

二層流体系におけるソリトンの相互作用

九大総理工 辻 英一 (Hidekazu Tsuji)
九大応力研 及川正行 (Masayuki Oikawa)

1. 二層流体系の基礎方程式

図 1 のような二層流体系を考える. ρ_1, h_1 を上層の流体の密度と厚さ, ρ_2, h_2

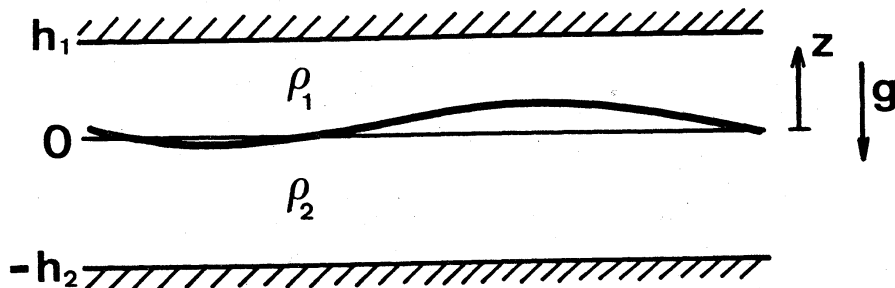


図 1. 二層流体系

を下層の流体の密度と厚さとする. 流体は非粘性, 非圧縮とし, 流れは渦無しと仮定する. また, 流体の上下の境界は剛体壁であるとする. ここでは長波長の波を考える. 長波長領域での線形分散関係は

$$\omega^2 = V^2 |k|^2 \left[1 - \frac{\gamma(1+\gamma\sigma)}{3(\gamma+\sigma)} (|k|h_1)^2 + \dots \right] \quad (1)$$

で与えられる. ただし, k は波数, V は長波長極限での位相スピードで

$$V = \left(\frac{gh_1\gamma(\sigma-1)}{\gamma+\sigma} \right)^{1/2}, \quad g : \text{重力加速度} \quad (2)$$

で与えられ, γ は深さの比, σ は密度比, すなわち

$$\gamma \equiv \frac{h_2}{h_1}, \quad \sigma \equiv \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (>1) \quad (3)$$

である. また, ϕ_1, ϕ_2 をそれぞれ上層, 下層での速度ポテンシャル, ζ を界面変位とすると, 線形長波長近似では

$$\phi_1 \sim \frac{V\zeta}{|k|h_1}, \quad \phi_2 \sim \frac{V\zeta}{|k|h_2}, \quad (4)$$

である。そこで、次のように無次元化する。

$$\begin{aligned}\zeta &= a\zeta', \quad \mathbf{x} = (x, y) = \ell\mathbf{x}' = \ell(x', y'), \quad z = h_1 z', \\ t &= \frac{\ell}{V}t', \quad \phi_1 = \frac{V a \ell}{h_1}\phi'_1, \quad \phi_2 = \frac{V a \ell}{h_2}\phi'_2.\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、 a は界面変位の代表振幅、 ℓ は代表的な水平スケールで、

$$\varepsilon \equiv \frac{a}{h_1} \ll 1, \quad \delta \equiv \frac{h_1}{\ell} \ll 1 \quad (6)$$

$(h_1 \sim h_1 + h_2 \text{ とする})$

とする。以下では無次元量の " ' " を省略する。このとき、基礎方程式及び境界条件は次のように書ける。

$$\delta^2 \Delta \phi_1 + \phi_{1zz} = 0, \quad \varepsilon \zeta < z < 1, \quad (7a)$$

$$\delta^2 \Delta \phi_2 + \phi_{2zz} = 0, \quad -\gamma < z < \varepsilon \zeta, \quad (7b)$$

$$\phi_{1z} = 0, \quad z = 1, \quad (7c)$$

$$\phi_{2z} = 0, \quad z = -\gamma, \quad (7d)$$

$$\zeta_t + \varepsilon \nabla \phi_1 \cdot \nabla \zeta = \delta^{-2} \phi_{1z}, \quad z = \varepsilon \zeta, \quad (7e)$$

$$\zeta_t + \varepsilon \gamma^{-1} \nabla \phi_2 \cdot \nabla \zeta = \delta^{-2} \gamma^{-1} \phi_{2zz}, \quad z = \varepsilon \zeta, \quad (7f)$$

$$\begin{aligned}\phi_{1t} + \varepsilon (\nabla \phi_1)^2 / 2 + \varepsilon \delta^{-2} (\phi_{1z})^2 / 2 - (\gamma + \sigma) \zeta / \gamma, \\ = \sigma \gamma^{-1} \phi_{2t} + \varepsilon \sigma \gamma^{-2} (\nabla \phi_2)^2 / 2 + \varepsilon \delta^{-2} \sigma \gamma^{-2} (\phi_{2z})^2 / 2, \quad z = \varepsilon \zeta.\end{aligned}\quad (7g)$$

