

# 代用電荷法による 放射スリット領域への数値等角写像

天野 要  
愛媛大学工学部

Numerical Conformal Mapping onto the Radial Slit Domains  
by the Charge Simulation Method

Kaname Amano  
Faculty of Engineering, Ehime University

*Abstract.* A radial slit domain is the entire plane with slits along rectilinear lines pointing at the origin. In this paper, we present a simple numerical method for computing conformal maps from domains exterior to closed Jordan curves onto the radial slit domain. The mapping is important in problems of two-dimensional point-source flow with obstacles. The numerical method is based on the charge simulation method, in which conjugate harmonic functions are approximated by a linear combination of complex logarithmic potentials. The method works well for simple test domains, but brings on a highly ill-conditioned problem.

## 1 はじめに

多重連結領域の等角写像は単連結領域の場合と様相が異なる。領域の多重度を固定しても、単一の標準領域は存在しない。また、相互に等角写像できるのはモジュラスと呼ばれる保存量を同じくする領域間に限られる。しかし、標準領域の幾何学的な形状を適当に設定すれば、領域の多重度とモジュラスの値を固定することなく等角写像の問題を議論することができる。典型的な標準領域としては、(a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域、(d) 円弧スリットを伴う円板領域、(e) 円弧スリットを伴う円環領域、等がある。応用上重要な問題の多くはこのような標準領域の場合である。

多重連結領域の等角写像の可能性と一意性に関しては Nehari[9] に詳しい。しかし、数値等角写像の方法に関する研究は多くない。応用数学や流体力学ではポピュラーな話題でありながら、簡潔で精度の高い方法は知られていない。特に、直線スリットを伴う標準領域に適した方法は皆無に近い。これまでの数値等角写像の方法に関しては Gaier[6], Henrici[7], Trefethen[11] に詳しい。

最近、天野 [5] は、Laplace 方程式の近似解法として知られている代用電荷法 [8, 10] に基づいて、幾つかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から円弧スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験的に検証した。こ

の等角写像は渦点と障害物を伴う2次元ポテンシャル流に関係し、応用上重要である。提案された方法の原理は、等角写像の問題を1対の共役な調和関数を求める問題に帰着させ、それを複素対数ポテンシャルの1次結合で近似するというものである。なお、この原理がスリットを伴わない単位円板領域、その外部（いずれも単連結領域）、円環領域（2重連結領域）を標準領域とする数値等角写像の方法として有効であることは既に知られている[1, 2, 3, 4]。

本論文では、幾つかの Jordan 閉曲線の外側の無限遠点を含む非有界な多重連結領域から放射スリット領域への数値等角写像の方法を提案する。この等角写像は湧出点または吸込点と障害物を伴う2次元ポテンシャル流に関係し、応用上重要である。提案される方法の原理は放射スリット領域への等角写像が円弧スリット領域への等角写像と双対な問題であることに基づく。具体的には、円弧スリット領域の場合と同様に、1対の共役な調和関数を複素対数ポテンシャルの1次結合で近似する。しかし、未定係数である電荷を決定するための拘束条件は複素対数ポテンシャルの実部ではなく虚部に課す。この方法は非常に簡潔で、しかも、円弧スリット領域への等角写像と放射スリット領域への等角写像を双対な問題にふさわしい統一的なアルゴリズムで計算することができる。しかし、典型的な領域に対する数値実験の結果、簡単な領域に対しては比較的精度の高い近似解が得られたものの、一般に非常に条件の悪い連立1次方程式に帰着することがわかった。

## 2 写像定理

原点から発する放射状の直線スリットを伴う複素平面の全体を放射スリット領域と呼ぶ。任意の領域  $D$  はこのような放射スリット領域へ等角写像することができる[9]。さらに、 $D$  内に異なる2点  $u, v$  を取り、 $u$  は原点に、 $v$  は無限遠点に移り、 $v$  における写像関数の留数が1であるという正規化条件の下に、この等角写像は一意的に定まる。

