

すべての閉4次元位相多様体は単体分割をもつか。

東大・理 中森信弥

(Shinya NAKAMORI)

フリードマン, フィンらにより, 4次元多様体の分類はあらたな局面をむかえたといえる。これらの結果が, 4次元の(本来の)三角形分割問題や, 3次元のテルバア・ミルナー群, Θ_3 にどの程度まで反映されるかを調べてみる。

4次元の場合, 可微分圏とPL圏との差はないので, 以下においては, 使いやすい方を, そのつど用いることにする。

補題1: (W, V) ($V \subset \text{int } W$ 局所平坦) をコンパクトPL多様体 $(\partial V = \emptyset)$ とする。このとき,

$\exists H: (W, V) \longrightarrow \mathbb{R}$ ひとつのPLモース関数
 $H|_{\partial W} = \{pt\}$.

$\exists p \in V$; p は, H および, $H|_V$ の指数0の臨界点.

ここに, PL多様体のモース関数とは, たとえば, Kuiper [2] の意味でのそれとする。

証明のアラトコイン: $W \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ ($N: \text{大}$) とみたとき,
 W の高次元関数

$$h := \text{proj}_N|_W : W \hookrightarrow \mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}_+^{N-1} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

は, 1つのPLモース関数とみることが出来る。ただし,

$$h(W) = \{pt\}$$

なるような $W \hookrightarrow \mathbb{R}_+^N$ とする。

$$L: \mathbb{R}_+^N \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{線型関数}$$

であって,

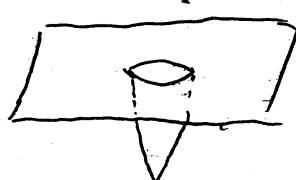
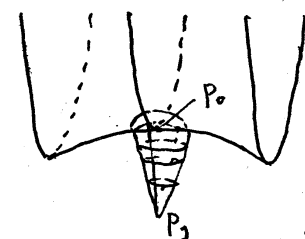
$$H := h + (L|_W) \quad \text{が 高次元関数 (とくにPLモース)}$$

かつ, $H|_V$ も $\sim$

が存在する。 $H|_V$ には, 少なくとも1点, 指数0の臨界点 p_0 が存在する。この p_0 にて, W に対し, 下へのプッシュ (下図参照) をおこなう。そうしてえられる

$$H: W \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$H|_V: V \longrightarrow \mathbb{R}$$



他の W の部分
で, p_0 の「下」
にある部分
も影響を受ける。

もまた, 高次元関数であって, p_0 の行
く先である p_1 は, $H, H|_V$ の
指数0の臨界点となっている。

□

注意: $(\dim W) - 1 = \dim V = 3$ のときを考える。 $H(p)$
 に十分近い実数 $y > H(p)$ で, $(H(p), y]$ には, H , およ

び, HIV の臨界値が存在しないようなものがとれる。このとき, $(HIV)^{-1}(y) \cong S^2$ ($\cong$ は, PL 同相, ないしは, 可微分同相をあらわす), かつ, 3次元多様体 $H^1(y)$ の $(HIV)^{-1}(y)$ を含む連結成分 Γ は, $\cong S^3$ である。それゆえ, 3次元 (PL) シェンフリーズ定理によつて, (PL) 2-球面 $(HIV)^{-1}(y)$ は, $H^1(y)$ で, ある (PL) 3-球の境界となっている。

p と Γ の結び, $p * \Gamma$, および, p と, $(HIV)^{-1}(y)$ との結び, $p * (HIV)^{-1}(y)$ を, p から出る, H に関する PL 積分曲線 (Siebenmann [5] をみよ) で, それぞれ, Γ , $(HIV)^{-1}(y)$ へ至るものの集まりとして定めることはする。そのおのおのは, (PL) 4-球, (PL) 3-球をなす。一方, $p * \Gamma - p * ((HIV)^{-1}(y))$ の連結成分の閉包, C_+ , C_- は, ともに, (PL) 4-球となっている。

