

n パラメータ非拡大半群の共通不動点集合

九州工業大学・工学部 鈴木 智成 (Tomonari SUZUKI)

1. 序

本稿では, 筆者の最近の論文 [16] に関する解説を書こうと考えている. この論文では, 解析数論の有名な結果である Kronecker の定理 (定理 3) を用いて n パラメータ非拡大半群の共通不動点集合に関する定理を得ている. 数論は筆者の専門外な為, 非常に初等的な解説も含まれるが, ご容赦願いたい.

本稿を通して, 以下の記号を用いる. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ そして $\mathbb{R}$ をそれぞれ自然数, 整数, 有理数, 実数全体からなる集合とする. $\mathbb{R}_+^n = [0, \infty)^n$ と置く. また, $\mathbb{R}^n$ における単位ベクトルを

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

というように置く ($1 \leq j \leq n$). この用法は, 通常よく用いられる記号の使い方である.

C を Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合とする. C 上の写像族 $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ が以下の条件を満たすとき, n パラメータ非拡大半群という.

- (i) 各 $p \in \mathbb{R}_+^n$ について, $T(p)$ は C 上の非拡大写像である, すなわち, すべての $x, y \in C$ について, $\|T(p)x - T(p)y\| \leq \|x - y\|$ が成立する
- (ii) すべての $p, q \in \mathbb{R}_+^n$ に対して, $T(p + q) = T(p) \circ T(q)$ が成立する
- (iii) すべての $x \in C$ に対して, $p \mapsto T(p)x$ は連続写像である

$\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ の共通不動点集合を $\bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^n} F(T(p))$ と書く. 1965 年, Browder は以下の共通不動点の存在定理を証明している. この定理は, 後に Bruck [4] によって一般化される.

定理 1 (Browder [2]). E が一様凸で C が有界ならば, $\bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^n} F(T(p))$ は空でない.

キーワード. n パラメータ非拡大半群, 共通不動点, Kronecker の定理.
住所. 〒 804-8550 北九州市戸畑区仙水町 1-1 九州工業大学工学部数学教室.
電子メール. suzuki-t@mns.kyutech.ac.jp.

Rodé [11] は Bochner 積分を用いて、以下の共通不動点への収束定理を証明した。

定理 2 (Rodé [11]). E が Hilbert 空間で C が有界であると仮定する。 $x \in C$ に対して、

$$\left\{ \frac{1}{t^n} \int_{[0,t]^n} T(p)x \, dp \right\}$$

は $t \rightarrow \infty$ のとき $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ の共通不動点へ弱収束する。

本稿では、通常の論文とは異なり、筆者の主観的なコメントも記述している。また、本稿で定義されない概念については、文献 [21, 22] 等を参照のこと。

2. KRONECKER の定理

本稿では、2種類の線形独立性を用いる。ベクトルの集合 $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^n$ が通常の意味で線形独立であるとは、

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \neq 0 \quad \text{および} \quad \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \dots + \lambda_n p_n = 0$$

を同時に満たす $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在しないことをいう。これに対して、実数の集合 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であるとは、

$$(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \neq 0 \quad \text{および} \quad \nu_1 \alpha_1 + \nu_2 \alpha_2 + \dots + \nu_n \alpha_n = 0$$

を同時に満たす $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{Z}^n$ が存在しないことをいう。これは、

$$(q_1, q_2, \dots, q_n) \neq 0 \quad \text{および} \quad q_1 \alpha_1 + q_2 \alpha_2 + \dots + q_n \alpha_n = 0$$

を同時に満たす $(q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{Q}^n$ が存在しないことと同値である。すなわち、この概念は $\mathbb{R}$ をスカラーを $\mathbb{Q}$ とする無限次元のベクトル空間と考えれば、通常の意味の線形独立性と一致する。例を2つ挙げる。

命題 1. γ が無理数であることの必要十分条件は、 $\{1, \gamma\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることである。