ここでは、Fig. 1 のように、領域  $D$  は  $z$  平面上の  $n$  個の Jordan 閉曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の外側の無限遠点を含む非有界な  $n$  重連結領域であるとする。この領域は  $n=1$  すなわち単一の Jordan 曲線の外側であってもよい。さらに、 $u$  を原点に、 $v$  を無限遠点に取って、 $D$  から  $w$  平面上の放射スリット領域への等角写像を考える。その写像関数を  $w = f(z)$  とすれば、問題の正規化条件は  $f(0) = 0, f(\infty) = \infty$  および  $f'(\infty) = 1$  となる。無限遠点における条件は  $f(z) \sim z (z \rightarrow \infty)$  なる漸近関係を意味する。写像の結果、曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  は偏角がそれぞれ  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$  なる放射スリット  $S_1, S_2, \dots, S_n$  に移るとする。スリットの位置と長さは写像関数とともに定まる。

流体力学的には、写像関数  $f(z)$  の絶対値と偏角の等高線は、原点に湧出点または吸込点が存在し、周囲に  $C_1, C_2, \dots, C_n$  を輪郭線とする障害物が存在する場合の2次元ポテンシャル流の等速度ポテンシャル線と流線を与える。

この写像関数を

$$(2.1) \quad f(z) = z \exp(g(z) + ih(z))$$

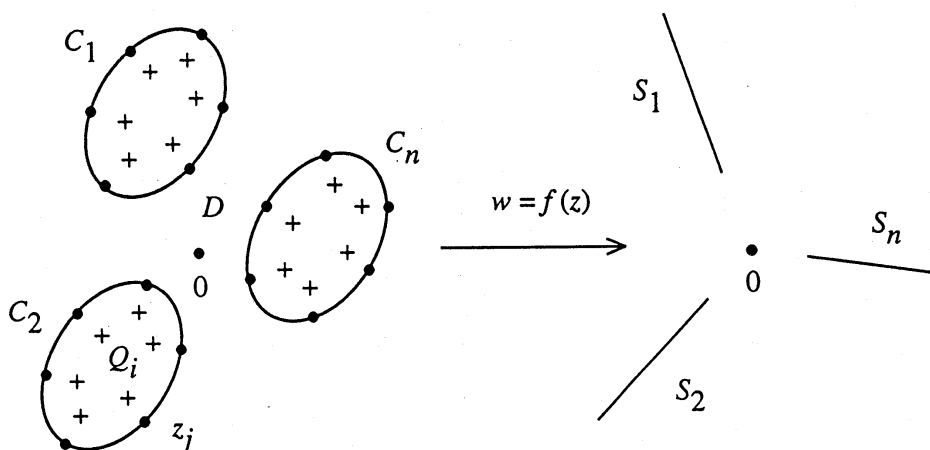


Fig. 1. Conformal mapping onto the radial slit domain by the charge simulation method.

と表現する. ここに,  $g(z)$  と  $h(z)$  は  $D$  で共役な調和関数である. 曲線  $C_l$  がスリット  $S_l$  に移るという境界条件  $\arg f(z) = \theta_l$  ( $z \in C_l$ ) から,  $h(z)$  は

$$(2.2) \quad h(z) + \arg z = \theta_l \quad (z \in C_l, \quad l = 1, 2, \dots, n)$$

なる関係を満たさなければならない. また, 無限遠点における正規化条件  $f'(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)/z = 1$  から,  $g(z)$  と  $h(z)$  は

$$(2.3) \quad g(\infty) + ih(\infty) = 0$$

すなわち  $g(\infty) = h(\infty) = 0$  なる関係を満たさなければならない.

逆に, (2.2) 式と (2.3) 式が成立すれば, (2.1) 式の  $f(z)$  が正規化条件を満たすことは容易にわかる. 一意性から, 等角写像の問題はこのような共役調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  を求める問題に帰着する.

曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  が原点を中心とする半径  $r_1, r_2, \dots, r_n$  なる円弧スリットに移るとし, (2.2) 式を  $|f(z)| = r_l$  ( $z \in C_l$ ) すなわち  $g(z) + \log |z| = \log r_l$  ( $z \in C_l$ ) とすれば, 以上の記述は円弧スリット領域の場合 [5] に一致する.

