

非負優調和函数がつくる線形空間上の 核型な位相について

静大 理 郡 敏昭

§ 1. 優調和函数に対応するある測度

微分作用素 $L = \sum \frac{\partial}{\partial x_j} [a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i}]$ が有界可測な係数を持ち 強楕円的であるとき A. Pietseh は

$$\mathcal{N}(G) = \{ \varphi \mid L\varphi = 0 \}, \quad G_{\text{open}} \subset \mathbb{R}^n,$$

が G のコンパクト-様収束の位相により核型になることを示

した。P. Loebl と B. Walsh はこれを拡張し、公理的論的

ポテンシャル論において調和函数のつくる空間が核型に

なることを示した。一方 Brelot, R.M. Herve により非

負優調和函数を positive cone とする Riesz 空間上の局所凸

な位相が導びかれており、非負調和函数上にそれを制限する

とコンパクト-様収束と一致し 非負調和函数はこの空間

の閉じた cone になる事等がわかっている。我々はこの局所

凸な位相が核型であることを示す。例えば上記の微分作用

素 L に関しては函数解析的な取り扱い (Sobolev 空間,

Lax-Milgram の定理) が当然なされるが それらは公理

論的ポテンシャル論に移されることは当然ながら不可能である。しかし我々の結果により何かの類似が公理的ポテンシャル論の場合にも行なわれるのではないかと希望できる。例えば L を見つけることや Lax-Milgram の定理の類似を見つけること等ができるなら最近の福島-国田 等の結果と公理的ポテンシャル論の橋わたしが可能だろう(か?)。

X を Brelot の公理 1, 2, 3 をみたす harmonic fn. の sheaf $\mathcal{H}$ が与えられた harmonic space とする。我々は non-zero potential の存在を仮定する。Herve の分解定理は次のように述べられる。

任意の開集合 G と任意の非負優調和函数 u に対し

$$\mathcal{B}_G(u) = \left\{ \begin{array}{l} s; \text{ superharmonic, } \geq 0, \text{ on } X, \\ s = u + t \quad \text{for some superharm. fn. } t \text{ on } G \end{array} \right\}$$

とあき,

$$u_G = \inf \mathcal{B}_G(u)$$

とあき。このとき u_G は X 上で非負 superharm. であり $X - \overline{G}$ 上で harmonic となる。さらにある G 上で調和な非負優調和函数 w が存在して $u = u_G + w$ と書ける。

K をコンパクト集合とするとき, $G = X - K$ とおいて次を

得る。 $\exists \mu_K \in \mathcal{I}_+(X) \cap \mathcal{H}(X-K)$, such that

$$\mu = \mu_K + \mu_{X-K}.$$

$\mu \in \mathcal{I}_+(X)$ を Riesz 分解して $\mu = p + h$, $h \in \mathcal{H}_+(X)$, p はポテンシャル, とすると $\mu_K = p_K$ であり, $\mu_{X-K} = p_{X-K} + h$ である。

今 X_0 を X の一点コンパクト化 $X_0 = X \cup \{\infty\}$ とし, $x \in X$ を固定する。このとき開集合 $G \subset \bar{G} \subset X_0 - \{\infty\}$ に対し $G \rightarrow \mu_{G \cap X}(x)$ を対応させて $X_0 - \{\infty\}$ 上のラドン測度を得る。($\mu_{G \cap X} \in \mathcal{H}(X - \bar{G})$ より $\mu_{G \cap X}(x) < \infty$)。この測度による $f \in C_c^+(\bar{X}_0 - \{\infty\})$ の積分を $f \cdot \mu$ と書く。 $\mu = p + h$ とするから $f \cdot \mu = f \cdot p + f(\infty)h$ であることがわかる。 $f \cdot \mu$ は $X - \text{Supp}[f]$ で調和である。

$\mathcal{I}_+(X) \times \mathcal{I}_+(X) \ni (s, s'), (t, t')$ に対し同値関係 $\sim$ を

$$(s, s') \sim (t, t') \iff s + t' = s' + t$$

で定義し, $E = \mathcal{I}_+(X) \times \mathcal{I}_+(X) / \sim$ とおき, E の線型演算を, $E \ni [s, s'], [t, t']$ に対し

$$\begin{aligned} [s, s'] + [t, t'] &= [s+t, s'+t'], \\ \alpha [s, s'] &= [\alpha s, \alpha s'], \quad (\alpha \geq 0) \\ -\alpha [s, s'] &= [\alpha s', \alpha s], \end{aligned}$$

