

Réalisation des modules irréductibles ayant un poids dominant dans des espaces des fonctions analytiques

Yi ZHU

Résumé - Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$, soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et soit G un groupe connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Pour tout $\nu \in \mathfrak{h}^*$, nous donnons une réalisation du $\mathfrak{g}$ -module irréductible de poids dominant ν dans un espace de fonctions analytiques au voisinage de l'élément neutre dans G . Lorsque ν est le caractère de certaines sous algèbres de Levi ayant des propriétés particulières, nous obtenons plusieurs réalisations distinctes du même module.

A realization of irreducible highest weight module in a space of analytic functions

Abstract - Let $\mathfrak{g}$ be a simple Lie algebra over $\mathbb{C}$, let $\mathfrak{h}$ be a Cartan subalgebra of $\mathfrak{g}$ and let G be a connected group with Lie algebra $\mathfrak{g}$. For all $\nu \in \mathfrak{h}^*$ we give a realization of irreducible $\mathfrak{g}$ -module with highest weight ν in a space of analytic functions near the origin in G . If ν is the character of some Levi subalgebras having specific properties, we obtain several distinct realizations of the same module.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie, et soit $\mathfrak{h}$ une sous algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit G un groupe connexe complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $\mathcal{R}$ le système de racines de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, et on fixe une base Ψ de $\mathcal{R}$. Soit θ une partie de Ψ .

On définit l'élément H_θ par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha(H_\theta) &= 2 \quad \text{si } \alpha \in \Psi \setminus \theta \\ \alpha(H_\theta) &= 0 \quad \text{si } \alpha \in \theta.\end{aligned}$$

On pose également

$$d_p(\theta) = \{X \in \mathfrak{g}, [H_\theta, X] = 2pX\}.$$

On a ainsi

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} d_p(\theta).$$

On pose

$$\mathfrak{n}_\theta^- = \bigoplus_{p < 0} d_p(\theta), \quad \mathfrak{l}_\theta = d_0(\theta), \quad \mathfrak{n}_\theta^+ = \bigoplus_{p > 0} d_p(\theta).$$

La sous algèbre parabolique $\mathfrak{p}_\theta$ associée à θ est définie par

$$\mathfrak{p}_\theta = \mathfrak{l}_\theta + \mathfrak{n}_\theta^+.$$

Si $d\lambda$ est un caractère de $\mathfrak{l}_\theta$, on peut étendre $d\lambda$ trivialement sur $\mathfrak{p}_\theta$ en posant

$$d\lambda(l + n) = d\lambda(l), \quad l \in \mathfrak{l}_\theta, \quad n \in \mathfrak{n}_\theta^+.$$

Tous les caractères de $\mathfrak{l}_\theta$ peuvent être ainsi considérés comme des caractères de $\mathfrak{p}_\theta$.

DÉFINITION 1 ([1]). — On dit que $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène de Dynkin-Kostant s'il existe un élément $I^+ \in d_1(\theta)$ et un élément $I^- \in d_{-1}(\theta)$ tels que (I^-, H_θ, I^+) est un sl_2 -triplet.

On suppose dans tout ce paragraphe que la couple $(\mathfrak{l}_\theta, d_1(\theta))$ est un espace préhomogène de Dynkin-Kostant.

REMARQUE 2

- a) Les espaces préhomogènes de ce type (Dynkin-Kostant) avaient déjà été considérés par Rubenthaler [2] qui en avait donné une caractérisation (Proposition 1.3.8, p. 31).
- b) Une étude détaillée des espaces préhomogènes de Dynkin-Kostant se trouve dans [1].
- c) Les parties θ correspondant à des espaces de Dynkin-Kostant comprennent les parties admissibles au sens de [3]. Donc notamment la partie $\theta = \emptyset$ (qui correspond à la sous algèbre de Borel) définit un espace préhomogène de Dynkin-Kostant.

Soit

$$w = \exp_G I^+ \exp_G I^- \exp_G I^+ \in G.$$

Soit $\mathfrak{s}_2$ la sous algèbre engendrée par le sl_2 -triplet (I^-, H_θ, I^+) , et soit S_2 le sous groupe analytique de G correspondant à $\mathfrak{s}_2$. Puisque $SL(2, \mathbb{C})$ est simplement connexe, l'isomorphisme $d\varphi$ de $sl(2, \mathbb{C})$ sur $\mathfrak{s}_2$ donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto I^-, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto I^+, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto H_\theta$$

nous donne un morphisme φ de $SL(2, \mathbb{C})$ sur S_2 .