### 3 数値写像の方法

#### 3.1 代用電荷法の適用

共役な調和関数  $g(z)$  と  $h(z)$  に代用電荷法を適用し, 領域  $D$  の外部すなわち曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の内側に配置された  $N_1, N_2, \dots, N_n$  個, 計  $N$  個, の電荷点  $\zeta_i$  (または

$\zeta_{li}$ , 以下同様) を極とする複素対数ポテンシャルの 1 次結合

$$(3.1) \quad G(z) + iH(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log(z - \zeta_{li})$$

で近似して, 問題の等角写像の近似写像関数

$$(3.2) \quad F(z) = z \exp(G(z) + iH(z))$$

を得ることができる. 未定係数である電荷  $Q_i$  (または  $Q_{li}$ , 以下同様) は曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  上に配置された  $N_1, N_2, \dots, N_n$  個の拘束点  $z_j$  (または  $z_{lj}$ , 以下同様) で境界条件 (2.2) を満たすように定められる. すなわち, 拘束条件と呼ばれる連立 1 次方程式

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z_{lj} - \zeta_i) - \Theta_l = -\arg z_{lj} \quad (z_{lj} \in C_l, \quad j = 1, 2, \dots, N_l, \quad l = 1, 2, \dots, n)$$

を満たさなければならない.  $\Theta_l$  は  $\theta_l$  の近似値である. また, 無限遠点における正規化条件 (2.3) から

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N Q_i \log(z - \zeta_i) = 0$$

すなわち

$$(3.4) \quad \sum_{i=1}^N Q_i = 0$$

でなければならない. さらに, (3.1) 式の虚部  $H(z)$  は一般的には無限多価であり, これが  $D$  内で 1 価であるためには,  $D$  内の任意の閉曲線  $\tilde{C}$  に対して,

$$\int_{\tilde{C}} dH(z) = 0$$

でなければならない. この条件は, 曲線  $C_l$  のみを囲む任意の閉曲線  $\tilde{C}_l$  に対して, 個別に

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}_l} dH(z) &= \int_{\tilde{C}_l} d \sum_{i=1}^N Q_i \arg(z - \zeta_i) \\ &= \sum_{i=1}^N Q_i \int_{\tilde{C}_l} d \arg(z - \zeta_i) \\ &= \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \int_{\tilde{C}_l} d \arg(z - \zeta_{li}) + \sum_{m \neq l} \sum_{i=1}^{N_m} Q_{mi} \int_{\tilde{C}_l} d \arg(z - \zeta_{mi}) \\ &= 2\pi \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \\ &= 0 \end{aligned}$$

すなわち

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

が成立することと同値である。(3.4) 式と (3.5) 式は独立ではなく、後者が成立すれば前者も成立する。

(3.3) 式と (3.5) 式は  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$  と  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$  という  $N+n$  個の未知量に対する  $N+n$  元の連立 1 次方程式を構成する。これを解いて  $Q_i$  と  $\Theta_l$  が定まれば、各点ごとに (3.1) 式と (3.2) 式で近似写像関数  $F(z)$  の値を計算することができる。

### 3.2 主値関数と連続性

複素対数ポテンシャルの計算には注意が必要である。すなわち、(3.1) 式の虚部  $H(z)$  は領域  $D$  内で 1 価であると同時に連続でなければならない。しかし、 $\arg$  の値域は特定の長さ  $2\pi$  の区間に限定される。ここでは、主値  $\text{Arg}$  を採用して、この区間を  $(-\pi, \pi]$  の範囲に取る。 $\text{Arg}(z - \zeta_i)$  は  $\zeta_i$  の左側の半直線上に  $2\pi$  の不連続を伴う。したがって、

$$(3.6) \quad H(z) = \sum_{i=1}^N Q_i \text{Arg}(z - \zeta_i)$$

は  $D$  内に  $N$  本の不連続線を伴い、このままでは連続な関数を近似することはできない。

#### 3.2.1 一般の場合

個々の曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の内側の電荷ごとに項をまとめて、(3.5) 式を適用し、(3.6) 式を

$$\begin{aligned} (3.7) \quad H(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \text{Arg}(z - \zeta_{li}) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{N_l-1} \left( \sum_{k=1}^i Q_{lk} \right) (\text{Arg}(z - \zeta_{li}) - \text{Arg}(z - \zeta_{li+1})) + \left( \sum_{k=1}^{N_l} Q_{lk} \right) \text{Arg}(z - \zeta_{lN_l}) \right\} \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} \left( \sum_{k=1}^i Q_{lk} \right) \text{Arg}\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}}\right) \end{aligned}$$