により定義する。又 E における順序を

$$[s, s'] \succ [t, t'] \iff [s, s'] = [t, t'] + [u, 0] \\ \exists u \in \mathcal{J}_+(X)$$

で定義する。

定理. $(E, \succ)$ は conditionally complete vector lattice となる。

X 上の可積分な台をもつ測度 $\mu \geq 0$ と $f \in C_c^+(X_0 - K_\mu)$ の組のことを couple (f, μ) という。ただし K_μ は μ の台のことである。 E 上の線形写像

$$E \ni [s, s'] \longrightarrow \int (f \cdot s - f \cdot s') d\mu$$

を考える。任意の couple に対しこの線形写像を連続にするような E 上の位相で最も弱いものを τ -位相と言う。

(E, τ) は局所凸な線形位相空間となり、順序 $\prec$ による positive cone $[\mathcal{J}_+(X), 0] \simeq \mathcal{J}_+(X)$ は E で閉いている。次のことがわかる。

(i) $(\mathcal{J}_+(X), \tau)$ は metrisable, complete となる。

(ii) $(\mathcal{H}_+(X), \tau) = (\mathcal{H}_+(X), \text{compact-ideal束の位相})$ となり、これは閉部分空間である。

(iii) $\mathcal{J}_+(X)$ は compact な base をもつ cone である。

§2 E は核型。

Pietsch による次の定理を使う。

定理: E を局所凸線形位相空間とする。いま E の closed convex circled な 0 の近傍 W に対し必ずある E' の equiconti. な関数集合 A を見つけることができる。また (この $\sigma(E', E)$ -compact な) A 上のラドン測度 ≥ 0 , μ , を見つけることができる。

$$p_W(x) \leq \int_A |\langle x, x' \rangle| d\mu(x'), \quad \forall x \in E,$$

が成り立つようにできるなら E は核型である。ただし p_W は $p_W(x) = \inf \{ \lambda > 0 : x \in \lambda W \}$ 。

補題, 任意のコンパクト集合 K と $f \in C_c^+(X_0 - K)$ に対しセミノルム $p_{(f, K)}([s, s']) = \sup_K |f \cdot s - f \cdot s'|$ を考える。このセミノルムの族により E 上に与えられる位相は τ -位相と等値である。

証. これが τ -位相より強いことはあきらか。今 (f, K) を上の条件をみたす組とし $K \subset U \subset \bar{U} \subset X - \text{Supp}[f]$ なる開集合 U をとる。Harnack の不等式より $x_0 \in K$ に対しある定数 $M \geq 1$ が存在して

$$\sup_{K \ni x} h(x) \leq M \cdot h(x_0), \quad \forall h \in \mathcal{H}_+(U),$$

とできる。 $q \in C(\partial U)$ に対し, U 上 q

$$H^U q = \inf \{ s \in \mathcal{S}(U) ; \liminf_{U \ni y \rightarrow x} s(y) \geq q(x), \forall x \in \partial U \}$$

$> -\infty$

により定義される函数は, U 上 q harmonic となる。また

$f \cdot s$, $s \in \mathcal{S}_+(X)$, は $X - \text{Supp}[f]$ 上, したがって U 上調和だから $H^U(f \cdot s - f \cdot s') = f \cdot s - f \cdot s'$ on U , $\forall [s, s']$.

