

Remarks on theta series

瀬山 敦 清水 敦

z を degree n の Siegel 上半空間 H_n の元とし、 x は $\mathbb{C}^n$ の元、 k', k'' はともに $\mathbb{R}^n$ の元とする時、 $\begin{pmatrix} k' \\ k'' \end{pmatrix}$ を theta characteristic とする theta series $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|x)$ は次の様に定義される。

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right] = \sum_{t \in \mathbb{Z}^n} e\left(\frac{1}{2}t(n+k')z(n+k') + t(n+k')(x+k'')\right)$$

ただし、 $e(z)$ は $\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ をあらわす ($z \in \mathbb{C}$)。このとき、次が成り立つ。

Proposition. $\vartheta\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|0)$ が、 z の関数として恒等的に 0 ならば、 $2k' \equiv 2k'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ かつ $2^t k' k'' \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

この事実^{*}は、 $k', k'' \in \mathbb{Q}^n$ のときは既に知られている。 $k', k'' \in \mathbb{R}^n$ のときの証明は 最初瀬山が transformation formula を使って行ったが、あとで清水が 初等的な方法で証明したので、こ

ここではそれを紹介する。

$$R' = \begin{pmatrix} R'_1 \\ \vdots \\ R'_n \end{pmatrix} \quad R'' = \begin{pmatrix} R''_1 \\ \vdots \\ R''_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \quad \text{に 対 し、} \quad R_m^{*'} = \begin{pmatrix} R'_1 \\ \vdots \\ R'_{m-1} \\ R'_m \end{pmatrix}$$

$$R_m^{*''} = \begin{pmatrix} R''_1 \\ \vdots \\ R''_{m-1} \\ R''_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \quad x_m^* = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m, \quad R_m^{m'} = \begin{pmatrix} R'_{m+1} \\ \vdots \\ R'_n \end{pmatrix} \quad R_m^{m''} = \begin{pmatrix} R''_{m+1} \\ \vdots \\ R''_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-m}$$

$$x_m^* = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-m} \quad \text{と お く。} \quad (1 \leq m < n)$$

Lemma 1 任意の $z_m^* \in H_m$, $z_{n-m}^* \in H_{n-m}$ に 対 し、

$$\mathcal{J} \begin{bmatrix} R' \\ R'' \end{bmatrix} \left(\begin{pmatrix} z_m^* & 0 \\ 0 & z_{n-m}^* \end{pmatrix} \middle| x \right) = \mathcal{J} \begin{bmatrix} R_m^{*'} \\ R_m^{*''} \end{bmatrix} (z_m^* | x_m^*) \mathcal{J} \begin{bmatrix} R_m^{m'} \\ R_m^{m''} \end{bmatrix} (z_{n-m}^* | x_{n-m}^*)$$

($1 \leq m < n$).

Lemma 2. 任意の $u \in GL(n, \mathbb{Z})$ に 対 し

$$\mathcal{J} \begin{bmatrix} R' \\ R'' \end{bmatrix} (z | x) = \mathcal{J} \begin{bmatrix} u^{-1} R' \\ {}^t u R'' \end{bmatrix} ({}^t u z u | {}^t u x).$$

従って特に、 $\mathcal{J} \begin{bmatrix} R' \\ R'' \end{bmatrix} (z | 0)$ が恒等的に 0 なら、

$\mathcal{J} \begin{bmatrix} u^{-1} R' \\ {}^t u R'' \end{bmatrix} (z | 0)$ も恒等的に 0 である。

この 2 つの lemma は定義から簡単にでる。さ

て Proposition の証明はこの 2 つの lemma を使って帰納法で行なう。

$n=1$ のとき、 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|0) = \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z|zk'+k'')e(\frac{1}{2}k'zk'+k''k'')$ であるが、 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right](z|x)$ の x の函数としての零点は $\{az+b \mid a \equiv \frac{1}{2}, b \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}\}$ しかないから、上の左辺が任意の z に対して 0 になるためには、 $k' \equiv k'' \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ でなくてはならない。よって $n=1$ の時は正しい。

$n=2$ のとき、lemma 1 から、任意の $z_1, z_2 \in H_1$ に對し、

$$\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right]\left(\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \middle| 0\right) = \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k'_1 \\ k''_1 \end{smallmatrix}\right](z_1|0) \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k'_2 \\ k''_2 \end{smallmatrix}\right](z_2|0)$$

であるから、 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} k' \\ k'' \end{smallmatrix}\right](z|0)$ が恒等的に 0 であれば、 $k'_1 \equiv k''_1 \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ または、 $k'_2 \equiv k''_2 \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ が必要だったが、 $n=1$ の時の証明からわかる。 $k'_1 \equiv k''_1 \equiv \frac{1}{2}$ としてよい。