On notera que w^4 est l'élément neutre du groupe G et que $w^2 \in \exp_G \mathfrak{h}$. Et on a

$$\text{Ad}w(\mathfrak{l}_\theta) = \mathfrak{l}_\theta, \quad \text{Ad}w(\mathfrak{n}_\theta^+) = \mathfrak{n}_\theta^-, \quad \text{Ad}w(I^+) = I^-, \quad \text{et} \quad \text{Ad}w(I^-) = I^+.$$

Soient N_θ^+ , N_θ^- , L_θ les sous groupes analytiques correspondant respectivement à $\mathfrak{n}_\theta^+$, $\mathfrak{n}_\theta^-$, $\mathfrak{l}_\theta$, soit $d\lambda$ un caractère de $\mathfrak{l}_\theta$. Soit P_θ le normalisateur de $\mathfrak{p}_\theta$ dans G . Soient $\widetilde{P}_\theta$ le revêtement universel de P_θ et $\pi : \widetilde{P}_\theta \rightarrow P_\theta$ la projection canonique. Soit $\widetilde{L}_\theta$ le sous groupe analytique de $\widetilde{P}_\theta$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\theta$. Le groupe $\widetilde{L}_\theta$ est le revêtement universel de L_θ . Soit $\pi_1 : \widetilde{L}_\theta \rightarrow L_\theta$ la projection canonique.

Pour tout groupe J , on note e_J l'élément neutre de J .

Si w^2 est l'élément neutre e_G de S_2 , on choisit un voisinage ouvert $V \subset L_\theta$ de e_{L_θ} satisfaisant les conditions suivantes :

- 1- Il existe une section $\sigma_1 : V \rightarrow \widetilde{L}_\theta$ de l'application π_1 tel que $\sigma_1(e_{L_\theta}) = e_{\widetilde{L}_\theta}$.

$$2- V^{-1} = V.$$

Si w^2 n'est pas l'élément neutre de S_2 , on choisit un voisinage ouvert $V_1 \subset L_\theta$ de e_{L_θ} satisfaisant les conditions suivantes :

1'- Il existe une section $\sigma_1 : V_1 \rightarrow \widetilde{L}_\theta$ de l'application π_1 tel que $\sigma_1(e_{L_\theta}) = e_{\widetilde{L}_\theta}$.

$$2'- V_1^{-1} = V_1.$$

$$3'- w^2 V_1 w^2 = V_1.$$

$$4'- V_1 \cap w^2 V_1 = \emptyset.$$

Dans ce dernier cas on pose

$$V = V_1 \cup w^2 V_1.$$

Soit $h \in \mathfrak{h}$ tel que $w^2 = \exp_{L_\theta} h$. On pose $w_1^2 = \exp_{\widetilde{L}_\theta} h$. On a $\pi_1(w_1^2) = w^2$. On étend l'application σ_1 à V de la manière suivante :

$$\sigma_1(w^2 g) = w_1^2 \sigma_1(g), \quad g \in V_1.$$

Il est facile de voir que (σ_1, V) est une section de l'application π_1 .

On pose $O = VN_\theta^+$, l'ensemble O est donc un voisinage ouvert de l'élément neutre de P_θ sur lequel il existe une section $\sigma : O \rightarrow \widetilde{P}_\theta$ de l'application π .

LEMME 3. — *L'ensemble $\Omega = N_\theta^- \cap w^{-1} N_\theta^- O$ est un ouvert non vide de N_θ^- . En particulier, on a $\exp_G(-I^-) \in \Omega$ et $\exp_G(I^-) \in \Omega$.*

Soit $d\lambda_w$ le caractère de $\mathfrak{l}_\theta$ défini par

$$d\lambda_w(x) = -d\lambda(\text{Ad}(w^{-1})x), \quad x \in \mathfrak{l}_\theta.$$

Soit λ_w (resp. λ) le caractère de $\widetilde{L}_\theta$ correspondant à $d\lambda_w$ (resp. $d\lambda$). Pour $g \in O$, on a donc

$$\lambda_w(\sigma(g)) = \lambda^{-1}(\sigma(w^{-1}gw)) = \lambda(\sigma(w^{-1}g^{-1}w)).$$

On va rappeler la construction de Rubenthaler d'un invariant relatif de la représentation $(L_\theta, \mathfrak{n}_\theta^-)$. ([2] (théorème 1.4.2 et remarque 1.4.3) et [4]).

