上の原始的 ample 直線束 $\mathcal{L}$ で、 $\langle C(\mathcal{L}), C(\mathcal{L}) \rangle = \langle C, C \rangle$ となるものが存在する。 $O(L)$ は、 L 上の、同じ長さの原始的ベクトルの集合に推移的に作用する ([8] §6. Appendix 定理 1 の特別な場合) から $\mathcal{Q}(C)$ 上の元で少なくとも 一つは しるし付き K3 曲面

(S, ψ) の周期となっているものがある. [8] §2, 定理 1 から, $\dim T = \dim \mathcal{Q}(c) = 19$ である多様体 T 上のしるし付き-偏極 K3 曲面の族. $f: \mathcal{X} \rightarrow T$ で上記の $(S, \psi, \mathcal{L})$ をふくむものがある. この T は, 偏極 (の何倍か) の定める射影埋め込みにより, Hilbert 概型の商としてえられていることに注意しておく. その周期写像

$$\bar{\psi}: T \rightarrow \mathcal{Q}(c)$$

は, 局所 Torelli の定理から, étale 写像である. 一方 $\mathcal{Q}(c)$ は, $\mathbb{A}^1$ 型エルミート対称領域で, $O(L, c) = \{\sigma \in O(L); \sigma(c) = c\}$ は, $\text{Aut}(\mathcal{Q}(c))$ の算術的部分群. したがって, $O(L, c) \setminus \mathcal{Q}(c)$ は, 擬射影的 (quasi-projective) 多様体で, 上の注意とあわせると, $\bar{\psi}: T \rightarrow O(L, c) \setminus \mathcal{Q}(c)$ の像は, 開部分代数多様体であることが分る. $U = \text{Im } \bar{\psi}$ とすればよい.

注意. 実は, $\text{Im } \bar{\psi}$ は, 次数 $\langle c, c \rangle$ の原始的偏極付き K3 曲面の粗モジュラス多様体である. (Torelli の定理 [8] §1.)

ステップ 2). $(a) \in \mathcal{Q}(c)$ を定める. $D = \{t \in \mathbb{C}; |t| < 1\}$, $D' = D - \{0\}$ とすると,

$$\varphi: D \longrightarrow \mathcal{Q}(c), \quad \varphi(0) = (a), \quad \text{正則写像}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f_{D'} : \mathcal{X}' \longrightarrow D', & \text{しるし付き K3 曲面の族,} \\
 \cap & \cap \\
 f_D : \mathcal{X} \longrightarrow D & \text{その偏極多様体の族としての拡張.}
 \end{array}$$

で f_D の周期写像が $\varphi' = \varphi_{|D'} : D' \rightarrow \mathcal{D}(c)$ となるものがある.

ステップ 1) での $f : \mathcal{X} \rightarrow T$ が Hilbert 概型 $\mathcal{T}$ の商であったことを思い出し、任意の $\varphi : D \rightarrow \mathcal{D}(c)$, $\varphi(0) = (a)$ に対して、必要なら D の 0 で分岐した分岐被覆をとって φ を $\widehat{\varphi} : D \rightarrow \overline{\mathcal{D}} \hookrightarrow \mathcal{T}$ へ lift すればよい. lift が可能なことは良く知られた推論で出る.

ステップ 3), ステップ 2) の族と D の 0 で分岐した被覆および $0 \in D$ 上のファイバーを变形することによって,

$$f_D : \mathcal{X} \rightarrow D$$

は $0 \in D$ をこめて、しるし付き K3 曲面の变形族とすることができる. (ただし、 $0 \in D$ 上は、偏極付きではない.)

このステップが最も重要である.

まず H_2 のモノドロミーに関する中単定理から D の分岐被覆をとって、モノドロミーを中単 (unipotent) にできる. $\varphi(0) \in \mathcal{D}(c)$ に注意すると、実はモノドロミーは、自明である.

すると、Kulikov [4] (及び Persson-Pinkham [7]) の結果により、

$0 \in D$ 上のファイバーを取りかえて、K3 曲面とすることができる.

ステップ 4) 最終的証明.

$0 \in D$ 上の f のファイバー (S_0, ψ_0) に対し. $(a) \in \mathcal{D}$ は S_0 の周期 $[\omega_{(S_0, \psi_0)}]$ となっていることに注意しよう. $c \in L$ に対応して, D' 上のファイバー上には, 偏極があるが, S_0 においては, $\psi_0^{-1}(c) = C_0 \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ は, 単に $H^{1,1}$ との元つまり, 代数的コサイクルというに過ぎず一般には, このコサイクルは, *quasi-ample* にならない. そこで, 我々は, 1つし付け ψ を, 動かして対応するコサイクルが, *quasi-ample* になるようにするのである. そのために, K3曲面上の代数的サイクルに関する次の3つの命題が用いられる. 命題 2は難しいが, 1, 3はそうでもない. 証明は [2], [5]を見られたい. $\langle C_0, C_0 \rangle > 0$ だから, S_0 は射影的であり(小平), 少なくとも1個 ample なサイクル $a \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ があることに注意しておいて, 次の概念を準備する.