証明. γ を無理数とし、 $\nu_1 1 + \nu_2 \gamma = 0$ を仮定する ($\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{Z}$)。 $\nu_2 \neq 0$ のとき、 $\gamma = -\nu_1/\nu_2 \in \mathbb{Q}$ となって矛盾するので、 $\nu_2 = 0$ である。このとき、明らかに $\nu_1 = 0$ である。つまり、 $(\nu_1, \nu_2) = 0$ である。一方、 γ が有理数のときは、明らかに $\{1, \gamma\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立でない。 $\square$

命題 2. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{19}, \sqrt{21}, \sqrt{22}, \sqrt{23}, \sqrt{26}, \sqrt{29}, \sqrt{30}, \sqrt{31}, \sqrt{33}, \sqrt{34}, \sqrt{35}, \sqrt{37}, \sqrt{38}, \sqrt{39}, \sqrt{41}, \sqrt{42}, \sqrt{43}, \sqrt{46}, \sqrt{47}, \sqrt{51}, \sqrt{53}, \sqrt{55}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である。

命題の意味は、「相異なる素数の積のルートから構成される集合は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である」ということである。体論の知識を全く用いない証明を与える。もちろん、「全く用いない」と言うのは表面上のことで、証明のアイデアは完全に体論の考え方を元になっている。まず、次の補助定理から証明を始める。

補助定理 1. p を素数, r を p を素因数として持たない自然数とするとき,

$$(1) \quad \sqrt{p} = \sqrt{r}q_1$$

を満たす $q_1 \in \mathbb{Q}$ は存在しない。

証明. 存在した仮定して矛盾を導く。分母を払って自乗することより $\nu_2^2 p = r\nu_1^2$ という形の式を得る。ここで, $(\nu_1, \nu_2) \in \mathbb{Z}^2$ である。また ν_2 は (1) の右辺の分母であるので, $\nu_2 \neq 0$ である。従って $\nu_1 \neq 0$ である。ここで両辺の素因数分解の p に関する部分に着目すると, 左辺は p の奇数乗であるのに対して, 右辺は p の偶数乗となっていることに気づく。これは矛盾である。 $\square$

この補助定理において, $p = 2$ および $r = 1$ とすると, 以下を得る。

補助定理 2. $\{1, \sqrt{2}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である。

補助定理 1 と 2 により, 以下を得る。

補助定理 3. p を 3 以上の素数, r を p を素因数として持たない自然数とするとき,

$$(2) \quad \sqrt{p} = \sqrt{r}(q_1 + q_2\sqrt{2})$$

を満たす $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ は存在しない。

証明. 存在した仮定して矛盾を導く。 $q_1 = 0$ とすると補助定理 1 に矛盾し, $q_2 = 0$ とすると再び補助定理 1 に矛盾することに注意する。つまり, $q_1 \neq 0$ かつ $q_2 \neq 0$ である。(2) を自乗すると,

$$p = r(q_1^2 + 2q_2^2 + 2q_1q_2\sqrt{2})$$

となるが, この式の $\sqrt{2}$ の係数 $r2q_1q_2$ は 0 でない。すなわち $\{1, \sqrt{2}\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることに矛盾する。 $\square$

この補助定理において, $p = 3$ および $r = 1$ とすると, 以下を得る。

補助定理 4. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である。

補助定理の証明を続ける。

補助定理 5. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である。

証明. $(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) \in \mathbb{Z}^4$ および $\nu_1 + \nu_2\sqrt{2} + \nu_3\sqrt{3} + \nu_4\sqrt{6} = 0$ を仮定する. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であるから, $\nu_4 = 0$ を示せばよい. そこで $\nu_4 \neq 0$ を仮定する. このとき, 補助定理 2 より $\nu_3 + \nu_4\sqrt{2} \neq 0$ が言えるので,

$$\sqrt{3} = \frac{-\nu_1 - \nu_2\sqrt{2}}{\nu_3 + \nu_4\sqrt{2}}$$

と変形できる. 分母分子に $\nu_3 - \nu_4\sqrt{2} (\neq 0)$ を乗ずると分母が整数になる. すなわち $\sqrt{3} = q_1 + q_2\sqrt{2}$ と書けることになるが, これは補助定理 3 に矛盾する. よって $\nu_4 = 0$ を得る. $\square$

補助定理 6. p を 5 以上の素数, r を p を素因数として持たない自然数とするとき,

$$(3) \quad \sqrt{p} = \sqrt{r}(q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6})$$

を満たす $(q_1, q_2, q_3, q_4) \in \mathbb{Q}^4$ は存在しない.

