

量子コホモロジーの整構造について
(INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

入谷 寛
(HIROSHI IRITANI)

ABSTRACT. We discuss integral structures in the space of solutions to quantum cohomology differential equations (quantum D -modules) associated to quantum cohomology. In mirror symmetry, the quantum D -module of a manifold X becomes isomorphic to the (semi-infinite) variation of Hodge structures (VHS for short) of the mirror. The VHS of the mirror is equipped with an integral local system, so a natural question is “what is the integral structure in the quantum D -module corresponding to the mirror?” We study this problem in the case where X is a toric orbifold and see that the integral structure coming from the mirror can be described only in terms of the K -group $K(X)$ and a certain characteristic class ($\hat{\Gamma}$ -class). This article is a résumé of the results on integral structures in [8].

1. 序

本稿では量子コホモロジーに付随する微分方程式系 (量子 D 加群) の解空間における整構造について論じる。ここで考える整構造はたとえば整数環係数のコホモロジー群 $H^*(X, \mathbb{Z})$ とは直接の関係はないが、ミラー側に移ると自然に見ることのできるいわば「隠された」整構造である。

超弦理論におけるミラー対称性によれば、Calabi-Yau 多様体 X に対してあるミラー Calabi-Yau 多様体 $X^\vee$ があって、 X の量子コホモロジーから定まる Hodge 構造の変動 (A 模型 VHS) と $X^\vee$ の複素構造の変形の定める Hodge 構造の変動 (B 模型 VHS) とが同型になると予想されている。ここで、B 模型 VHS における局所系、すなわち Gauss-Manin 接続の平坦切断の空間は $H^n(X^\vee, \mathbb{C})$ であり、整部分格子 $H^n(X^\vee, \mathbb{Z})$ を自然に含んでいる。一方、A 模型 VHS における局所系は X の量子微分方程式の解空間として定まるが、ここにはアприオリに自然な整格子は存在しないように見える。ミラー側で自然に存在する整構造を量子コホモロジー側に引き戻すとどのように見えるか、というのが本研究の動機となっている。

本稿の構成は以下のとおりである。まず軌道体量子コホモロジーを導入し、トーリック軌道体のミラーである Landau-Ginzburg 模型を記述する。次にこのトーリックのミラー (Landau-Ginzburg 模型) から引き戻される整構造を具体的に記述する。この場合、量子コホモロジーに引き戻された整構造はトーリック軌道体の位相不変量 (K 群とある特別な特性類) だけによって記述される。

本稿は論文 [8] の整構造に関する結果の要約である。

2. 軌道体量子コホモロジー

本稿では一般に軌道体にたいする量子コホモロジーを考える。量子コホモロジーは種数が 0 の Gromov-Witten 理論により定義されるが、軌道体 Gromov-Witten 理論

はシンプレクティック幾何学の文脈では Chen-Ruan [5, 6] により, 代数幾何学においては Abramovich-Graber-Vistoli [1] により開発された. 軌道体コホモロジーおよびその量子コホモロジーの詳しい解説はこれらの文献に譲る. $\mathcal{X}$ を滑らかな Deligne-Mumford stack でその coarse moduli space X が射影的であるものとする. $I\mathcal{X}$ を $\mathcal{X}$ の慣性スタックとする. $I\mathcal{X}$ の点は $\mathcal{X}$ の点 $x \in \mathcal{X}$ とその自己同型群の元 $g \in \text{Aut}(x)$ の組 (x, g) で代表される. 以下では g を stabilizer と呼ぶ. T を慣性スタックの連結成分の添え字集合とし, $I\mathcal{X}$ を次のように成分に分解する.

$$I\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in T} \mathcal{X}_v = \mathcal{X}_0 \sqcup \bigsqcup_{v \in T'} \mathcal{X}_v$$

ここで, $T = T' \sqcup \{0\}$ であり, $\mathcal{X}_0$ は自明な自己同型 $g = 1$ に対応する $I\mathcal{X}$ の成分をあらわし, $\mathcal{X}_0 \cong \mathcal{X}$ である. 各慣性スタックの成分 $\mathcal{X}_v$ には age と呼ばれる有理数 ι_v が定まる. 軌道体コホモロジー $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ は

$$H_{\text{orb}}^p(\mathcal{X}) = \bigoplus_{v \in T, p-2\iota_v \in 2\mathbb{Z}} H^{p-2\iota_v}(\mathcal{X}_v)$$

で定義される. ここで p は一般に有理数である. 本稿では慣性スタック上の偶数次のコホモロジー類のみを考えることにする (すなわち $p - 2\iota_v$ が偶数). $\text{inv} : I\mathcal{X} \rightarrow I\mathcal{X}$ を (x, g) を (x, g^{-1}) に送る対合とする. inv は添え字集合の間の写像 $\text{inv} : T \rightarrow T$ を誘導する. ここで $\text{inv}(\mathcal{X}_v) = \mathcal{X}_{\text{inv}(v)}$ である. 軌道体 Poincaré ペアリングは次で定義される.

$$(\alpha, \beta)_{\text{orb}} = \int_{I\mathcal{X}} \alpha \cup \text{inv}^* \beta$$

種数 0 の軌道体 Gromov-Witten 理論は軌道体コホモロジー上のある n 重線型な写像 (相関関数) を定める.

$$\langle \cdot, \dots, \cdot \rangle_{0,n,d} : H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}.$$