ここで、 $\nabla \equiv (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ である。(7a) ~ (7d) から

$$\phi_1 = f_1(\mathbf{x}, t) - \frac{\delta^2}{2} (\Delta f_1)(z-1)^2 + \frac{\delta^4}{4!} (\Delta^2 f_1)(z-1)^4 - \dots, \quad (8a)$$

$$\phi_2 = f_2(\mathbf{x}, t) - \frac{\delta^2}{2} (\Delta f_2)(z+\gamma)^2 + \frac{\delta^4}{4!} (\Delta^2 f_2)(z+\gamma)^4 - \dots, \quad (8b)$$

を得る。これらを界面での境界条件 (7e) ~ (7g) に代入すれば

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \Delta f_1 + \varepsilon \nabla \cdot (\zeta \nabla f_1) + \frac{\delta^2}{6} \Delta^2 f_1 = O(\varepsilon \delta^2), \quad (9a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Delta f_2 + \frac{\varepsilon}{\gamma} \nabla \cdot (\zeta \nabla f_2) - \frac{\delta^2 \gamma^2}{6} \Delta^2 f_2 = O(\varepsilon \delta^2), \quad (9b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\sigma}{\gamma} \frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\gamma + \sigma}{\gamma} \zeta + \frac{\varepsilon}{2} (\nabla f_1)^2 - \frac{\varepsilon \sigma}{2 \gamma^2} (\nabla f_2)^2 - \frac{\delta^2}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f_1 \\ + \frac{\delta^2 \gamma \sigma}{2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta f_2 = O(\varepsilon \delta^2).\end{aligned}\quad (9c)$$

2. KdV 近似と臨界レベル

非線形性と分散性をバランスさせるために

$$\delta^2 = \varepsilon \quad (10)$$

とし、一方向 (x の正方向とする) 伝播のみを考える. そのために

$$\xi = x - t, \quad \tau = \varepsilon t \quad (11)$$

を導入し,

$$\zeta = \zeta^{(0)}(\xi, \tau) + \varepsilon \zeta^{(1)}(\xi, \tau) + \dots \quad (12a)$$

$$f_i = f_i^{(0)}(\xi, \tau) + \varepsilon f_i^{(1)}(\xi, \tau) + \dots, \quad (i = 1, 2) \quad (12b)$$

と展開すると, よく知られているように, KdV 方程式

$$\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{3p}{2} \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{q}{6} \frac{\partial^3 \zeta^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (13)$$

を得る.¹⁾⁻³⁾ ただし,

$$p = \frac{\sigma - \gamma^2}{\gamma(\gamma + \sigma)}, \quad q = \frac{\gamma(1 + \gamma\sigma)}{\gamma + \sigma}. \quad (14)$$

ここで, $\xi \rightarrow +\infty$ あるいは $\xi \rightarrow -\infty$ に対して, $\zeta^{(0)}, \partial f_1^{(0)}/\partial \xi, \partial f_2^{(0)}/\partial \xi \rightarrow 0$ を仮定しており, このとき

$$\frac{\partial f_1^{(0)}}{\partial \xi} = -\frac{\partial f_2^{(0)}}{\partial \xi} = -\zeta^{(0)} \quad (15)$$

が成立している.

$\gamma = \gamma_c \equiv \sqrt{\sigma}$ (i.e. $h_2/h_1 = \sqrt{\rho_2/\rho_1}$) のとき, $p = 0$ であって, $\gamma < \gamma_c$ のときには $p > 0$, $\gamma > \gamma_c$ のときには $p < 0$ である. $\gamma = \gamma_c$ に対応する (仮想的な) 界面の位置を臨界レベルと呼ぶことにする. (13) のソリトン解は図 2 のように臨界レベル側に向かって膨んだ形をとる.