と変形する。 $\text{Arg}((z - \zeta_{li})/(z - \zeta_{li+1}))$  の不連続は電荷点  $\zeta_{li}$  と  $\zeta_{li+1}$  を結ぶ直線上に現れる。したがって、(3.7) 式の不連続線は個々の曲線  $C_l$  の内側の  $N_l$  個の電荷点を順に結んだ直線 ( $\zeta_{lN_l}$  と  $\zeta_{l1}$  の間を除く) 上に現れる。したがって、電荷点をある程度密に配置すれば、曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  の形の如くにかかわらず、領域  $D$  で 1 価連続な関数を近似することができる。

連立 1 次方程式 (3.3) についても同様に

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} \left( \sum_{k=1}^i Q_{lk} \right) \text{Arg} \left( \frac{z_{lj} - \zeta_{li}}{z_{lj} - \zeta_{li+1}} \right) - \Theta_l = -\text{Arg} z_{lj}$$

$$(z_{lj} \in C_l, \quad j = 1, 2, \dots, N_l, \quad l = 1, 2, \dots, n)$$

と変形する. この式は電荷の和  $\sum_{k=1}^i Q_{lk}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_l - 1, l = 1, 2, \dots, n$ ) と  $\Theta_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) という計  $N$  個の未知量に対する  $N$  元の連立 1 次方程式である. これを解いて  $\sum_{k=1}^i Q_{lk}$  と  $\Theta_l$  が定まれば, 各点ごとに  $F(z)$  の値を計算することができる. ただし, (3.1) 式の  $G(z)$  は

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \log |z - \zeta_{li}| \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ Q_{l1} \log |z - \zeta_{l1}| + \sum_{i=2}^{N_l} \left( \sum_{k=1}^i Q_{lk} - \sum_{k=1}^{i-1} Q_{lk} \right) \log |z - \zeta_{li}| \right\} \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ Q_{l1} \log |z - \zeta_{l1}| + \sum_{i=2}^{N_l-1} \left( \sum_{k=1}^i Q_{lk} - \sum_{k=1}^{i-1} Q_{lk} \right) \log |z - \zeta_{li}| \right. \\ &\quad \left. - \left( \sum_{k=1}^{N_l-1} Q_{lk} \right) \log |z - \zeta_{lN_l}| \right\} \end{aligned}$$

となる.

以上の数値等角写像の方法を次のように整理することができる.

定式化 1 : 近似写像関数は

$$\begin{aligned} F(z) &= z \exp (G(z) + iH(z)), \\ G(z) + iH(z) &= \sum_{l=1}^n \left\{ Q_l^1 \log |z - \zeta_{l1}| + \sum_{i=2}^{N_l-1} (Q_l^i - Q_l^{i-1}) \log |z - \zeta_{li}| \right. \\ &\quad \left. - Q_l^{N_l-1} \log |z - \zeta_{lN_l}| + i \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \text{Arg} \left( \frac{z - \zeta_{li}}{z - \zeta_{li+1}} \right) \right\} \end{aligned}$$

である. 未定係数である電荷の和  $Q_l^i = \sum_{k=1}^i Q_{lk}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_l - 1, l = 1, 2, \dots, n$ ) とスリットの偏角  $\Theta_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) は  $N$  元連立 1 次方程式

$$\sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l-1} Q_l^i \text{Arg} \left( \frac{z_{lj} - \zeta_{li}}{z_{lj} - \zeta_{li+1}} \right) - \Theta_l = -\text{Arg} z_{lj}$$

$$(z_{lj} \in C_l, \quad j = 1, 2, \dots, N_l, \quad l = 1, 2, \dots, n)$$

の解である.