Σ^3 で, 以下, 任意のホモトピー・3-球面をあらわすこととし,

$$W := \Sigma^3 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \quad V := \Sigma^3 \times \{0\}$$

の場合を考察する。 $W \subset \Sigma^3 \times (-1, 1)$ と自然にみるとき, 2つの弧 A_+ , A_- を, つぎのように構成する。 $p * \Gamma$ では, こゆらは, ともに, p をよる弧であつて,

$$(A_+ \cup A_-) \cap (p * ((HIV)^{-1}(y))) = \{p\},$$

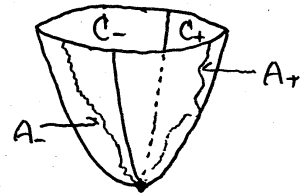
$A_{\pm} - \{p\} \subset C_{\pm}$ (複号同順),

ただし, $C_{\pm}$ は, その正角に応じて, $\Sigma^3 \times (-1, 0)$, $\Sigma^3 \times (0, 1)$ に含まれているものとする。

さらに, ころした面たちを,

$$(A_+ \cup A_-) \cap (\Sigma^3 \times \{0\}) = \{p\},$$

$$(\Sigma^3 \times (-1, 1)) - (A_+ \cup A_-) \cong (\Sigma^3 - \{\text{点}\}) \times (-1, 1)^P$$



なるよう, $\Sigma^3 \times (-1, 0)$, $\Sigma^3 \times (0, 1)$ にて自然に拡張する。

定義: V^n を, 位相多様体とする。その, 平滑化 (= smoothings)

V_{α}, V_{β} が, 薄はぎ (= sliced) コニカルダント とは, $V \times I$ の, ある平滑化 $(V \times I)_r$ が, 存在して,

$$(V \times \{0\})_r = V_{\alpha}, \quad (V \times \{1\})_r = V_{\beta};$$

射影 $(V \times I)_r \longrightarrow I$ が正則

なるときをいう。

定義: V^n を, 位相的 $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ とする。このとき, うめこみ

$$\varphi: S^{n-1} \hookrightarrow V^n$$

が, 本質的であるとは,

$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi} V^n \underset{\text{同相}}{\cong} S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{自然な埋込み}} S^{n-1} \times \{0\}$$

によって, 誘導される, $\pi_{n-1}(S^{n-1})$ のえが, 自明ならざることをいう。

このとき、つぎが成り立つ。

定理 2: 仮定

$$(H) \left\{ \begin{array}{l} \text{積の微分構造をもつ (すなわち, 「標準的な」),} \\ S^3 \times \mathbb{R} \text{ と, } \exists \text{ する } \text{ニコルマン } \text{ニコルマン}, \text{ 位相 } S^3 \times \mathbb{R} \\ =: V \text{ の, 平滑化 } V_\alpha \text{ には, つねに, なめらかで,} \\ \text{本質的な, } S^3 \text{ の } \text{埋めこみ} \text{ が存在する。} \end{array} \right.$$

のもとに, 3 次元, ケルバア・ニコルマン群, Θ_3 は自明である。

証明のアウトライン: まず, つぎを主張する。

任意のホモトピー 3-球面 Σ^3 の懸垂 $S(\Sigma^3)$ は, S^4 と同相。

なぜかといふと, Σ^3 と S^3 とは, ホモトピー同値であるから,

$$\Sigma^3 \times \mathbb{R} \underset{\text{(コンパクト) 固有ホモトピー同値}}{\simeq} S^3 \times \mathbb{R}.$$

Freedman [1] によつて,

$$\Sigma^3 \times \mathbb{R} \underset{\text{同相}}{\simeq} S^3 \times \mathbb{R}.$$