Soient $\tilde{\gamma}$ et $\tilde{p}$ les applications définies sur Ω par

$$wv = \tilde{\gamma}(v)\tilde{p}(v)$$

avec $\tilde{\gamma}(v) \in N_\theta^-$ et $\tilde{p}(v) \in O$.

LEMME 4. — *L'application $\tilde{\gamma}$ est une bijection de Ω sur Ω .*

On note $\tilde{\gamma}^{-1}$ l'application inverse de $\tilde{\gamma}$.

Soit f_{λ_w} la fonction définie sur Ω par

$$f_{\lambda_w}(v) = \lambda_w(\sigma(\tilde{p}(v))),$$

La fonction f_{λ_w} est analytique sur Ω puisque λ_w et $\tilde{p}$ le sont. (C'est cette fonction définie sur $N_{\theta}^- \cap w^{-1}N_{\theta}^-P_{\theta}$ lorsque λ est un caractère de L_{θ} , qui était considérée dans [2].)

LEMME 5. — *Pour $X \in \mathfrak{l}_{\theta}$, $v \in \Omega$ et t assez petit, on a*

$$f_{\lambda_w}(\exp_G(tX)v \exp_G(-tX)) = \lambda \lambda_w(\sigma(\exp_G(-tX))) f_{\lambda_w}(v).$$

Nous définissons à présent l'espace $H(\lambda)$ où nous allons réaliser le $\mathfrak{g}$ -module irréductible de poids dominant λ en posant

$$H(\lambda) = \{h : \Omega O \rightarrow \mathbb{C} \mid h \text{ est analytique, } h(nq) = \lambda_w(\sigma(q))h(n), q \in O, n \in \Omega\}$$

Soit $X \in \mathfrak{g}$, pour t assez petit et $nq \in \Omega O$ fixé, le produit $(\exp -tX)nq$ est encore dans ΩO , ce qui permet de définir $(\exp tX.h)(nq)$ par

$$\exp tX.h(nq) = h((\exp -tX)nq)$$

On définit alors

$$(X.h)(nq) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp tX.h)(nq) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} h((\exp -tX)nq)$$

Nous avons ainsi muni $H(\lambda)$ d'une structure de $\mathfrak{g}$ -module.

Notons que si $H(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions analytiques sur Ω , l'application restriction des fonctions de $H(\lambda)$ à Ω permet d'identifier $H(\lambda)$ et $H(\Omega)$. Ceci permet de considérer f_{λ_w} comme un élément de $H(\lambda)$ en posant pour $n \in \Omega$ et $q \in O$,

$$f_{\lambda_w}(nq) = \lambda_w(\sigma(q))f_{\lambda_w}(n).$$

On pose également

$$W(\lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g})f_{\lambda_w}.$$

C'est un sous $\mathfrak{g}$ -module de $H(\lambda)$.

LEMME 6. — *la fonction f_{λ_w} est un vecteur primitif de poids $d\lambda$.*

LEMME 7. — Soit $v \in \Omega$, on a

$$w^{-1}v = \tilde{\gamma}^{-1}(v)(\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(v)))^{-1}.$$

Soit γ l'application de $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ dans $SL(2, \mathbf{C})$ donnée par

$$s \longmapsto \gamma(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{s} & 1 \end{pmatrix}.$$

LEMME 8. — On a $\varphi\gamma(t) = \tilde{\gamma}(\exp_{S_2}(tI^-))$

On note R_g la multiplication à droite par g (dans $SL(2, \mathbf{C})$ ou S_2). On note aussi $(d\varphi)_g$ la différentielle de φ au point g . On note e l'élément neutre de $SL(2, \mathbf{C})$, alors on a $d\varphi_e = d\varphi$. On remarque que $\varphi(e)$ est l'élément neutre de S_2 (donc aussi l'élément neutre de G). On note $(dR_g)_x$ la différentielle de R_g au point x .

LEMME 9. — On a

$$(d\tilde{\gamma}^{-1})_{\varphi(\gamma(s))}((dR_{\varphi(\gamma(s))})_{\varphi(e)}I^-) = s^2(dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-.$$

LEMME 10. — Soit $f \in H(\lambda)$, soit $s \in \mathbf{C}$ tel que $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$. Si f satisfait l'équation suivante

$$I^+.f(\exp_{S_2} sI^-) = 0,$$

alors on a

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = -s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-).$$

Où

$$A = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1} \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))))$$

est une constante qui ne dépend pas de f .