### 3.2.2 星形の場合

個々の曲線  $C_1, C_2, \dots, C_n$  がそれぞれの内側の 1 点  $z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0}$  に対して星形であれば、同様に (3.5) 式を適用し、(3.6) 式を

$$(3.8) \quad \begin{aligned} H(z) &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \operatorname{Arg}(z - \zeta_{li}) - \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \operatorname{Arg}(z - z_{l0}) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \operatorname{Arg}\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - z_{l0}}\right) \end{aligned}$$

と変形して、領域  $D$  で 1 価連続な関数を近似することができる。  $\operatorname{Arg}((z - \zeta_{li})/(z - z_{l0}))$  の不連続は点  $\zeta_{li}$  と  $z_{l0}$  を結ぶ直線上に現れる。したがって、(3.8) 式の不連続線は個々の曲線  $C_l$  の内側の 1 点  $z_{l0}$  と  $N_l$  個の電荷点  $\zeta_{li}$  を結ぶ直線上に現れる。

この場合には、未知量を電荷の和  $Q_l^i$  ではなく電荷  $Q_{li}$  のままで、次のような数値等角写像の方法を得ることができる。

定式化 2：近似写像関数は

$$\begin{aligned} F(z) &= z \exp(G(z) + iH(z)), \\ G(z) + iH(z) &= \sum_{l=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} (\log |z - \zeta_{li}| + i \operatorname{Arg}\left(\frac{z - \zeta_{li}}{z - z_{l0}}\right)) \right\} \end{aligned}$$

である。未定係数である電荷  $Q_{li}$  ( $i = 1, 2, \dots, N_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, n$ ) とスリットの偏角  $\Theta_l$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) は  $N + n$  元連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} \operatorname{Arg}\left(\frac{z_{lj} - \zeta_{li}}{z_{lj} - z_{l0}}\right) - \Theta_l &= -\operatorname{Arg} z_{lj}, \\ \sum_{i=1}^{N_l} Q_{li} &= 0 \end{aligned}$$

$$(z_{lj} \in C_l, \quad j = 1, 2, \dots, N_l, \quad l = 1, 2, \dots, n)$$

の解である。

## 4 数値実験

前節の定式化 1 と定式化 2 を円弧スリット領域の場合 [5] と同じ問題領域に適用する。計算結果の提示には次の記号が用いられる。

$N$ ：拘束点数＝電荷数。以下の例では  $N_1 = N_2 = \dots = N_n = N$  とする。したがって、総数は  $nN$  である。

$q$ ：電荷配置のパラメータ ( $0 < q < 1$ )。

$C_N$ ：連立 1 次方程式の係数行列の  $L_1$  条件数。

数値実験は東芝 AS4080/51GX 上の f77 倍精度計算による。連立 1 次方程式の求解と条件数の評価には IMSL を使用する。解の反復改良は行わない。

例 1 円の外部  $D: |z - a| > 1 \quad (|a| > 1)$   
拘束点と電荷点は

$$z_j = a + \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i, \quad \zeta_j = a + q \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i$$

と配置する。

この問題では、文献 [9] の p. 340, Exercise 1 の  $Q(z; u, v)$  から、解析解

$$f(z) = \frac{z(z - (a - 1/\bar{a}))}{z - a}, \quad \theta = \arg a$$

を導くことができる。 $\bar{a}$  は  $a$  の共役複素数である。この  $f(z)$  が正規化条件  $f(0) = 0$ ,  $f(\infty) = \infty$ ,  $f'(\infty) = 1$  と  $\arg f(z) = \theta \ (z \in C)$ ,  $f'(z) \neq 0 \ (z \in D)$  を満たすことは容易に確認できる。解析解との直接的な比較により、誤差の指標として

$$\begin{aligned} E_A &= \max_j |\arg F(z_{j+\frac{1}{2}}) - \theta|, \\ E_F &= \max_j \{|F(z_{j+\frac{1}{2}}) - f(z_{j+\frac{1}{2}})|, |F(z_j) - f(z_j)|\}, \\ E_\Theta &= |\Theta - \theta| \end{aligned}$$

を計算する。 $z_{j+1/2}$  は境界上の拘束点  $z_j$  と  $z_{j+1}$  の間の中間点である。

Fig. 2 と Fig. 3 はそれぞれ  $a = 2$  と  $a = 5$  の場合の数値写像の様子である。記号  $\circ$ ,  $+$ ,  $\times$  は座標系の原点、電荷点、拘束点である。図から想像されるように、上記の解析解は、

$$f(z) = \exp(i\theta) \left\{ (z - a) \exp(-i\theta) + \frac{1}{(z - a) \exp(-i\theta)} + |a| + \frac{1}{|a|} \right\}$$