両者の, 2 点コンパクト化を考えると,

$$S(\Sigma^3) \simeq S(S^3) = S^4.$$

$s_{\pm}$ を, $S(\Sigma^3)$ の懸垂点たちとすると, $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ から, 微分構造を受け継いでいる, 多様体, $S(\Sigma^3) - \{s_{\pm}, A_{\pm}\}$ に注目する。この終端 (= end) $\cup$ で,

$$U \cap (\Sigma^3 \times \{0\}) \subset p * P$$

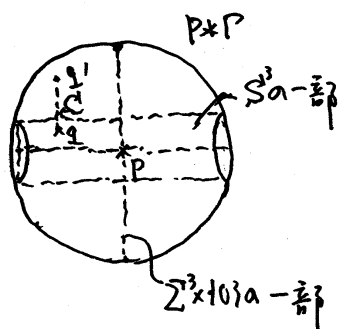
$$(U \cap P) \cap ((H|V)'(y)) = \emptyset$$

なるものをとる。 $\{S_{\pm}\} \cup A_{\pm}$ は、 $S(\Sigma^3)$ で平坦な弧であるから、

$$U \underset{\text{同相}}{\simeq} S^3 \times \mathbb{R}.$$

とすることで、一般に、Lashof-Shaneson, Lemma 1.2 [3]と、ウイコのアニュラス定理($TOP(4)/O(4) \rightarrow TOP/O \simeq K(\mathbb{Z}/2; 3)$ が、3-連結なること)をくみあわせると、 $S^3 \times \mathbb{R}$ の平滑化は、たとえば2つのうすはぎコンコルダンス類、標準的 $S^3 \times \mathbb{R}$ として代表できるものと、フリードマンの $S^3 \times \mathbb{R}$ として代表できるものをもつことがわかる。 U に関していえば、Lashof-Taylor, Prop. 2.2 [4]と、上のLashof-Shanesonの補題により、その平滑化は、標準的 $S^3 \times \mathbb{R}$ としてコンコルダントとなる。

この状況で、われわれの級数 (H) を用いると、さうして U には、したがって、 $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ には、本質的な S^3 が、なめらかにうめこまれていることになる。この S^3 の1点 q を、たと



えば、 $U \cap (int(p * P))$ にとる。 q から、 P 上の点 $q' \in P$ へ至る、この S^3 とは、 q でのみ交わるような、 $p * P$ の弧 C を考え、 C にそって、 q の S^3 における球近傍を、

$p \times P$ で、PL 的に、 q' の P における球近傍へもってゆく。こ
うして S^3 からえられるもの、 S も、また、PL 3-球面であ
て、さらに、 $S \cap P$ は、PL 3-球、 D である。補題1のあ
との注意によれば、PL 2-球面 $(H|V)^1(y)$ は、 P である PL
3-球の境界となっているのであるから、 P の全域アイソ
トピーにより、 $(H|V)^1(y)$ を、 D へもってゆくことができる。
この全域アイソトピーは、アイソトピー拡張定理によって、
 $p \times P$ 、 $\Sigma^3 \times (-1, 1) - \text{int}(p \times P)$ は、そのおのおのにうつる、 $\Sigma^3 \times$
 $(-1, 1)$ の全域アイソトピーにまで、拡張することができる。

この S により、 $\Sigma^3 \times (-1, 1)$ を二分し、その有界な閉包をも
つ連結成分を、 $\square^4$ とする。上の議論によれば、ある、 $\Sigma^3 \times \{0\}$
から、ある PL 3-球をとりわけいた、 Δ^3 に対して、

$$(\Delta^3, \omega^3 = (H|V)^1(y) \text{ (のアイソトピーな像)}) \cong S^2 \subset (\square^4, \partial \square^4 = S)$$