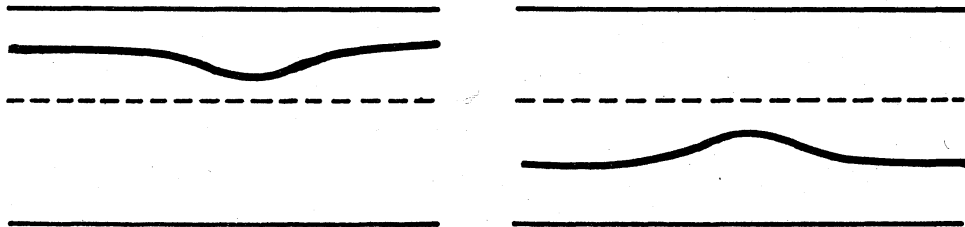


図 2. 左図は $\gamma > \gamma_c$ ($p < 0$), 右図は $\gamma < \gamma_c$ ($p > 0$) の場合である. 太線は密度界面, 破線は臨界レベルを表わす.

3. EKdV 方程式とその解

$\gamma = \gamma_c$ の近傍では分散と非線形のバランスは (13) とは変わってくる.

$$\gamma = \gamma_c + \varepsilon\beta, \quad (16)$$

$$\delta = \varepsilon \quad (17)$$

とし, この場合には

$$\xi = x - t, \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (18)$$

を導入して, やはり (12a, b) と展開すれば,

$$\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{3p_c}{2} \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} - 3r_c \zeta^{(0)2} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 \zeta^{(0)}}{\partial \xi^3} = 0, \quad (19a)$$

$$p_c = -2\beta\gamma_c^{-1}(1 + \gamma_c)^{-1}, \quad q_c = 1 - \gamma_c + \gamma_c^2, \quad r_c = \gamma_c^{-1} \quad (19b)$$

を得る.^{1), 2)} ここではこれを EKdV 方程式と呼ぶことにする. この方程式は逆散乱法で解くことができる.^{4), 2)} Perelman 達⁴⁾ は MKdV 方程式 ((19a) で $\beta = 0$ とした形) の無限遠で 0 でないという境界値問題の研究から EKdV 方程式の可解性を見出した. また, Wadati⁵⁾ は非線形格子のモデルとして EKdV 方程式 (ただし, 3 次の非線形項の符号が (19a) と異なる) を調べ, 逆散乱による解法や Bäcklund 変換等を与えている. 新しい話ではないが, (19a) の解について簡単にまとめておく.

$$X = \xi, \quad T = q_c \tau / 6, \quad u = \zeta^{(0)} \quad (20)$$

$$P = \frac{3p_c}{2q_c}, \quad Q = \frac{3r_c}{q_c}$$

と変換すると, (19a) は

$$u_T + 6Pu u_X - 6Qu^2 u_X + u_{XXX} = 0, \quad (Q > 0) \quad (21)$$

となる. P の符号の反転は u の符号の反転に対応するから, $P \geq 0$ の場合だけ考えておけばよい. さらに, 変換

$$u = Q^{-1/2} \partial_X \log(g/f) \quad (22)$$

によって, (21) は双一次形式

$$(D_T + D_X^3)g \cdot f = 0 \quad (23a)$$

$$(D_X^2 - (P/\sqrt{Q})D_X)g \cdot f = 0 \quad (23b)$$

となる. ただし,

$$D_X^n g \cdot f = [(\partial/\partial X - \partial/\partial X')^n g(X) f(X')]_{X'=X}.$$

ソリトン解は形式的な摂動展開によって見出され, 1-ソリトン解は

$$u = \frac{1}{\sqrt{Q}} \frac{\partial}{\partial X} \log \frac{1 + G_0 e^{-2\eta}}{1 + e^{-2\eta}} = \frac{\kappa}{\sqrt{Q}} [\tanh(\eta + \delta) - \tanh \eta], \quad (24)$$

$$\eta = \kappa(X - X_0 - 4\kappa^2 T), \quad G_0 = \frac{P - 2\kappa\sqrt{Q}}{P + 2\kappa\sqrt{Q}} = e^{-2\delta}. \quad (25)$$

最大振幅は $a = (P - \sqrt{P^2 - 4\kappa^2 Q})/Q$ で与えられ, $\kappa \leq P/(2\sqrt{Q})$ である. δ を大きくすると, ソリトンの幅はいくらでも広がる. $\delta \rightarrow +\infty$ i.e. $\kappa \rightarrow P/(2\sqrt{Q})$ の極限では, ショックタイプの解

$$u = \frac{\kappa}{\sqrt{Q}} (1 - \tanh \eta) = \frac{P}{2Q} (1 - \tanh \eta) \quad (26)$$

を得る. 最大振幅 a が P/Q を超えないということは, ソリトンを形成する界面が臨界レベルと交わらないということの意味する.