ここで, $d \in H_2(X, \mathbb{Z})$ は coarse moduli space X 上の 2 次の整ホモロジー類である. $\text{Eff}_{\mathcal{X}} \subset H_2(X, \mathbb{Z})$ を X 内の effective curve の代表する整ホモロジー類によって生成される半群とする. Gromov-Witten 相関関数は正則曲線を数え上げる不変量であり, $d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}}$ のときに限り 0 でない値を持つことができる. 軌道体量子コホモロジーとは軌道体コホモロジー上の可換環の構造の族 $(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}), \circ_{\tau})$ として与えられる. ここで $\circ_{\tau}$ は $\tau \in H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ でパラメトライズされる積であって, 種数 0 の Gromov-Witten 不変量を使って次のように定義される.

$$(\alpha \circ_{\tau} \beta, \gamma)_{\text{orb}} = \sum_{d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}}} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left\langle \alpha, \beta, \gamma, \overbrace{\tau', \dots, \tau'}^{n \text{ times}} \right\rangle_{0, n+3, d} e^{\langle \tau_{0,2}, d \rangle}.$$

ここで, $\tau = \tau_{0,2} + \tau'$ であって $\tau_{0,2} \in H^2(\mathcal{X}_0)$ は τ の $H^2(\mathcal{X}_0)$ 成分をあらわす. この積 $\circ_{\tau}$ は τ' に関しては形式的冪級数, $\tau_{0,2}$ に関しては形式的 Fourier 級数とみなすことができる. 一般にこの級数の収束は知られていないが, 本稿では $\circ_{\tau}$ はある開集合 $U \subset H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ 上で収束すると仮定する. U は十分大きい $M > 0$ と十分小さい $\epsilon > 0$ に対し次のような形の領域を含む. これは極大体積極限 (large radius limit) の近傍と呼ばれる.

$$\{\tau; \Re \langle \tau_{0,2}, d \rangle < -M, \forall d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}} \setminus \{0\}, \|\tau'\| < \epsilon\}.$$

3. 量子微分方程式

$\{\phi_i\}_{i=1}^N$ を $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ の斉次な基底とし, t^i をこの基底に双対な $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ 上の線型座標とする. $\tau = \sum_{i=1}^N t^i \phi_i$ によって $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ の一般の点をあらわす. $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ を軌道体 Poincaré ペアリングに関して $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ と双対な基底とする. 量子微分方程式 (量子 D 加群) は自明なベクトル束 $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \rightarrow H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ 上のパラメータ $z \in \mathbb{C}$ を持つ平坦接続 ∇ により定まる.

$$(1) \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \circ \tau).$$

コホモロジーに値をとる函数 $s(\tau, z)$ に対する微分方程式 $\nabla_i s(\tau, z) = 0$ を量子微分方程式と呼ぶことにする. この平坦接続 ∇ はさらにパラメータ z の方向に拡張され, ベクトル束 $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times (H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}^*) \rightarrow H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \times \mathbb{C}^*$ 上の平坦接続 $\hat{\nabla}$ を定める.

$$(2) \quad \begin{aligned} \hat{\nabla}_i &= \frac{\partial}{\partial t^i} + \frac{1}{z}(\phi_i \circ \tau) \\ \hat{\nabla}_{z\partial_z} &= z\partial_z - \frac{1}{z}E \circ \tau + \mu \end{aligned}$$

ここで $\mu \in \text{End}(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}))$ および Euler ベクトル場 E は

$$\begin{aligned} \mu(\phi_i) &= \left(\frac{1}{2} \deg \phi_i - \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}\right) \phi_i, \\ E &= \sum_{i=1}^N \left(1 - \frac{\deg \phi_i}{2}\right) t^i \phi_i + c_1(\mathcal{X}), \end{aligned}$$

で与えられる. 方程式 $\hat{\nabla}s = 0$ も量子微分方程式と呼ぶ. 2 次のコホモロジー類 $\tau_{0,2} \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ の $H_{\text{orb}}^2(\mathcal{X})$ への作用を

$$\tau_{0,2} \cdot \tau = \text{pr}^*(\tau_{0,2}) \cup \tau$$

で定義する. ここで $\text{pr}: I\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ は自然な射影である. 量子微分方程式 (1) の基本解は gravitational descendant と呼ばれる Gromov-Witten 不変量によって与えられる.

Proposition 3.1. $\text{End}(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}))$ に値をとる函数 $L(\tau, z)$ を次で定義する.

$$L(\tau, z)\phi = e^{-\tau_{0,2}/z}\phi - \sum_{(d,l) \neq (0,0), d \in \text{Eff}_{\mathcal{X}}} \sum_{k=1}^N \frac{1}{l!} \left\langle \frac{e^{-\tau_{0,2}/z}\phi}{z + \psi_1}, \tau', \dots, \tau', \phi_k \right\rangle_{0,l+2,d}^{\mathcal{X}} \phi^k.$$

ここで, $(z + \psi_1)^{-1}$ は z^{-1} の冪級数 $\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^{-n-1} \psi_1^n$ に展開するものとする¹. これは $\nabla_i L(\tau, z)\phi = 0$ を満たし, ∇ の平坦切断の基本解を与える. さらに, $L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi$ は $\hat{\nabla}_i(L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi) = 0$, $\hat{\nabla}_{z\partial_z}(L(\tau, z)z^{-\mu}z^{\rho}\phi) = 0$ を満たし, $\hat{\nabla}$ の平坦切断の基本解を与える. ここで, $\rho := c_1(T\mathcal{X}) \in H^2(\mathcal{X})$ であり, $z^{-\mu}z^{\rho} = e^{-\mu \log z} e^{\rho \log z}$ である.