$C = \{c \in H^{1,1}(S_0, \mathbb{R}); \langle c, c \rangle > 0\}$ の連結成分で a と

ふくむもの(もう一方の連結成分は $-C$).

$P^+ = \{p \in H^{1,1}(S_0, \mathbb{R}) \cap H^2(S_0, \mathbb{Z}); \langle p, p \rangle = -2,$

p は effective cycle $\}$ (Riemann-Roch の定理から

p 又は $-p$ が effective であることが分る).

$V = \{c \in C; \langle p, c \rangle > 0 \text{ for } \forall p \in P^+\}.$

$\bar{V} = \{c \in C; \langle p, c \rangle \geq 0 \text{ for } \forall p \in P^+\}.$

$p \in P^+$ に対し. $s_p : x \rightarrow x + \langle p, x \rangle p$ は.

$H_p = \{ h \in H^2(S_0, \mathbb{R}); \langle p, h \rangle = 0 \}$ に関する鏡映を定める.

$H^{2,0} \subset H_p$ に注意しておく.

$W = \{ s_p; p \in P^+ \}$ の生成する群 $\subset O(H^2(S_0, \mathbb{Z}))$.

命題 1. i) $c \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ が *ample* なコホモロジー類

$$\iff c \in V \cap H^2(S_0, \mathbb{Z}).$$

ii) $c \in H^2(S_0, \mathbb{Z})$ が *quasi-ample* なコホモロジー類

$$\iff c \in \bar{V} \cap H^2(S_0, \mathbb{Z}).$$

命題 2. W の作用は C を保ち, C 内で離散的である.

命題 3 ([8] §6 定理 1). $\bar{V}$ は W の C 上の作用に関する基本領域であり, V は $\bar{V}$ の内点である.

定理 1' の証明を完了させよう. 命題 3 により, W の元 σ があって,

$\sigma(C_0) \in \bar{V}$ となる. 命題 1 i) から $\sigma(C_0)$ は *quasi-ample* であり,

さらに 条件 B) とみれば ii) から *ample* である. σ は $H^{2,0}$ と固定

していることを思い出せば $(S_0, \psi_0 \circ \sigma^{-1})$ が求める条件をみたしていることが分る.

追記. この原稿をまとめたのち, Looijenga 氏からの手紙で, 次の事実が明らかになった.

1. §0 C) 定理 3' の証明に本質的欠陥が見出された. 従って, これに基いた, 主定理 II の証明は成立しない. ただし, 定理 3' を用いる以前の議論により, 主定理 I を, 次のように強めることができる.

主定理 1'. ④ の任意の点に対し, それを周期とするしるし付き Kähler K3 曲面が存在する.

この定理は, 次の 2 に述べる形に最も強めることができる.

2. §3, B) の注意に述べた問題は, 肯定的に答えられる. それは, 特殊 K3 曲面 ($\text{rank } H^{1,1}(S, \mathbb{R}) \cap H^2(S, \mathbb{Z}) = 20$ (最大) である K3 曲面) では, (§4 の記号で) V が $V \cap H^2(S, \mathbb{Z})$ で生成され, 従って, 注意の最後にのべたことから, 予想が正しいことに注意すれば, この特殊 K3 曲面の周期が, ④ 内で稠密であること ([8] §6, 定理 2, ただし少し強める要あり) を, 用いて, 主定理 I の証明と, 本質的に同じやり方で出る.

これは, Looijenga が注意した.

References

- [1] Atiyah, M. F., Hitchin, N. J., Singer, I. M. : Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, Proc. Roy. Soc. London, 362 (1978), 425-461.
- [2] Burns, D., Rapoport, H. : On the Torelli problems for kählerian K-3 surfaces, Ann. Sc. E.N.S., 8 (1975), 235-274.
- [3] Kodaira, K., Nirenberg, L., Spencer, D. C. : On the existence of deformations of complex analytic structures, Ann. of Math., 68 (1958), 450-459.
- [4] Kulikov, V. S. : Degenerations of K3 surfaces and Enriques surfaces, (English translation), 11 (1977), 957-989.
- [5] Looijenga, E, Peters, Ch. : Torelli theorems for Kähler K3 surfaces, preprint.
- [6] Miyaoka, Y. : Kähler metrics on elliptic surfaces, Proc. Japan Acad., 50 (1974), 533-536.
- [7] Persson, U., Pinkham, H. : Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, or K3 : the north face, preprint.
- [8] Pjatečnikii-Šapiro, I. I.; Šafarevič, I. R. : A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR Izvestija (English translation), 5 (1971), 547-588.
- [9] Rossi, H. : Attaching analytic spaces to an analytic space along a pseudoconcave boundary, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minneapolis 1964, Springer, 1965, 242-256.
- [10] Yau, S. T. : Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 74 (1977), 1798-1799.