Preuve : D'après l'hypothèse, on a

$$\begin{aligned}
 0 &= (-I^+).f(\exp_{S_2} sI^-) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\exp_{S_2} tI^+ \exp_{S_2} sI^-) \\
 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(w^{-1}(w \exp_{S_2} tI^+ w^{-1})(w \exp_{S_2} sI^-)) \\
 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(w^{-1} \exp(t(\text{Ad } w)I^+) \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-) \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-)) \\
 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(w^{-1} \exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-) \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))
 \end{aligned}$$

d'après le lemme 7

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [f(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)) \\
 &\quad (\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1} \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))] \\
 &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} [f(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-)) \\
 &\quad \lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1} \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-)))]
 \end{aligned}$$

D'après le lemme 8, on a $\tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-) = \varphi(\gamma(s))$. On obtient

$$\begin{aligned}
 0 &= (-I^+).f(\exp_{S_2} sI^-) \\
 &= \lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))^{-1} \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-)))(\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \varphi(\gamma(s)))) \\
 &\quad + f(\exp_{S_2} sI^-) \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1} \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-)))) \\
 &= (df)_{\exp_{S_2} sI^-} ((d\tilde{\gamma}^{-1})_{\varphi(\gamma(s))} ((dR_{\varphi(\gamma(s))})_{\varphi(e)}(I^-))) + Af(\exp_{S_2} sI^-)
 \end{aligned}$$

Où

$$A = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\lambda_w(\sigma((\tilde{p}(\tilde{\gamma}^{-1}(\exp_{S_2} tI^- \tilde{\gamma}(\exp_{S_2} sI^-))))^{-1} \tilde{p}(\exp_{S_2} sI^-))))$$

En utilisant le lemme 9, On obtient

$$0 = s^2(df)_{\exp_{S_2} sI^-} ((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)} I^-) + Af(\exp_{S_2} sI^-)$$

On a donc

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-} ((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)} I^-) = -s^{-2} Af(\exp_{S_2} sI^-). \quad \square$$

LEMME 11. — Soit μ une forme linéaire sur $\mathfrak{h}$, soit $f \in H(\lambda)$ telle que $H_\theta.f = \mu(H_\theta)f$. On a, pour $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$,

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-} ((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)} I^-) = \frac{1}{2s} (d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta)) f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Preuve : D'après les hypothèses, pour $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$, on a

$$(*) \quad H_\theta.f(\exp_{S_2} sI^-) = \mu(H_\theta)f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Or on a

$$\begin{aligned} H_\theta.f(\exp_{S_2} sI^-) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp -tH_\theta \exp_{S_2} sI^-) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp -tH_\theta \exp_{S_2} sI^- \exp tH_\theta \exp -tH_\theta) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp -tH_\theta \exp_{S_2} sI^- \exp tH_\theta) \lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(e^{ad(-tH_\theta)}(sI^-))) \lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(sI^- + 2tsI^-)) \lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\exp(2tsI^-) \exp(sI^-)) \lambda_w(\sigma(\exp -tH_\theta)) \\ &= 2s(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) - d\lambda_w(H_\theta)f(\exp_{S_2} sI^-) \end{aligned}$$

En utilisant la formule (*), on a

$$((df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-). \quad \square$$

PROPOSITION 12. — Soit $\exp_{S_2} sI^- \in \Omega$. Si $f \in H(\lambda)$ est une fonction propre de poids μ pour $\mathfrak{h}$ satisfaisant les conditions suivantes

$$I^+.f(\exp_{S_2} sI^-) = 0, \quad f(\exp_{S_2} sI^-) \neq 0,$$

alors on a

$$\mu(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta).$$

Où A est la constante indépendante de f définie dans le lemme 10.

Preuve : Puisque la fonction f satisfait les hypothèses du lemme 10, on a

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = -s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-).$$

Puisque la fonction f satisfait les hypothèses du lemme 11, on a

$$(df)_{\exp_{S_2} sI^-}((dR_{\exp_{S_2} sI^-})_{\varphi(e)}I^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Ces deux équations montrent que

$$-s^{-2}Af(\exp_{S_2} sI^-) = \frac{1}{2s}(d\lambda_w(H_\theta) + \mu(H_\theta))f(\exp_{S_2} sI^-).$$

Puisque $f(\exp_{S_2} sI^-) \neq 0$, on a

$$\mu(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta). \quad \square$$

Puisque les valeurs de f_{λ_w} sont toujours non nulles, la proposition 12 nous donnent la formule suivante

$$(1) \quad d\lambda(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta).$$

Supposons maintenant que ω est un autre vecteur primitif de $W(\lambda)$ dont le poids μ est strictement inférieur à $d\lambda$, et considérons $E = \mathcal{U}(\mathfrak{g})\omega$ le sous $\mathfrak{g}$ -module propre de $W(\lambda)$ engendré par ω .