¹一般に非負整数 $k_1, \dots, k_r$ と $\alpha_i \in H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ に対して $\left\langle \alpha_1 \psi_1^{k_1}, \alpha_2 \psi_2^{k_2}, \dots, \alpha_r \psi_r^{k_r} \right\rangle_{0,r,d}^{\mathcal{X}}$ の形の不変量が定義され, gravitational descendant と呼ばれる. ψ_i は i 番目の点での余接直線束 $\mathcal{L}_i$ の第一 Chern 類をあらわす. ここで $\mathcal{L}_i$ は安定写像のモジュライ空間上の直線束であって, ひとつの安定写像におけるファイバーは曲線の i 番目の名前つき点での余接空間で与えられる.

入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

量子微分方程式 $\hat{\nabla}_S = 0$ の解空間 S にペアリング $(\cdot, \cdot)_S$ を導入する. 量子微分方程式の解 $s_1(\tau, z), s_2(\tau, z)$ に対して

$$(s_1, s_2)_S := (s_1(\tau, e^{\pi i} z), s_2(\tau, z))_{\text{orb}}$$

とおく. ここで, $s_1(\tau, e^{\pi i} z)$ は $s_1(\tau, z)$ を道 $[0, 1] \ni \theta \mapsto e^{\pi i \theta} z$ に沿って解析接続したものを表す. s_1, s_2 は平坦ゆえ, 右辺は τ, z によらない複素数になる. このペアリングは一般には対称でも反対称でもないが, $\mathcal{X}$ が Calabi-Yau ($\rho = c_1(\mathcal{X}) = 0$) のときは $\mathcal{X}$ の次元 n の偶奇に応じて対称または反対称になる.

Definition 3.2. 軌道体量子コホモロジーにおける整構造とは量子微分方程式 $\hat{\nabla}_S = 0$ の解空間 S (N 次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間) の整格子 $S_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^N$ であって, 上のペアリング $(\cdot, \cdot)_S$ の $S_{\mathbb{Z}}$ への制限が $\mathbb{Z}$ に値をとり, 完全 (perfect) ペアリングになる (同型 $S_{\mathbb{Z}} \cong \text{Hom}(S_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ を誘導する) ものと定義される.

$$(\cdot, \cdot)_S: S_{\mathbb{Z}} \times S_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

この定義だけでは整構造は一意には決まらず, この定義を満たす多くの整構造があると思われる. ここでは簡単のため省略したが, [8] では整構造に対して, 極大体積極限のまわりでの局所モノドロミーで保存される, という条件も課しており, これは整構造の強い制約を与える. (ただし, この条件を課してもやはり一意ではない.) 以下ではそのようなひとつの整構造の例を挙げる.

4. 整構造の例

$K(\mathcal{X})$ を位相的な軌道体複素ベクトル束 (orbifold vector bundle; orbibundle) の Grothendieck 群とする. $I\mathcal{X}$ 上の軌道体ベクトル束 V と $I\mathcal{X}$ の成分 $\mathcal{X}_v$ に対して, $V|_{\mathcal{X}_v}$ への $\mathcal{X}_v$ の stabilizer の作用に関する固有分解を次のようにおく.

$$V|_{\mathcal{X}_v} = \bigoplus_{0 \leq f < 1} V_{v,f}.$$

ここで, $\mathcal{X}_v$ の stabilizer は $V_{v,f}$ に $\exp(2\pi i f)$ で作用する. 軌道体複素ベクトル束に対する Chern 指標 $\text{ch}: K(\mathcal{X}) \rightarrow H^*(I\mathcal{X})$ は次で定義される.

$$\tilde{\text{ch}}(V) := \bigoplus_{v \in T} \sum_{0 \leq f < 1} e^{2\pi i f} \text{ch}((\text{pr}^* V)_{v,f})$$

ここで $\text{pr}: I\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ は自然な射影である. $\mathcal{X}$ 上の軌道体ベクトル束 V に対して, $\delta_{v,f,i}$, $i = 1, \dots, l_{v,f}$ を $(\text{pr}^* V)_{v,f}$ の Chern roots とする. Todd 類 $\widetilde{\text{Td}}: K(\mathcal{X}) \rightarrow H^*(I\mathcal{X})$ は次で定義される.

$$\widetilde{\text{Td}}(V) = \bigoplus_{v \in T} \prod_{0 \leq f < 1, 1 \leq i \leq l_{v,f}} \frac{1}{1 - e^{-2\pi i f} e^{-\delta_{v,f,i}}} \prod_{f=0, 1 \leq i \leq l_{v,0}} \frac{\delta_{v,0,i}}{1 - e^{-\delta_{v,0,i}}}.$$

軌道体ベクトル束が正則ベクトル束の構造を持つとき, コホモロジー群 $H^i(\mathcal{X}, V)$ が定義されるが, 正則オイラー標数 $\chi(V) := \sum_{i=1}^n (-1)^i \dim H^i(\mathcal{X}, V)$ は次の川崎-Riemann-Roch 公式 [9] で与えられる.

$$(3) \quad \chi(V) = \int_{I\mathcal{X}} \tilde{\text{ch}}(V) \cup \widetilde{\text{Td}}(T\mathcal{X}).$$

$\chi(V)$ は定義から整数である. $\mathcal{X}$ 上の軌道体ベクトル束 V の $\hat{\Gamma}$ 類を次で定める.

$$\hat{\Gamma}(V) := \bigoplus_{v \in T} \prod_{0 \leq f < 1} \prod_{i=1}^{l_{v,f}} \Gamma(1 - f + \delta_{v,f,i}) \in H^*(I\mathcal{X}).$$

ここで $\delta_{v,f,i}$ は上と同じものである. 右辺に現れる Gamma 関数は $1 - f > 0$ での Taylor 級数に展開されていると考える. また $\hat{\Gamma}_{\mathcal{X}} := \hat{\Gamma}(T\mathcal{X})$ とおく.

ここで, 次の仮定をおく.