証明. 存在したと仮定して矛盾を導く. $(q_1, q_2) = 0$ とすると補助定理 3 に矛盾し, $(q_3, q_4) = 0$ とすると再び補助定理 3 に矛盾することに注意する. つまり, $(q_1, q_2) \neq 0$ かつ $(q_3, q_4) \neq 0$ である. よって, $q_1 + q_2\sqrt{2} \neq 0$ かつ $q_3 + q_4\sqrt{2} \neq 0$ である. (3) を自乗すると,

$$p = r \left((q_1 + q_2\sqrt{2})^2 + 3(q_3 + q_4\sqrt{2})^2 + 2(q_1 + q_2\sqrt{2})(q_3 + q_4\sqrt{2})\sqrt{3} \right)$$

となるが, この式の $\sqrt{3}$ の係数もしくは $\sqrt{6}$ の係数は 0 でない. すなわち $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることに矛盾する. $\square$

この補助定理において, $p = 5$ および $r = 1$ とすると, 以下を得る.

補助定理 7. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{5}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

続いて以下を示す

補助定理 8. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{5}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である.

証明. $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_8) \in \mathbb{Z}^8$ および $\nu_1 + \nu_2\sqrt{2} + \dots + \nu_8\sqrt{30} = 0$ を仮定する. $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{5}\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であるから, $(\nu_6, \nu_7, \nu_8) = 0$ を示せばよい. そのために $(\nu_6, \nu_7, \nu_8) \neq 0$ を仮定する. このとき, 補助定理 5 より,

$$\sqrt{5} = \frac{-\nu_1 - \nu_2\sqrt{2} - \nu_3\sqrt{3} - \nu_4\sqrt{6}}{\nu_5 + \nu_6\sqrt{2} + \nu_7\sqrt{3} + \nu_8\sqrt{6}}$$

と変形できる. 分母分子に $\nu_5 + \nu_6\sqrt{2} - \nu_7\sqrt{3} - \nu_8\sqrt{6} (\neq 0)$ を乗ずると

$$\sqrt{5} = \frac{\nu'_1 + \nu'_2\sqrt{2} + \nu'_3\sqrt{3} + \nu'_4\sqrt{6}}{\nu'_5 + \nu'_6\sqrt{2}}$$

という形の式になる. 再び分母分子に $\nu'_5 - \nu'_6\sqrt{2}$ ($\neq 0$) を乗ずると

$$\sqrt{5} = \frac{\nu''_1 + \nu''_2\sqrt{2} + \nu''_3\sqrt{3} + \nu''_4\sqrt{6}}{\nu''_5}$$

という形の式になる. 分母が整数になるので, $\sqrt{5} = q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6}$ と書けることになるが, これは補助定理 6 に矛盾する. よって $(\nu_6, \nu_7, \nu_8) = 0$ を得る. $\square$

この議論を繰り返すことにより, 命題 2 を証明することができる.

さて Kronecker の定理を述べる. Kronecker は約 120 年前, 以下の定理を証明した. この定理に関しては文献 [7] 等を参照のこと.

定理 3 (Kronecker, 1884). $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ を $\{1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立となる実数とする. このとき, 集合

$$\left\{ \left(k\alpha_1 - [k\alpha_1], k\alpha_2 - [k\alpha_2], \dots, k\alpha_n - [k\alpha_n] \right) : k \in \mathbb{N} \right\}$$

の閉包は $[0, 1]^n$ となる. ここで $[]$ はガウス記号を意味する. すなわち, $k\alpha_j - [k\alpha_j]$ は $k\alpha_j$ の小数部分となる.

「数学の定理は永遠に真理であり, 時代を越えて有用である」とはときどき耳にする言葉である. 実際に, 19 世紀に証明された Kronecker 定理を使ってみて, 筆者はこの言葉の意味を再認識した.