は、平坦な、PL 部分多様体となる。作り方より、 $\square^4$ は、可
縮で、コンパクトな、PL 多様体である。 (B^4, B^3) を、標
準的球対とする。 $(\square^4 \cup_{\text{平坦な}} B^4, \Delta^3 \cup_{\omega^3} B^3)$ を考えると、
これは、 PL 多様体対 であって、 $\square^4 \cup B^4$ は、PL、ホモト
ピー4-球面であるし、一方、 $\Delta^3 \cup B^3$ は、 $\Sigma^3(\times \{0\})$ に
PL 同相（すなわち微分同相）である。よって、
 $(\square^4 \cup B^4) - (\Delta^3 \cup B^3)$ の1つの連結成分の閉包を考えること
により、任意のホモトピー3-球面 Σ^3 が、ある PL (=な

めらかな可縮, コンパクト4次元多様体の境界となっていることがわかる。

□

この定理よりも, 級数(H)の正負の判定が, より本質的である。この級数は, 標準的 $S^3 \times \mathbb{R}$ にある, $S^3 \times I$ を, 「うすはぎ」性によって, 保証されている, いたるところ正則な $S^3 \times \mathbb{R} \times I$ の平滑化のモース関数に与えられる, 積分曲線で, $S^3 \times I$ から出発するものを, うまく, 有界領域にとどめておくことができるか, という問題に, 密接に関連することは, いまでもない。

命題3 : 級数

(H) $\left\{ \begin{array}{l} \text{任意のホモトピー-3-球面は, (本物の) 3-球面} \\ \text{と, H-コボルダントである} \end{array} \right.$

のもとに, 任意の単体分割可能な, 符号づけられた, スペシ, 4次元, 閉位相多様体 M の, 符号数, $\sigma(M)$ につき,

$$\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16}$$

が, 成り立つ。

証明: $\mathcal{T}$ を, M の十分細かい三角形分割とし, v を, $\mathcal{T}$ の頂点で, $|1klv, \mathcal{T}|$ が, 偽ホモトピー-3-球面(そうした

意味で, 「特異点」といふものとする。 X^4 を, $|1k(w, T)|$ と, $S^3 = \partial D^4 \subset D^4$ との, H -コホモロジーとする。このとき, $Y^4 := |1st(w, T)| \cup_{|1k(w, T)|} X^4 \cup_{S^3} D^4$ により, あるコンパクト・非輪状, 多面体的, 4次元ホモロジー多様体を与える。いま, コンパクト・多面体的5次元ホモロジー多様体, $M \times I \cup_{|1st(w, T)| \times \{1\}} \text{Cone}(Y^4)$ を考えると, この境界は, $-M$ と, M から特異点 w が, 解消されたホモロジー多様体, $M(w)$ である。よって, M と $M(w)$ の符号数は, 同じである。作りより, 両者のスピニも等しい。すべての特異点につき, これをおこなうと, ある PL (したがって, なめらかな) 4次元多様体, $M(P)$ で,

$\sigma(M) = \sigma(M(P))$, かつ, $w_2(M) \equiv w_2(M(P)) \pmod{2}$ なるものが, 与えられる。しかるに, 可微分圏における, ローリーの定理により,

$$\sigma(M(P)) \equiv 0 \pmod{16} .$$

ゆえに,

$$\sigma(M) \equiv 0 \pmod{16} .$$

□

系: 定理1の, 仮定(iii)のもとに, ある4次元, 閉位相多様体で, 単体分割不能なものが存在する。

い、 I の、 (H) なる、 (H') であり、 (H') の状態で、フリードマン ([1]) の関係する様体、 $|E_8|$ をとれば、それは、上の命題を、満足しないから。

参考文献

- [1]. M. H. Freedman, 'The topology of four-dimensional manifolds', J. Diff. Geom., 17 (1982), 357-453.
- [2]. N. H. Kuiper, Non-degenerate piecewise linear functions, Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 13 (1968), 993-1000.
- [3]. R. Lashof and J. Shaneson, Smoothing 4-manifolds, Inv. Math., 14 (1971), 197-210.
- [4]. ——— and L. Taylor, Smoothing theory and Freedman's work on four-manifolds, preprint.
- [5]. L. C. Siebenmann, Deformation of homeomorphisms on stratified sets, Comm. Math. Helv., 47 (1972), 123-163.