- (A1) 写像 $\tilde{\text{ch}}: K(\mathcal{X}) \rightarrow H^*(I\mathcal{X})$ は $\mathbb{C}$ をテンソルすると同型になる.
- (A2) 川崎-Riemann-Roch 公式の右辺 (3) は任意の位相的な軌道体ベクトル束 V に対して整数である. 一般の (正則とは限らない) 軌道体ベクトル束 V に対して $\chi(V)$ を (3) の右辺で定義する.
- (A3) $K(\mathcal{X})$ のペアリング $(V_1, V_2) \mapsto \chi(V_1 \otimes V_2)$ は全射 $K(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}(K(\mathcal{X}), \mathbb{Z})$ を誘導する.

これらの性質は多様体に関しては正しい. また軌道体が位相軌道体として M/G (M はコンパクト多様体, G はコンパクト Lie 群で G の M への作用の固定部分群は有限) の形を持つとき, (A1) は Adem-Ruan の分解定理 [2], (A2) は川崎による指数定理 [10] から従う.

Definition 4.1. 滑らかな Deligne-Mumford stack $\mathcal{X}$ に対して条件 (A1), (A2), (A3) を仮定する. K 群から量子微分方程式の解空間 $\mathcal{S}$ への写像 Ψ を次で定める.

$$\Psi: K(\mathcal{X}) \longrightarrow \mathcal{S}$$

$$[V] \longmapsto L(\tau, z) z^{-\mu} z^{\rho} \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \hat{\Gamma}_{\mathcal{X}}(2\pi i)^{\deg/2} \text{inv}^* \tilde{\text{ch}}(V) \right).$$

ここで, $L(\tau, z) z^{-\mu} z^{\rho}$ は Proposition 3.1 であたえた $\hat{\nabla}$ の基本解であり, $(2\pi i)^{\deg/2}$ は $H^{2p}(I\mathcal{X})$ 上で $(2\pi i)^p$ 倍として定義される $\text{End}(H^*(I\mathcal{X}))$ の元である. 仮定 (A1) の下で $\Psi(K(\mathcal{X})) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} = \mathcal{S}$ であり $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{S}$ の整格子を与える. 写像 Ψ は

$$(\Psi(V_1), \Psi(V_2))_{\mathcal{S}} = \chi(V_1 \otimes V_2^{\vee})$$

を満たし, 解空間のペアリング $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{S}}$ は向井ペアリングに対応する. したがって仮定 (A2), (A3) の下で $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{S}}$ の $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ への制限は $\mathbb{Z}$ に値をとる完全ペアリングになる. この整格子 $\mathcal{S}_{\mathbb{Z}}$ の定める整構造を $\hat{\Gamma}$ -整構造と呼ぶ.

写像 Ψ がペアリングを保つことは川崎-Riemann-Roch とガンマ関数の函数等式 $\Gamma(1-z)\Gamma(1+z) = \pi z / \sin(\pi z)$ から従う. この函数等式は $\hat{\Gamma}$ 類が Todd 類の二乗根の類似であり, $\Psi(V)$ は向井ベクトルの類似であることを示している. しかし, $\hat{\Gamma}$ 類は Todd 類の二乗根と異なり有理数体上定義された特性類ではない (オイラー定数 γ やゼータ関数の値 $\zeta(3), \zeta(5), \dots$ 等を含むので, おそらく超越的であろう).

5. トーリック軌道体

記号を定めるため, 本節ではトーリック軌道体の一つの定義を与える. トーリック軌道体を次のデータから構成したい.

- r 次元の代数的トーラス $\mathbb{T} \cong (\mathbb{C}^*)^r$. $\mathbb{L} := \text{Hom}(\mathbb{C}^*, \mathbb{T})$ とおく.

入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

- m 個の (順序付けられた) 元 $D_1, \dots, D_m \in \mathbb{L}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ で $\mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R} = \sum_{i=1}^m \mathbb{R}D_i$ を満たすもの.
- 元 $\eta \in \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R}$.

$D_1, \dots, D_m$ は準同型 $\mathbb{T} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^m$ を定める. トーラス $\mathbb{T}$ をこの準同型により $\mathbb{C}^m$ に作用させる.

$$\mathcal{A} := \{I \subset \{1, \dots, m\} ; \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{>0} D_i \ni \eta\}.$$

とおき, 商スタック $\mathcal{X}$ を次で定める.

$$\mathcal{X} = [\mathcal{U}_\eta / \mathbb{T}], \quad \mathcal{U}_\eta := \mathbb{C}^m \setminus \bigcup_{I \notin \mathcal{A}} \mathbb{C}^I,$$

ここで $\mathbb{C}^I := \{(z_1, \dots, z_m) ; z_i = 0 \text{ for } i \notin I\}$ とおいた. このままでは $\mathcal{X}$ はコンパクトかつ (stack の意味で) 滑らかなトーリック軌道体になるとは限らない. そこで最初のデータに次の条件を課す.

- (A) $\{1, \dots, m\} \in \mathcal{A}$.
- (B) $\sum_{i \in I} \mathbb{R}D_i = \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{R}$ for $I \in \mathcal{A}$.
- (C) $\{(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m ; \sum_{i=1}^m c_i D_i = 0\} = \{0\}$.

条件 (A), (B), (C) は $\mathcal{X}$ が非空, 固定部分群が有限, $\mathcal{X}$ がコンパクトであることにそれぞれ対応する. $\mathcal{X}$ の次元は $n := m - r$ である.