と変形することができて、並進と回転を伴う Joukowski 変換であることがわかる。

Table 1 と Table 2 は  $a = 2$  の場合にそれぞれ定式化 1 と定式化 2 を適用した結果である。定式化 2 では  $z_0 = a$  とする。 $N$  の右肩の \* は IMSL から悪条件の警告が出力されたことを示す。数値は省略するが、 $a = 5$  の場合にも同様な結果が得られる。このように、いずれの定式化でも、パラメータ  $a, N, q$  の広い範囲で比較的高い計算精度を得ることができる。しかし、連立 1 次方程式の条件数が大きく、すべての場合に悪条件の警告が出力されている。

なお、例 1 で  $q = 1/|a|$  の場合は次のような意味で特殊である。解析解は

$$f(z) = z \exp\{-\log(z - a) + \log(z - (a - 1/\bar{a}))\}$$

と変形することができる。すなわち、 $\zeta = a$  と  $a - 1/\bar{a}$  に  $Q = -1$  と  $1$  なる電荷を配置すれば、代用電荷法の解は解析解に一致する。 $q = 1/|a|$  の場合には、電荷点の 1 つが  $\zeta = a - 1/\bar{a}$  に重なることがある。Table 1 と Table 2 で  $q = 0.5$  がその例である。



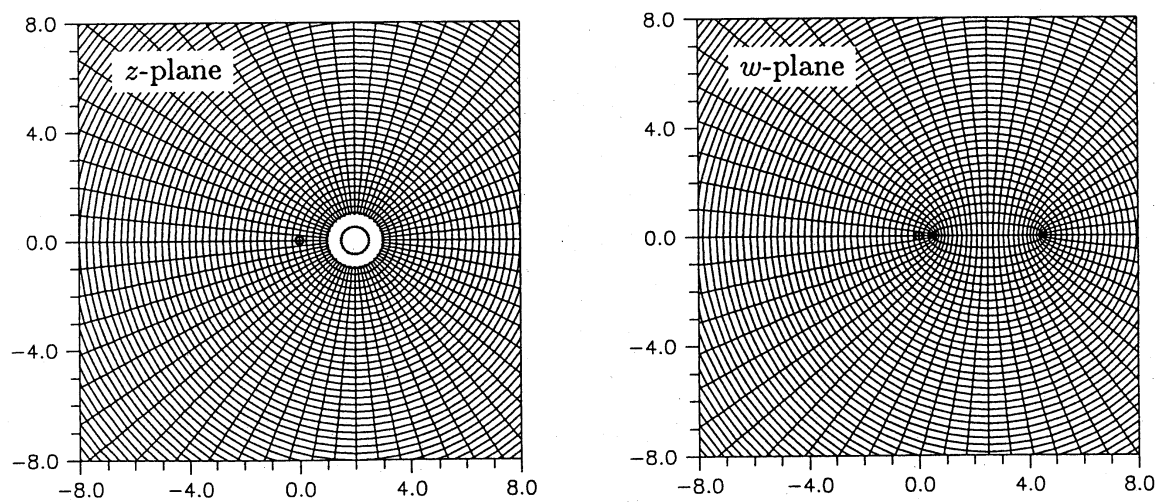


Fig. 2. Numerical mapping of the exterior of a disk,  $|z - 2| > 1$ .