LEMME 13. — *Pour $s = 1$ ou -1 , il existe une fonction $h \in E$ satisfaisant $h(\exp_{S_2} sI^-) \neq 0$.*

Comme toute fonction dans E est somme de fonctions propres pour $\mathfrak{h}$, on peut donc supposer que h est une fonction propre de poids μ pour $\mathfrak{h}$ et que le poids μ est maximal parmi les poids des fonctions propres qui ne s'annulent pas au point $\exp_{S_2} sI^-$ ($s = 1$ ou -1). On a donc

$$I^+ . h(\exp_{S_2} sI^-) = 0, \quad s = 1 \text{ ou } -1.$$

D'après la proposition 12, on a

$$(2) \quad \mu(H_\theta) = -2s^{-1}A - d\lambda_w(H_\theta), \quad s = 1 \text{ ou } -1.$$

D'autre part (1) et (2) nous donnent la formule

$$(3) \quad d\lambda(H_\theta) = \mu(H_\theta).$$

LEMME 14. — *Le poids μ est de la forme $d\lambda - \sum \beta_i$ avec $\beta_i(H_\theta) \geq 2$.*

Le lemme 14 montre que (3) est impossible. L'existence de ω nous donne une contradiction. La fonction f_{λ_w} est donc le seul vecteur primitif de $W(\lambda)$ (à la multiplication par une constante près). Le module $W(\lambda)$ est donc irréductible. On obtient ainsi le résultat principal suivant.

THÉORÈME 15. — *Le $\mathfrak{g}$ -module $W(\lambda)$ est irréductible de poids dominant $d\lambda$ (l'élément f_{λ_w} est le vecteur primitif associé).*

REMARQUE 16

- a) Dans le cas où $\mathfrak{n}_\theta^+$ était commutative et $\mathfrak{g}$ de type classique, Suga [5] avait obtenu, par un calcul cas par cas, un résultat analogue à partir de l'invariant relatif global de l'espace préhomogène associé. Nous avons par ailleurs montré que sa méthode s'étendait au cas exceptionnel. La méthode employée ici est différente.
- b) Dans le cas $\theta = \emptyset$ on a $\mathfrak{l}_\theta = \mathfrak{h}$ et notre construction donne alors une réalisation de n'importe quel $\mathfrak{g}$ -module irréductible ayant un poids dominant. Dans le cas où $d\lambda$ est le caractère de plusieurs sous algèbres de Levi vérifiant la condition de la définition 1, on obtient autant de réalisations distinctes du $\mathfrak{g}$ -module de poids dominant $d\lambda$.
- c) Dans le cas où $d\lambda$ est dominant, c'est à dire qu'il correspond à une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$, notre résultat est bien sûr à rapprocher du classique théorème de Borel-Weil (voir par exemple Knapp [6], théorème 5.9)

Bibliographie. —

- [1] A. GYOJA. — *Invariants, Nilpotent Orbits, and Prehomogeneous Vector Spaces*, J. of Algebra. 142, 1991, p. 210-232.
- [2] H. RUBENTHALER. — *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Thèse, Université de Strasbourg, 1982.
- [3] H. RUBENTHALER. — *Construction de certaines sous-algèbres remarquables dans les algèbres de Lie semi-simples*, J. Alg., 81, 1983, p. 268-278.
- [4] H. RUBENTHALER. — *Espaces préhomogènes de type parabolique*, Lect. Math. Kyoto Univ. 14, 1982, p. 189-221.
- [5] S. SUGA. — *Highest weight modules associated with classical irreducible regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type*, Osaka J. Math. 28, 1991, p. 323-346.
- [6] A. KNAPP. — *Representation Theory of Semisimple Groups. An Overview Based on Examples*, Princeton Univ. Press, Princeton New Jersey, 1986.

Institut de Recherche Mathématique Avancée (IRMA)

Université Louis Pasteur

7 rue René Descartes

67084 Strasbourg cedex

e-mail : zhu@math.u-strasbg.fr