$D_1, \dots, D_m$ は次の完全列を定める.

$$(4) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{L} \xrightarrow{(D_1, \dots, D_m)} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\beta} N \longrightarrow 0,$$

ここで N は 2 番目の写像 $(D_1, \dots, D_m)$ の余核として定まる有限生成アーベル群である. $f_1, \dots, f_m$ を $\mathbb{Z}^m$ の標準的な基底とし, b_i を f_i の N における像 $\beta(f_i)$ とする. 必要なら番号を付け替えて, $1 \leq i \leq m'$ に対しては $\{1, \dots, m\} \setminus \{i\} \in \mathcal{A}$ であり, $m' < i \leq m$ に対しては $\{1, \dots, m\} \setminus \{i\} \notin \mathcal{A}$ であると仮定する. Borisov-Chen-Smith の意味での $\mathcal{X}$ の stacky fan は次で与えられる.

- N のベクトル $b_1, \dots, b_{m'}$.
- 一次元錘の集合が $\{\mathbb{R}_{\geq 0} b_1, \dots, \mathbb{R}_{\geq 0} b_{m'}\}$ に一致する $N \otimes \mathbb{R}$ 内の完備な単体的扇 Σ . $\sigma_I = \sum_{i \notin I} \mathbb{R}_{\geq 0} b_i$ が Σ の錘であることと $I \in \mathcal{A}$ は同値.

Borisov-Chen-Smith [3] はトーリック Deligne-Mumford stack をこの stacky fan から構成した. 実は, 我々の構成は coarse moduli space が射影的である全てのトーリック Deligne-Mumford stack を与えることもわかる.

$\mathbb{L}^\vee = \text{Hom}(\mathbb{T}, \mathbb{C}^*)$ の元 ξ は $\mathcal{X}$ 上の軌道体直線束 L_ξ を定める.

$$L_\xi = \mathcal{U}_\eta \times \mathbb{C} / (z, a) \sim (t \cdot z, \xi(t)a), t \in \mathbb{T}.$$

対応 $\xi \mapsto L_\xi$ により全射 $\mathbb{L}^\vee \rightarrow \text{Pic}(\mathcal{X}) \cong H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z})$ が定まる. この全射の核は $\sum_{i > m'} \mathbb{Z}D_i$ である. この全射による $D_i \in \mathbb{L}^\vee$ の $H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ における像を $\bar{D}_i$ であらわす. また, $\mathbb{L}^\vee$ の整基底 $p_1, \dots, p_r$ であって $p_{r'+1}, \dots, p_r$ が $\sum_{i > m'} \mathbb{R}D_i \cap \mathbb{L}^\vee$ の整基底をなすものをとっておく. このときある整数成分の行列 (m_{ia}) に対して $\bar{D}_i = \sum_{a=1}^{r'} m_{ia} \bar{p}_a$, $1 \leq i \leq m'$ とかける. ここで同様に $\bar{p}_a \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ は $p_a \in \mathbb{L}^\vee$ の像である.

量子コホモロジーの整構造について (INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

$\mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}$ の部分集合 $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_{\text{eff}}$ を次で定める.

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &= \{d \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}; \{i \in \{1, \dots, m\}; \langle D_i, d \rangle \in \mathbb{Z}\} \in \mathcal{A}\}, \\ \mathbb{K}_{\text{eff}} &= \{d \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}; \{i \in \{1, \dots, m\}; \langle D_i, d \rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \in \mathcal{A}\}.\end{aligned}$$

$\mathbb{K}$ および $\mathbb{K}_{\text{eff}}$ は足し算では閉じていないが, $\mathbb{K}$ には $\mathbb{L}$ が作用する. 次の集合 Box を定義する.

$$\text{Box} = \{v \in N; v = \sum_{k \notin I} c_k b_k \text{ in } N \otimes \mathbb{Q}, c_k \in [0, 1), I \in \mathcal{A}\}.$$

$d \in \mathbb{K}$ は Box の元 $v(d)$ を定める.

$$v(d) := \sum_{i=1}^m [\langle D_i, d \rangle] b_i \in N.$$

この写像 $d \mapsto v(d)$ は $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}/\mathbb{L}$ を通じて分解し, これにより $\mathbb{K}/\mathbb{L}$ と Box は同一視される. $v(d) \in \text{Box}$ は慣性スタック $I\mathcal{X}$ の成分 $\mathcal{X}_{v(d)}$ を定める.

$$\mathcal{X}_{v(d)} = \{[z_1, \dots, z_m] \in \mathcal{X}; z_i = 0 \text{ if } \langle D_i, d \rangle \notin \mathbb{Z}\}$$

$\mathcal{X}_{v(d)}$ の stabilizer は $\exp(-2\pi\sqrt{-1}d) \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{C}^* \cong \mathbb{T}$ により与えられるものと定義する. $\mathcal{X}_{v(d)}$ は d のとり方によらず, Box の元 $v(d)$ のみに依存して決まる. $\mathcal{X}_{v(d)}$ の age は

$$\iota_{v(d)} := \text{age}(\mathcal{X}_{v(d)}) = \sum_{i=1}^m \{-\langle D_i, d \rangle\} = \sum_{i=1}^{m'} \{-\langle D_i, d \rangle\}.$$

で与えられ,

$$I\mathcal{X} = \bigsqcup_{v \in \text{Box}} \mathcal{X}_v, \quad H_{\text{orb}}^i(\mathcal{X}) = \bigoplus_{v \in \text{Box}} H^{i+2\iota_v}(\mathcal{X}_v)$$

である. $H^*(\mathcal{X}_v)$ は単位元 $1_v \in H^*(\mathcal{X}_v)$ により 2 次のコホモロジー類 $\overline{D}_1, \dots, \overline{D}_{m'} \in H^2(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ の作用で生成される.