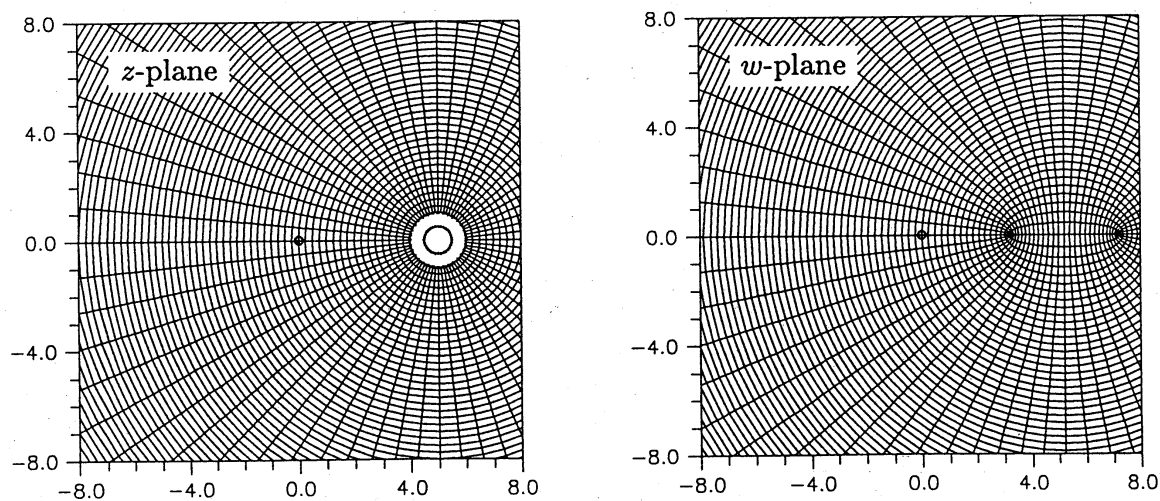


Fig. 3. Numerical mapping of the exterior of a disk,  $|z - 5| > 1$ .

Table 1. Numerical results for  $|z - 2| > 1$ , using the formulation 1.

| $q$ | $N$  | $E_A$                 | $E_F$                 | $E_\Theta$            | $C_N$                |
|-----|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 0.2 | 16*  | $1.1 \times 10^{-3}$  | $7.6 \times 10^{-4}$  | $9.7 \times 10^{-16}$ | $5.4 \times 10^{17}$ |
|     | 32*  | $1.9 \times 10^{-6}$  | $9.8 \times 10^{-7}$  | $3.0 \times 10^{-13}$ | $2.1 \times 10^{18}$ |
|     | 64*  | $8.7 \times 10^{-8}$  | $8.8 \times 10^{-7}$  | $4.9 \times 10^{-9}$  | $7.5 \times 10^{18}$ |
|     | 128* | $1.8 \times 10^{-7}$  | $2.0 \times 10^{-6}$  | $3.0 \times 10^{-9}$  | $3.0 \times 10^{20}$ |
| 0.5 | 16*  | $9.9 \times 10^{-3}$  | $4.5 \times 10^{-2}$  | $9.0 \times 10^{-19}$ | $1.7 \times 10^{18}$ |
|     | 32*  | $2.1 \times 10^{-5}$  | $9.3 \times 10^{-5}$  | $6.9 \times 10^{-17}$ | $2.5 \times 10^{18}$ |
|     | 64*  | $1.1 \times 10^{-10}$ | $5.0 \times 10^{-10}$ | $1.5 \times 10^{-18}$ | $6.8 \times 10^{17}$ |
|     | 128* | $9.7 \times 10^{-15}$ | $8.8 \times 10^{-14}$ | $1.4 \times 10^{-16}$ | $8.9 \times 10^{19}$ |
| 0.8 | 16*  | $2.9 \times 10^{-2}$  | $1.3 \times 10^{-1}$  | $3.5 \times 10^{-17}$ | $3.8 \times 10^{17}$ |
|     | 32*  | $2.6 \times 10^{-2}$  | $1.2 \times 10^{-1}$  | $2.1 \times 10^{-17}$ | $3.2 \times 10^{17}$ |
|     | 64*  | $4.6 \times 10^{-3}$  | $2.1 \times 10^{-2}$  | $3.3 \times 10^{-17}$ | $8.6 \times 10^{18}$ |
|     | 128* | $1.1 \times 10^{-6}$  | $4.8 \times 10^{-6}$  | $5.9 \times 10^{-18}$ | $2.9 \times 10^{18}$ |

Table 2. Numerical results for  $|z - 2| > 1$ , using the formulation 2.