3. 共通不動点

この節では, 「 C は Banach 空間 E の空でない閉凸部分集合である」を仮定する.

最近 Suzuki は, Kronecker の定理を本質的に用いて, 以下の定理を得た.

定理 4 ([16]). $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ を C 上の n パラメータ非拡大半群とする. ベクトルの集合 $\{p_1, p_2, p_3, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^n$ は通常の意味で線形独立であるとし, 実数の集合 $\{1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であるとする.

$$p_0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_n p_n \in \mathbb{R}_+^n$$

とベクトル p_0 を定義する. このとき

$$\bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^n} F(T(p)) = F(T(p_0)) \cap F(T(p_1)) \cap \dots \cap F(T(p_n))$$

が成立する.

この定理と命題 2 により以下を得る.

定理 5 ([16]). $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ を C 上の n パラメータ非拡大半群とする. α_j を j 番目の素数の平方根とし, $p_0 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n \in \mathbb{R}_+^n$ とベクトル p_0 を定義する. つまり,

$$p_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots, \sqrt{n \text{ 番目の素数}}) \in \mathbb{R}_+^n$$

とする. このとき

$$\bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^n} F(T(p)) = F(T(p_0)) \cap F(T(e_1)) \cap \cdots \cap F(T(e_n))$$

が成立する.

以下は余談. 筆者が論文 [16] を書いて一番楽しかったのは, この定理を記述しているときである. というのも, 筆者の論文に「素数」という単語が出現するとは夢にも思っていなかったからである. 同時に, 「解析学を専門とする自分には, 素数は関係ない」と決めつけていた (ような) 自分に対して, 反省の念が湧いた. 今現在も, 「自分の研究範囲を狭めるような考え方をしてはいけない」と思いながら, 筆者は研究を続けている.

本題に戻る. 定理 4 において, $n = 1$ とすると, 以下を得る.

定理 6 ([15]). $\{T(t) : t \geq 0\}$ を C 上の 1 パラメータ非拡大半群とする. $\alpha, \beta > 0$ は $\alpha/\beta \notin \mathbb{Q}$ を満たすと仮定する. このとき

$$\bigcap_{t \geq 0} F(T(t)) = F(T(\alpha)) \cap F(T(\beta))$$

が成立する.

証明. $p_1 = \beta$ とおく. $p_1 \neq 0$ なので, $\{p_1\}$ は通常の意味で線形独立である. $\alpha_1 = \alpha/\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とおく. 命題 1 により, $\{1, \alpha_1\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立である. $p_0 = \alpha_1 p_1$ とおくと, 定理 4 により

$$\bigcap_{t \geq 0} F(T(t)) = F(T(p_0)) \cap F(T(p_1)) = F(T(\alpha)) \cap F(T(\beta))$$

を得る. □

文献 [15] における定理 6 の証明は非常に初等的である. 初等的で簡単ではあるのだが, 何が本質なのか, 証明した筆者自身がよく分かっていなかった. n パラメータという少し難しい設定にして考えてみて, Kronecker の定理が本質だということに気づくことができた. 少し難しい — つまり, 抽象的な — 設定にすると, 返って本質が分かるという現象は数学の世界では非常によくある逆転現象だが, 今回の結果もその 1 つであると筆者は考えている.

定理 4 と 6 の特徴は, 無限個の写像の共通不動点が有限個の写像の共通不動点と一致することである. E が一様凸 Banach 空間のときは, 以

下に示すように無限個の写像の共通不動点がある 1 つの写像の不動点と一致する.

定理 7 ([16]). $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}, p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は定理 4 と同じであるとする. C 上の非拡大写像 S を

$$Sx = \frac{1}{n+1} \left(T(p_0)x + T(p_1)x + \dots + T(p_n)x \right)$$

と定義する. E が一様凸でかつ C が有界のとき,

$$\bigcap_{p \in \mathbb{R}_+^n} F(T(p)) = F(S)$$

が成立する.

これらの定理により, 従来の結果 [1, 3, 5, 6, 10, 12, 13, 18, 20, 24] 等を用いて, Bochner 積分を用いない $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ の共通不動点への収束定理を証明することができる. 本稿ではこの中から, 最近得られた結果 [13, 18, 19] から導かれる 2 つの収束定理を挙げる.