6. LANDAU-GINZBURG 模型

完全列 (4) に完全関手 $\text{Hom}(-, \mathbb{C}^*)$ を適用して完全列

$$(5) \quad 1 \longrightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{C}^*) \longrightarrow Y := (\mathbb{C}^*)^m \xrightarrow{\text{pr}} \mathcal{M} := \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{C}^*) \longrightarrow 1$$

を得る. 前節で定義したトーリック軌道体にミラー双対な Landau-Ginzburg 模型は左から 3 番目の射 $\text{pr}: Y \rightarrow \mathcal{M}$ によって与えられる代数的トーラスの族と次のポテンシャル関数 $W: Y \rightarrow \mathbb{C}$ の組である.

$$W = w_1 + \dots + w_m, \quad (w_1, \dots, w_m) \in (\mathbb{C}^*)^m = Y.$$

ポテンシャル W は pr の各ファイバーに制限すると Laurent 多項式を与える. $\mathbb{L}^\vee$ の基底 $p_1, \dots, p_r$ に双対な $\mathcal{M} = \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{C}^*) = \mathbb{L}^\vee \otimes \mathbb{C}^*$ の $\mathbb{C}^*$ 値の座標を $q_1, \dots, q_r$ とおく. 射影 pr のファイバーを $Y_q = \text{pr}^{-1}(q)$ とおき, $W_q = W|_{Y_q}$ とおく. Y_q は $|N_{\text{tor}}|$ 個の連結成分からなり, 各々は $\text{Hom}(N_{\text{free}}, \mathbb{C}^*) \cong (\mathbb{C}^*)^n$ と同型である. ここで $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$. 完全列 (5) は一般には分裂しないが, pr の多価な切断 $(q_1, \dots, q_r) \mapsto (q^{\ell^1}, \dots, q^{\ell^m})$ をとることができる. ここで $q^{\ell^i} = \prod_{a=1}^r q^{\ell_{ia}^i}$ であり, ℓ_{ia}^i は一般には有理数である. N_{free} の任意の基底 $e_1, \dots, e_n$ を取り, $y_1, \dots, y_n$ を $\text{Hom}(N_{\text{free}}, \mathbb{C}^*)$ の対応する座標と

入谷 寛 (HIROSHI IRITANI)

する. これは平行移動により Y_q の各連結成分の座標を与える. さらに, N_{free} において $b_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} e_j$ が成り立つとする. このとき W_q は以下の表示を持つ.

$$(6) \quad W_q = W|_{Y_q} = q^{\ell_1} y^{b_1} + \cdots + q^{\ell_m} y^{b_m}, \quad q^{\ell_i} = \prod_{a=1}^r q_a^{\ell_{ia}}, \quad y^{b_i} = \prod_{j=1}^n y_j^{b_{ij}}.$$

ここで多価関数 q^{ℓ_i} の枝は Y_q の連結成分に依存することに注意されたい.

次にある Zariski 開な部分集合 $\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{M}$ が存在して, Landau-Ginzburg 模型は $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ 上の局所系を定めることを説明する.

Definition 6.1. $\hat{S}$ を $b_1, \dots, b_m \in N \otimes \mathbb{R}$ の凸包として得られる多面体とする. Laurent 多項式 $W_q(y)$ (6) が無限遠で非退化であるとは $\hat{S}$ の余次元が 1 以上の全ての面 Δ に対して $W_{q,\Delta}(y) := \sum_{b_i \in \Delta} q^{\ell_i} y^{b_i}$ が $y \in (\mathbb{C}^*)^n$ 上で臨界点を持たないことである. W_q が無限遠で非退化であるような q 全体のなす $\mathcal{M}$ の部分集合を $\mathcal{M}^\circ$ とおく.

点 $(q, z) \in \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ に対して次の相対ホモロジー群を考える.

$$R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee := H_n(Y_q, \{y \in Y_q; \Re(W_q(y)/z) < M\}; \mathbb{Z}), \quad M \ll 0$$

ここで右辺は十分小さい M のとり方によらない. 生成的な q に対しては $y \mapsto \Re(W_q(y)/z)$ は Y_q 上の Morse 関数を与え, 各臨界点の指数は n である. また Kouchnirenko の定理 [11] により, 臨界点の個数 N は $\hat{S}$ の体積に $n!|N_{\text{tor}}|$ をかけたものに等しい. 全ての臨界値の虚部が互いに異なるとき, $R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee$ は各臨界点 $\sigma \in Y_q$ の不安定多様体 Γ_σ :

$$\Gamma_\sigma = \{y \in Y_q; \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(y) = \sigma\}, \quad \phi_t(y) \text{ は } \Re(W_q(y)/z) \text{ の勾配流}$$

たちによって生成される自由アーベル群 $\bigoplus_\sigma \mathbb{Z}\Gamma_\sigma$ である. これらの相対ホモロジーを束ねてできる $R_{\mathbb{Z}} := \bigcup_{(q,z) \in \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*} R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee$ は $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ 上のランク N の局所系をなすことが示される. ただし $y \mapsto \Re(W_q(y)/z)$ は固有写像ではないので, モース理論を使うためにはいわゆる Palais-Smale 条件を検証しないといけない. 実際 $q \notin \mathcal{M}^\circ$ の時は, Y_q の無限遠に逃げるサイクルがありモース理論がうまく働かない.

