

Σ^{2n-1} の接バンドルについて。

奈々大 上部 恒和

Σ^{2n-1} をホモトピー球面, G をその上に微分可能, 固定点なしに作用する有限群とする。以下簡単のため G の位数は素数と素とする。このとき, 商多様体 Σ^{2n-1}/G 上の安定ベクトルバンドル類は G の表現環から決定される。

問題. Σ^{2n-1}/G の接バンドルを決定せよ。

ここでは, $G = \mathbb{Z}_p$, 位数が奇素数の巡回群, の場合上の問題に答える。

補題1. Σ^{2n-1}/G の安定接ベクトルバンドルは J -不変である。

この補題は次のことを意味する。 Σ_i^{2n-1} 上に作用 $f_i: \Sigma \times G \rightarrow \Sigma$ が与えられたとき, equivalent 写像 $h: \Sigma_1/G, f_1 \rightarrow \Sigma_2/G, f_2$ が存在し, $h^*(J(\tau(\Sigma_2/G, f_2))) = J(\tau(\Sigma_1/G, f_1))$, ここに $J(\tau(\Sigma/G, f))$ は $\Sigma/G, f$ の接バンドルの安定 J -類を示す。

表現 $\kappa: G \rightarrow O(m)$ に対し, $\Sigma/G, \tau$ 上のベクトルバンドル $d_f(\kappa)$ を $d_f(\kappa) = \sum x_G M_\kappa$ によって定義する, (M_κ は κ の表現空間)。

補題2, ある表現 κ が存在して, $d_f(\kappa) \cong \tau(\Sigma/G, \tau)$ ($\cong$ は安定同型)。

$\rho_p^j: \mathbb{Z}_p \rightarrow O(2)$ を, $\mathbb{Z}_p$ の生成元 a に対して

$$\rho_p(a) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/p) & -\sin(2\pi/p) \\ \sin(2\pi/p) & \cos(2\pi/p) \end{pmatrix}$$

で定義される表現とする。

補題3. $\tilde{J}(\Sigma^{2n-1}/\mathbb{Z}_p, \tau) \cong \sum_p \left[\frac{n-1}{p-1} \right]$ で生成元は $J(d_f(\rho_p^j))$, 特に $J(d_f(\rho_p^j)) = J(d_f(\rho_p^i))$ $j=1, 2, \dots, p-1/2$

補題4. $\kappa: G \rightarrow O(2n)$ を固有値1をもたぬ表現, T_κ を κ による S^{2n-1} 上の線型作用, このとき $\tau(S^{2n-1}/G, \tau) \oplus \tau \cong d_{T_\kappa}(\kappa^{-1})$, ただし κ^{-1} は $\kappa^{-1}(a) = \kappa(a^{-1})$ によって決る表現。

定理.

Σ^{2n-1} は $\mathbb{Z}_p$ の微分可能, 固定点なしの作用を許すとする。このとき, $n \leq p$ ならば, 任意の表現 κ に対して $d_f(\kappa) \cong_s \tau(\Sigma^{2n-1}/\mathbb{Z}_p, \tau)$ とはる作用が存在する。 $n > p$ ならば, κ の次元が $2n+s \cdot p \left[\frac{n-1}{p-1} \right]$ で, 自明な表現を含まぬとき, またそのときのみ $d_f(\kappa) \cong_s \tau(\Sigma^{2n-1}/\mathbb{Z}_p, \tau)$ を満たす作用が存在する。

補題1~4により, もし作用すがあれば $\tau(\Sigma^{2n-1}/\mathbb{Z}_p, +)$ の可能性は定理の場合につきることがわかる。存在に関することは, Wall の surgery 理論よりわかる。