これより

$$\sup_K |f \cdot s - f \cdot s'| \leq \sup_K H^U |f \cdot s - f \cdot s'|$$

$$\leq M \cdot H^U |f \cdot s - f \cdot s'| (x_0) = \langle \mu, |f \cdot s - f \cdot s'| \rangle$$

, たたし $\mu(q) = M \cdot H^U q$ は ∂U 上の測度。

これより題意の位相は T -位相より弱い。

定理 (E, T) は核型空間である。

証明. (f, ν) を couple とする。

$$\mathcal{U} = \{ [s, s'] \in E ; \langle \nu, |f \cdot s - f \cdot s'| \rangle \leq 1 \}$$

とおく。 $\mathcal{U}$ の gauge は $p_{\mathcal{U}}([s, s']) = \langle \nu, |f \cdot s - f \cdot s'| \rangle$

である。点 x_0 と開集合 V を

$$x_0 \in K_V \subset V \subset \overline{V} \subset X - \text{Supp}[f]$$

ととる。

$$\mathcal{V} = \{ [s, s'] \in E ; \sup_{\overline{V}} |f \cdot s - f \cdot s'| \leq 1 \}$$

とおくと 補題より $\mathcal{V}$ は E の中で 0 の近傍である。

したがって $A = (V)^\circ = V$ の absolute polar in E' は equicontinuous, $\sigma(E', E)$ -closed subset である。

さて $\xi \in \partial U$ に対し $g_\xi \in E'$ を $g_\xi([s, s']) = f \cdot s(\xi) - f \cdot s'(\xi)$, $[s, s'] \in E$, により定めさせよう。明らかに $g_\xi \in A$ 。いま $g_\xi = g_{\xi'}$, $\xi, \xi' \in \partial U$, であつたとしよう。すなわち $\forall [s, s'] \in E$ に対し $f \cdot s(\xi) - f \cdot s'(\xi) = f \cdot s(\xi') - f \cdot s'(\xi')$ 。

とくに $f \cdot s(\xi) = f \cdot s(\xi')$, $\forall s \in \mathcal{H}_+(X)$ 。

$s \in \mathcal{H}_+(X)$ として $f(\omega) s(\xi) = f(\omega) s(\xi')$ すなわち $\forall h \in \mathcal{H}_+(X)$ に対し $h(\xi) = h(\xi')$ 故に $\xi = \xi'$ となる。

$\xi \rightarrow g_\xi$ が $\partial U \rightarrow E'_0$ なる写像として conti. となる ($f \cdot s - f \cdot s' \in \mathcal{H}(X - \text{Supp } f)$ より)。したがって

$\xi \rightarrow g_\xi$ は conti. な injection となる。これより ∂U 上の測度 $\lambda(d\xi)$ は

$$\Theta(F) = \int F \circ g_\xi \lambda(d\xi), \quad F \in C(A)$$

により A 上の測度 Θ を定めることがわかる。

上の補題と同様に ある定数に対し

$$\sup_{K_\nu} |f \cdot s - f \cdot s'| \leq M \cdot H^U |f \cdot s - f \cdot s'|(\alpha_0)$$

が $\forall [s, s'] \in E$ に対し 成り立つようにできるから

$\lambda(d\xi) = \nu(X) \cdot M \cdot H^U(\alpha_0, d\xi)$ に対応する A 上の

Radon 測度を $\Theta(dg)$ とすると

$$\begin{aligned}
 P_{\mathcal{U}}([s, s']) &= \langle \nu, |f \cdot s - f \cdot s'| \rangle \leq \\
 &\leq \nu(X) \cdot M \cdot H^{\nu} |f \cdot s - f \cdot s'| (x.) \\
 &= \int_A | \langle g, [s, s'] \rangle | \textcircled{H} (dg) , \quad \forall [s, s'] \in E.
 \end{aligned}$$

Pietsch の定理より E は核型となる。

注 (1) 我々は Brelot の公理系について話をしてきたが Bauer の公理系についても同様のことが言える。ただし Harnack の不等式はもっと複雑な形のものを使わねばならない。

(4) $\langle \mu, f \cdot s \rangle$ なる量は green kernel を $g(x, y)$ として $\int g(x, y) \mu(dy)$ なるポテンシャルと $\int g(x, y) f(y) \mu_s(dy)$ なるポテンシャルのエネルギーと同じ形をしている。ただし μ_s は $s \in \mathcal{S}_+(X)$ に対応する (表現する) 測度。このことが本論の序に書いた問題を推測させる。

R.M. Herve: Ann. Inst. Fourier. 12 (1962)

H.H. Schaefer: Topological Vector Spaces. Macmillan