相対ホモロジーの間の交差形式は次の完全ペアリングを定める.

$$R_{\mathbb{Z},(q,-z)}^\vee \times R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee \rightarrow \mathbb{Z}.$$

$R_{\mathbb{Z},(q,z)} = \text{Hom}(R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee, \mathbb{Z})$ とおき, $R_{\mathbb{Z}}$ を $R_{\mathbb{Z}}^\vee$ に双対な局所系とする. 上記のペアリングは完全ペアリング $R_{\mathbb{Z},(q,-z)} \times R_{\mathbb{Z},(q,z)} \rightarrow \mathbb{Z}$ を誘導する. $R_{\mathbb{Z}}$ は $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ 上の局所自由層 $\mathcal{R}$ と可積分接続 $\hat{\nabla}$ を定める.

$$\mathcal{R} = R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*}, \quad \hat{\nabla} = \text{局所系 } R \text{ の定める } \mathcal{R} \text{ の可積分接続.}$$

ここで $\mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*}$ は解析的構造層である. 振動積分は $\mathcal{R}$ の特別な切断 ζ を定める.

$$(7) \quad \zeta: R_{\mathbb{Z},(q,z)}^\vee \ni \Gamma \mapsto \frac{1}{(-2\pi z)^{n/2}} \frac{1}{|N_{\text{tor}}|} \int_\Gamma e^{W_q(y)/z} dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \in \mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*}.$$

Proposition 6.2. $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ 上の局所自由層 $\mathcal{R}$ は $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$ 上の局所自由層 $\mathcal{R}^{(0)}$ に拡張され, (7) に与えた切断 ζ は $\mathcal{R}^{(0)}$ の切断に拡張される. $\mathcal{R}^{(0)}$ 上の可積分接続 $\hat{\nabla}$ は $\mathcal{M}^\circ \times \{0\}$ に沿って高々 2 位の極を持つ². また $R_{\mathbb{Z}}$ のペアリングは $\mathcal{M} \times \mathbb{C}$ 上で正則なペアリン

²Poincaré rank 1 の接続とも呼ばれる. 局所枠で接続を表示したときにその主要部が $(A_2 z^{-2} + A_1 z^{-1})dz$ の形をとることである.

量子コホモロジーの整構造について (INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

$\mathcal{G}(-)^*\mathcal{R}^{(0)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}}} \mathcal{R}^{(0)} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}}$ に拡張される. ここで $(-): \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$ は (q, z) を $(q, -z)$ に写す写像.

$\mathcal{R}$ の $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$ への拡張 $\mathcal{R}^{(0)}$ は Landau-Ginzburg 模型の定める半無限 Hodge 構造の変形において最も本質的な情報である. 以下に述べるミラー対称性ではこの拡張 $\mathcal{R}^{(0)}$ と量子 D 加群とが同一視される. $\mathcal{R}^{(0)}$ の $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ への制限 $\mathcal{R}$ は整数上の局所系を自然に含んでいるので, その整構造を量子コホモロジー側に引き戻すことができる.

7. ミラー対称性と引き戻された整構造

I 函数と呼ばれる $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ に値をとる $\mathcal{M}^\circ$ 上の多価函数を次で定める.

$$I(q, z) = e^{\sum_{a=1}^r \bar{p}_a \log q_a / z} \sum_{d \in \mathbb{K}_{\text{eff}}} q^d \frac{\prod_{i; \langle D_i, d \rangle < 0} \prod_{\langle D_i, d \rangle \leq \nu < 0} (\bar{D}_i + (\langle D_i, d \rangle - \nu)z)}{\prod_{i; \langle D_i, d \rangle > 0} \prod_{0 \leq \nu < \langle D_i, d \rangle} (\bar{D}_i + (\langle D_i, d \rangle - \nu)z)} \mathbf{1}_{\nu(d)}.$$

ここで, $d \in \mathbb{L} \otimes \mathbb{Q}$ に対して $q^d = q_1^{(p_1, d)} \cdots q_r^{(p_r, d)}$ であり, ν は整数を動く. また, $(q_1, \dots, q_r)$ は前節に与えた $\mathcal{M}$ の座標である. ミラー対称性を述べるためにトーリック軌道体に次の条件を課す.

(D) $\hat{\rho} := D_1 + \cdots + D_m \in \mathbb{L}^\vee$ は任意の $I \in \mathcal{A}$ に対して $\hat{\rho} \in \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} D_i$ を満たす.

Proposition 7.1. 条件 (D) の下で I 函数は q の級数として収束冪級数であり, 次の展開を持つ.

$$I(q, z) = 1 + \frac{\tau(q)}{z} + O(z^{-2}).$$

ここで, $\tau(q)$ は $\mathcal{M}^\circ$ のある開集合 U' で収束する $H_{\text{orb}}^{\leq 2}(\mathcal{X})$ 値の多価函数.

量子コホモロジーに付随する量子微分方程式は $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}^*}$ 上の可積分接続 $\hat{\nabla}$ (2) により定義されたことを思い出そう. ここで, U は量子積が収束する $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X})$ の開集合であった. この可積分接続は (自明な方法で) $U \times \mathbb{C}$ 上の $z = 0$ に沿って 2 次の極を持つ有理形接続 $\hat{\nabla}$ に拡張される. トーリック軌道体に対するミラー対称性は次のように述べられる.

Conjecture 7.2. $\mathcal{X}$ を条件 (D) を満たすデータから定義されるトーリック軌道体とする. $(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}, \hat{\nabla})$ を $\mathcal{X}$ の量子微分方程式を定める可積分接続とし, $(\mathcal{R}^{(0)}, \hat{\nabla})$ を $\mathcal{X}$ にミラー双対な Landau-Ginzburg 模型の定める $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}$ 上の可積分接続とする. I 函数の z 展開の z^{-1} の係数が定める多価写像を $\tau: \mathcal{M}^\circ \supset U' \rightarrow H_{\text{orb}}^{\leq 2}(\mathcal{X})$ とおく. 必要なら U' を小さくとり $\tau(U') \subset U$ としてよい. 次の同型 Mir が存在する.

$$\text{Mir}: (\mathcal{R}^{(0)}, \hat{\nabla})|_{U' \times \mathbb{C}} \cong \tau^*(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}, \hat{\nabla})$$

Mir は $\mathcal{R}^{(0)}$ の切断 ζ を $H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}$ の単位元切断 1 に写し, かつ Mir が誘導する $\mathcal{M}^\circ \times \mathbb{C}^*$ 上の局所系間の同型 $\text{Mir}: R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}$ はペアリングを保つ. さらに, Proposition 3.1 に与えた基本解 $L(\tau, z)$ に対して

$$I(q, z) = L(\tau(q), z)^{-1}(1) = L(\tau(q), z)^{-1}(\text{Mir}(\zeta))$$

が成り立つ.