一方 $u = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば、lemma 2 から、

$\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} u_1 k' \\ u_2 k'' \end{smallmatrix}\right](z|0)$ が恒等的に 0 である。従って上と同様にして、 $k'_1 - k'_2 \equiv 2k''_1 + k''_2 \equiv \frac{1}{2}$ または、 $-k'_1 + 2k'_2 \equiv k''_1 + k''_2 \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ が必要だった。従って上とあ

わけて $k_2' \equiv 0, k_2'' \equiv \frac{1}{2}$ 又は $2k_2' \equiv 0, k_2'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

いずれにしても、結果はなりたつ。

$n > 2$ の時、帰納法で証明を完結する。

$\mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_1' \\ k_1'' \end{smallmatrix} \right] (z|0)$ が恒等的に 0 であるとせよ。

I) ある $i (1 \leq i \leq n)$ に対して、 $2k_i' \not\equiv 0$ 又は $2k_i'' \not\equiv 0$ 又は $2k_i' k_i'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ となる場合。 i は 1 とし
てよい。 lemma 1 から 任意の $z_1^* \in H_1, z_{n-1}^* \in H_{n-1}$ に
対し

$$\mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_1^* \\ k_1^* \end{smallmatrix} \right] (z_1^*|0) \mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_{n-1}' \\ k_{n-1}'' \end{smallmatrix} \right] (z_{n-1}^*|0) = 0$$

ところが、 $\mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_1^* \\ k_1^* \end{smallmatrix} \right] (z_1^*|0) = \mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_1' \\ k_1'' \end{smallmatrix} \right] (z_1^*|0)$ は恒等的には
0 でないから、 $\mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_{n-1}' \\ k_{n-1}'' \end{smallmatrix} \right] (z_{n-1}^*|0)$ が恒等的に 0 でなく
てはならない。よって帰納法の仮定から、

$2k_{n-1}' \equiv 2k_{n-1}'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^{n-1}} \quad 2k_{n-1}' k_{n-1}'' \not\equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ 。すると
 $k_j' \equiv k_j'' \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ なる $j (2 \leq j \leq n)$ がある。(さ
もないと $2k_{n-1}' k_{n-1}'' \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ となってしまう。) j
は 2 としてよい。再び lemma 1 から、

$$\mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_2^* \\ k_2^* \end{smallmatrix} \right] (z_2^*|0) \mathcal{J} \left[\begin{smallmatrix} k_n^* \\ k_n^* \end{smallmatrix} \right] (z_n^*|0) = 0$$

が任意の $z_2^* \in H_2$, $z_2^* \in H_{n-2}$ に対してなりたつ。と
 こらから、 $2^t R_2^{2'} R_2^{2''} \equiv 2^t R_2^{1'} R_2^{1''} - \frac{1}{2} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ であるから
 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{2'} \\ R_2^{2''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$ は恒等的には 0 でない。従って、
 $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{1'} \\ R_2^{1''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$ は恒等的に 0 ゆえ、 $2R_2^{1'} \equiv 2R_2^{1''} \equiv 0$ かつ
 $2R_2^{1'} R_2^{1''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ 。従って、 $2R_2^{1'} \equiv 2R_2^{1''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ かつ
 $2^t R_2^{1'} R_2^{1''} = 2R_2^{1'} R_2^{1''} + 2^t R_2^{1'} R_2^{1''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$ 。よってこの場
 合は正しい。

II) I でないとき、すなわち任意の i に対し

$R_i^{1'} \equiv R_i^{1''} \equiv \frac{1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ のとき。このとき n は奇数
 でなくてはならない。 n が偶数とすると、

$$\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{1'} \\ R_2^{1''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0) \mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{2'} \\ R_2^{2''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0) = 0 \quad \text{for any } z_2^* \in H_2, z_2^* \in H_{n-2}$$

であるが、帰納法の仮定から $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{1'} \\ R_2^{1''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$ も $\mathcal{J}\left[\begin{smallmatrix} R_2^{2'} \\ R_2^{2''} \end{smallmatrix}\right](z_2^*|0)$ も恒等的には 0 でない。これは矛盾であ
 る。従って n は奇数であり、このとき 明らか
 かに、 $2R_2^{1'} \equiv 2R_2^{1''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}^n}$ かつ $2^t R_2^{1'} R_2^{1''} \equiv 0 \pmod{\mathbb{Z}}$

(証明終)

*) See Igusa, J: Theta function Die Grundlehren der Math.

Wiss. Bd 194. Springer-Verlag, Berlin (1972) p.174 Theorem I