定理 8 ([16]). C がコンパクトであることを仮定する. $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}, p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は定理 4 と同じであるとする. 数列 $\{\alpha_k\} \subset [0, 1/2]$ は

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \alpha_k > 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = 0$$

を満たすとする. 点列 $\{x_k\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum_{j=1}^n \alpha_k^j \right) T(p_0)x_k + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n \alpha_k^j T(p_j)x_k \right) + \frac{1}{2} x_k$$

で定義する. このとき $\{x_k\}$ は $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ の共通不動点へ収束する.

定理 9 ([18, 19]). E は Hilbert 空間で C は有界であると仮定する. $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}, p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は定理 4 と同じであるとする. 非拡大写像 S を定理 7 のように定義する. Φ を C 上の縮小写像とする. すなわち, すべての $x, y \in C$ に対して

$$\|\Phi x - \Phi y\| \leq r \|x - y\|$$

となる $r \in [0, 1)$ の存在を仮定する. 数列 $\{\alpha_k\} \subset [0, 1]$ は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$$

を満たすとする. $\lambda \in (0, 1)$ を固定し, 点列 $\{x_k\} \subset C$ を $x_1 \in C$ および

$$x_{k+1} = \alpha_k \Phi(x_k) + (1 - \alpha_k) (\lambda Sx_k + (1 - \lambda) x_k)$$

で定義する. このとき $\{x_k\}$ は $\{T(p) : p \in \mathbb{R}_+^n\}$ の共通不動点へ強収束する.

定理 6 における α と β は対等な関係である. 一方, 定理 4 における p_0 とそれ以外の $p_1, \dots, p_n$ の関係は対等でないように見える. しかし, 次の命題が示すように, この関係は対等である.

命題 3. $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ は定理 4 と同じであるとする. このとき, $\{p_0, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ は通常の意味で線形独立である. そして, $\{1, \beta_0, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であり,

$$p_1 = \beta_0 p_0 + \beta_2 p_2 + \beta_3 p_3 + \dots + \beta_n p_n$$

と書くことができる実数 $\beta_0, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n$ が存在する.

証明. $n = 1$ のときは自明なので, $n \geq 2$ とする. まず,

$$\lambda_0 p_0 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + \dots + \lambda_n p_n = 0$$

を仮定する. p_0 の定義により, この式は次ように変形できる.

$$\lambda_0 \alpha_1 p_1 + (\lambda_0 \alpha_2 + \lambda_2) p_2 + (\lambda_0 \alpha_3 + \lambda_3) p_3 + \dots + (\lambda_0 \alpha_n + \lambda_n) p_n = 0$$

ここで $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ は通常の意味で線形独立であるので,

$$\lambda_0 \alpha_1 = \lambda_0 \alpha_2 + \lambda_2 = \lambda_0 \alpha_3 + \lambda_3 = \dots = \lambda_0 \alpha_n + \lambda_n = 0$$

を得る. $\alpha_1 \neq 0$ より, $\lambda_0 = 0$ を得る. したがって $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ である. これは $\{p_0, p_2, p_3, \dots, p_n\}$ が通常の意味で線形独立であることを意味する. 次に, p_0 の定義式を変形すると

$$p_1 = \frac{1}{\alpha_1} p_0 + \frac{-\alpha_2}{\alpha_1} p_2 + \frac{-\alpha_3}{\alpha_1} p_3 + \dots + \frac{-\alpha_n}{\alpha_1} p_n$$

となる. そこで

$$\beta_0 = \frac{1}{\alpha_1}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \beta_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_1}, \quad \dots, \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\alpha_1}$$

とおく. 線形独立性を示すために,

$$\nu_1 + \nu_0 \beta_0 + \nu_2 \beta_2 + \nu_3 \beta_3 + \dots + \nu_n \beta_n = 0$$

を仮定する. 両辺に $\alpha_1 \neq 0$ を乗ずると

$$\nu_1 \alpha_1 + \nu_0 + (-\nu_2) \alpha_2 + (-\nu_3) \alpha_3 + \dots + (-\nu_n) \alpha_n = 0$$