τ は多価写像であるが, 量子 D 加群 $(H_{\text{orb}}^*(\mathcal{X}) \otimes \mathcal{O}_{U \times \mathbb{C}}, \hat{\nabla})$ の自己同型があるため τ による引き戻しは well-defined になっている.

Theorem 7.3. Conjecture 7.2 が成立すると仮定する. $\mathcal{X}$ を条件 (D) を満たすデータから定義されるトーリック軌道体とし, $\mathcal{X}$ は 4 節の仮定 (A3) を満たすとする. ミラー同型 $\text{Mir}: R_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C} \cong S$ の与える S の整格子 $\text{Mir}(R_{\mathbb{Z}})$ は Definition 4.1 における $\hat{\Gamma}$ -整構造 $S_{\mathbb{Z}}$ と一致する.

証明の最も鍵となるステップは I 関数と振動積分を比較することである. $\mathcal{M}$ の実部を $\mathcal{M}_{\mathbb{R}} := \text{Hom}(\mathbb{L}, \mathbb{R}_{>0})$ とおく. $q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ に対してはファイバー Y_q は実部分多様体 $\Gamma_{\mathbb{R}} := \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{>0})$ を含み, $z < 0$ のとき相対ホモロジーの元 $[\Gamma_{\mathbb{R}}] \in R_{\mathbb{Z},(q,z)}^{\vee}$ を与える. $q \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ かつ $z < 0$ のとき次が成り立つ.

$$\zeta(\Gamma_{\mathbb{R}}) = \int_{I\mathcal{X}} H(q, z) \cup \widetilde{\text{Td}}(T\mathcal{X}), \quad H(q, z) := (2\pi)^{n/2} \text{inv}^*(2\pi i)^{-\frac{\deg}{2}} \hat{\Gamma}_{\mathcal{X}}^{-1}(z^{-\rho} z^{\mu} I(q, z)).$$

ここで左辺の $\zeta(\Gamma_{\mathbb{R}})$ は (7) で与えられる振動積分. 右辺は $H(q, z)$ と構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ の向井ペアリングに等しいので, この等式はホモロジカルミラー対称性において Y_q の Lagrangian $\Gamma_{\mathbb{R}}$ が構造層 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ に対応することを示唆している. $\Gamma_{\mathbb{R}}$ は Y_q の Lagrangian torus fibration $|\cdot|: Y_q \rightarrow \text{Hom}(N, \mathbb{R}_{>0})$ (絶対値を取る写像) における Lagrangian section とみなすと, この対応は Strominger-Yau-Zaslow の描像と合致する.

K 群とミラーに現れる整構造との関係は細野 [7] および Borisov-Horja [4] などにおいてもすでに指摘されている. たとえば, 細野 [7] で指摘されている $\mathbb{P}^4$ 内の 5 次超曲面の量子微分方程式の整構造はここで挙げた $\hat{\Gamma}$ -整構造と一致しているようである. また, Borisov-Horja では非コンパクトなトーリック Calabi-Yau 多様体の場合に K 群の複素化を対応する GKZ 系の解空間と同一視し, さらに K 群の間の Fourier-Mukai 変換が GKZ 系の解析接続に対応することを示している.

REFERENCES

1. Abramovich, Dan; Graber, Tom; Vistoli, Angelo *Gromov-Witten theory of Deligne-Mumford stacks*. preprint, arXiv:math.AG/0603151.
2. Adem, Alejandro; Ruan, Yongbin *Twisted orbifold K-theory* Comm. Math. Phys. 237 (2003), no. 3, pp.533–556.
3. Borisov, Lev A.; Chen, Linda; Smith, Gregory G. *The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks*. J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 1, pp.193–215.
4. Borisov, Lev A.; Horja, R. Paul *Mellin-Barnes integrals as Fourier-Mukai transforms*. Adv. Math. 207 (2006), no. 2, pp.876–927.
5. Chen, Weimin; Ruan, Yongbin, *A new cohomology theory of orbifold*. Comm. Math. Phys. B 359 (1991) no.1, pp.1–31.
6. Chen, Weimin; Ruan, Yongbin *Orbifold Gromov-Witten theory*. Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001), Contemp. Math., vol. 310, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002, pp.25–85.
7. Hosono, Shinobu *Central charges, symplectic forms, and hypergeometric series in local mirror symmetry*. Mirror symmetry. V, pp.405–439, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
8. Iritani, Hiroshi *Real and integral structures in quantum cohomology I: toric orbifolds*. preprint, math.AG/0712.2204.
9. Kawasaki, Tetsuro, *The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds*. Osaka J. Math., 16, 1979, pp.151–159.
10. Kawasaki, Tetsuro, *The index of elliptic operators over V-manifolds*. Nagoya Math. J., 84, 1981, pp.135–157.
11. Kouchnirenko, A. G., *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*. Invent. Math. 32 (1976), no. 1, pp.1–31.

量子コホモロジーの整構造について (INTEGRAL STRUCTURES IN QUANTUM COHOMOLOGY)

812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1 九州大学大学院数理学研究院

E-mail address: iritani@math.kyushu-u.ac.jp