| $q$ | $N$  | $E_A$                 | $E_F$                 | $E_\Theta$            | $C_N$                |
|-----|------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 0.2 | 16*  | $1.1 \times 10^{-3}$  | $6.5 \times 10^{-4}$  | $7.9 \times 10^{-16}$ | $5.0 \times 10^{17}$ |
|     | 32*  | $2.4 \times 10^{-6}$  | $1.6 \times 10^{-6}$  | $8.7 \times 10^{-13}$ | $5.3 \times 10^{17}$ |
|     | 64*  | $5.1 \times 10^{-6}$  | $2.8 \times 10^{-5}$  | $2.2 \times 10^{-9}$  | $2.1 \times 10^{20}$ |
|     | 128* | $2.9 \times 10^{-7}$  | $2.8 \times 10^{-6}$  | $8.9 \times 10^{-9}$  | $3.4 \times 10^{19}$ |
| 0.5 | 16*  | $3.8 \times 10^{-3}$  | $1.7 \times 10^{-2}$  | $2.5 \times 10^{-17}$ | $2.2 \times 10^{17}$ |
|     | 32*  | $3.0 \times 10^{-6}$  | $1.4 \times 10^{-5}$  | $3.3 \times 10^{-17}$ | $3.7 \times 10^{17}$ |
|     | 64*  | $7.9 \times 10^{-11}$ | $3.6 \times 10^{-10}$ | $3.3 \times 10^{-17}$ | $3.5 \times 10^{18}$ |
|     | 128* | $4.8 \times 10^{-15}$ | $2.6 \times 10^{-14}$ | $7.1 \times 10^{-17}$ | $8.7 \times 10^{18}$ |
| 0.8 | 16*  | $2.2 \times 10^{-2}$  | $9.6 \times 10^{-2}$  | $3.4 \times 10^{-17}$ | $1.5 \times 10^{17}$ |
|     | 32*  | $5.0 \times 10^{-3}$  | $2.2 \times 10^{-2}$  | $3.1 \times 10^{-17}$ | $4.3 \times 10^{17}$ |
|     | 64*  | $1.4 \times 10^{-4}$  | $6.4 \times 10^{-4}$  | $2.5 \times 10^{-17}$ | $1.2 \times 10^{18}$ |
|     | 128* | $5.4 \times 10^{-8}$  | $2.4 \times 10^{-7}$  | $1.1 \times 10^{-18}$ | $1.1 \times 10^{18}$ |

例2 3つの円の外部  $D: |z - z_{l0}| > \rho_l$ ,

$$z_{l0} = 2 \exp \frac{2(l-1)}{3} \pi i \quad (l = 1, 2, 3), \quad \rho_{1,2,3} = 1, 0.5, 1.5$$

拘束点と電荷点は

$$z_{lj} = z_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i, \quad \zeta_{lj} = z_{l0} + q \rho_l \exp \frac{2(j-1)}{N} \pi i$$

と配置する.

この問題では, 連立1次方程式の悪条件のために, いずれの定式化でも近似写像関数を得ることができなかった.

## 5 おわりに

本稿では, 幾つかの Jordan 閉曲線の外側の非有界な多重連結領域から放射スリット領域への数値等角写像の方法を提案し, 典型的な領域に対する数値実験を行った. その結果, 簡単な領域に対しては比較的精度の高い近似解が得られたものの, この方法は一般に非常に条件の悪い連立1次方程式に帰着することがわかった. しかし, 最初の節で述べたように, 円弧スリット領域への等角写像と放射スリット領域への等角写像を双対な問題にふさわしい統一的なアルゴリズムで簡単に計算できるという可能性は大きな魅力である. 悪条件性の解析と解決策を今後の研究課題としたい.

## 参考文献

- [1] 天野 要, 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, **28** (7) (1987), 697-704.
- [2] 天野 要, 代用電荷法に基づく外部等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, **29** (1) (1988), 62-72.
- [3] 天野 要, 代用電荷法に基づく2重連結領域等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, **29** (10) (1988), 914-924.
- [4] Amano, K., A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains, J. Comput. Appl. Math., **53** (3) (1994), 353-370.
- [5] 天野 要, 円弧スリット領域への数値等角写像の方法, 情報処理学会論文誌, **36** (2) (1995, 掲載予定).
- [6] Gaier, D., Konstruktive Methoden der konformen Abbildung, Springer-Verlag, Berlin, 1964.

- [7] Henrici, P., Applied and Computational Complex Analysis **3**, John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [8] 村島定行, 代用電荷法とその応用, 森北出版, 東京, 1983.
- [9] Nehari, Z., Conformal Mapping, McGraw-Hill, New York, 1952.
- [10] 岡本 久・桂田祐史, ポテンシャル問題の高速解法, 応用数理, **2** (3) (1992), 2-20.
- [11] Trefethen, L.N. (ed.), Numerical Conformal Mapping, North-Holland, Amsterdam 1986; reprinted from J. Comput. Appl. Math., **14** (1&2) 1986.