を得る. $\{1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ は $\mathbb{Q}$ 上線形独立であるから,

$$\nu_1 = \nu_0 = -\nu_2 = -\nu_3 = \dots = -\nu_n = 0$$

を得る. したがって $\nu_2 = \nu_3 = \dots = \nu_n = 0$ である. これは $\{1, \beta_0, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n\}$ が $\mathbb{Q}$ 上線形独立であることを意味する. $\square$

謝辞

最後になりましたが, Kronecker の定理に関するアドバイスを下さった新潟大学の秋山茂樹氏に心より感謝致します.

参考文献

- [1] J. B. Baillon, "Un théorème de type ergodique pour les contractions non linéaires dans un espace de Hilbert", C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A-B, **280** (1975), 1511–1514.
- [2] F. E. Browder, "Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space", Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **54** (1965), 1041–1044.
- [3] ———, "Convergence of approximants to fixed points of nonexpansive nonlinear mappings in Banach spaces", Arch. Ration. Mech. Anal., **24** (1967), 82–90.
- [4] R. E. Bruck, "A common fixed point theorem for a commuting family of nonexpansive mappings", Pacific J. Math., **53** (1974), 59–71.
- [5] ———, "A simple proof of the mean ergodic theorem for nonlinear contractions in Banach spaces", Israel J. Math., **32** (1979), 107–116.
- [6] B. Halpern, "Fixed points of nonexpanding maps", Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 957–961.
- [7] G. H. Hardy and E. M. Wright, "An introduction to the theory of numbers", Fifth edition, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.
- [8] M. A. Krasnosel'skiĭ, "Two remarks on the method of successive approximations" (in Russian), Uspehi Mat. Nauk **10** (1955), 123–127.
- [9] S. Ishikawa, "Common fixed points and iteration of commuting nonexpansive mappings", Pacific J. Math., **80** (1979), 493–501.
- [10] S. Reich, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces", J. Math. Anal. Appl., **67** (1979), 274–276.
- [11] G. Rodé, "An ergodic theorem for semigroups of nonexpansive mappings in a Hilbert space", J. Math. Anal. Appl., **85** (1982), 172–178.
- [12] T. Suzuki, "Strong convergence theorem to common fixed points of two nonexpansive mappings in general Banach spaces", J. Nonlinear Convex Anal., **3** (2002), 381–391.
- [13] ———, "Strong convergence theorems for infinite families of nonexpansive mappings in general Banach spaces", Fixed Point Theory Appl., **2005** (2005), 103–123.
- [14] ———, "Strong convergence of Krasnoselskii and Mann's type sequences for one-parameter nonexpansive semigroups without Bochner integrals", J. Math. Anal. Appl., **305** (2005), 227–239.
- [15] ———, "The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of mappings is $F(T(1)) \cap F(T(\sqrt{2}))$ ", Proc. Amer. Math. Soc., **134** (2006), 673–681.

- [16] ———, “The set of common fixed points of an n -parameter continuous semigroup of mappings”, to appear in *Nonlinear Anal.*
- [17] ———, “The set of common fixed points of a one-parameter continuous semigroup of nonexpansive mappings is $F(\frac{1}{2}T(1) + \frac{1}{2}T(\sqrt{2}))$ in strictly convex Banach spaces”, to appear in *Taiwanese J. Math.*
- [18] ———, “Sufficient and necessary condition for Halpern’s type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings”, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*
- [19] ———, “Moudafi’s viscosity approximations”, submitted.
- [20] ———, “Common fixed points of commutative semigroups of nonexpansive mappings”, arXiv math.FA 0404428 v1 23 Apr 2004.
- [21] 高橋涉, “非線形関数解析学”, 近代科学社 (1988).
- [22] ———, “凸解析と不動点近似”, 横浜図書 (2000).
- [23] W. Takahashi, “*Nonlinear Functional Analysis*”, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.
- [24] R. Wittmann, “Approximation of fixed points of nonexpansive mappings”, *Arch. Math. (Basel)*, **58** (1992), 486–491.