2-ソリトン解も容易に得られ, その相互作用は KdV ソリトンの場合と同様である. KdV の場合とちがって EKdV の場合はショックとソリトンの相互作用が考えられる. これは $\kappa_1 = P/(2\sqrt{Q}) > \kappa_2$ とすると, 次のように書かれる.

$$u = \frac{2}{\sqrt{Q}} \left\{ \frac{\kappa_1 e^{-2\eta_1} + \kappa_2 e^{-2\eta_2} + (\kappa_1 + \kappa_2) F_{12} e^{-2(\eta_1 + \eta_2)}}{1 + e^{-2\eta_1} + e^{-2\eta_2} + F_{12} e^{-2(\eta_1 + \eta_2)}} - \frac{\kappa_2 G_{02} e^{-2\eta_2}}{1 + G_{02} e^{-2\eta_2}} \right\}, \quad (27a)$$

$$\eta_1 = \kappa_1(X - X_{01} - 4\kappa_1^2 T), \quad \eta_2 = \kappa_2(X - X_{02} - 4\kappa_2^2 T), \quad (27b)$$

$$F_{12} = e^{-2\Delta}, \quad G_{02} = e^{-2\delta_2}, \quad \Delta = 2\delta_2 = \log[(\kappa_1 + \kappa_2)/(\kappa_1 - \kappa_2)]. \quad (27c)$$

これらの漸近形は

$$u \sim \begin{cases} (P/2Q)[1 - \tanh(\eta_1 + \Delta)] & (\eta_1 = \text{一定}, T \rightarrow -\infty \text{ のとき}), \\ (\kappa_2/\sqrt{Q})[\tanh(\eta_2 + \delta_2) - \tanh \eta_2] & (\eta_2 = \text{一定}, T \rightarrow -\infty \text{ のとき}), \end{cases} \quad (28a)$$

$$u \sim \begin{cases} (P/2Q)[1 - \tanh(\eta_1 + \Delta)] & (\eta_1 = \text{一定}, T \rightarrow -\infty \text{ のとき}), \\ (\kappa_2/\sqrt{Q})[\tanh(\eta_2 + \delta_2) - \tanh \eta_2] & (\eta_2 = \text{一定}, T \rightarrow -\infty \text{ のとき}), \end{cases} \quad (28b)$$

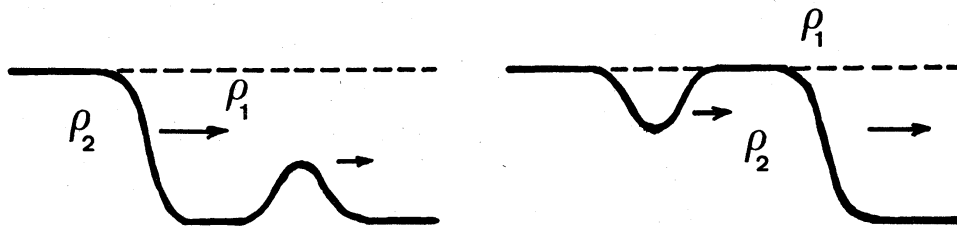


図3. EKdV 方程式のショックによるソリトンの追い越し.

ソリトンは追い越された後, 反転する. 左図は追い越し前, 右図は追い越し後. 太線は密度界面, 破線は臨界レベルを表わす

$$u \sim \begin{cases} (P/2Q)[1 - \tanh \eta_1] & (\eta_1 = \text{一定}, T \rightarrow +\infty \text{ のとき}), \\ P/Q - (\kappa_2/\sqrt{Q})[\tanh(\eta_2 + \Delta) - \tanh(\eta_2 + \delta_2)] & (\eta_2 = \text{一定}, T \rightarrow +\infty \text{ のとき}) \end{cases} \quad (29a)$$

$$u \sim \begin{cases} (P/2Q)[1 - \tanh \eta_1] & (\eta_1 = \text{一定}, T \rightarrow +\infty \text{ のとき}), \\ P/Q - (\kappa_2/\sqrt{Q})[\tanh(\eta_2 + \Delta) - \tanh(\eta_2 + \delta_2)] & (\eta_2 = \text{一定}, T \rightarrow +\infty \text{ のとき}) \end{cases} \quad (29b)$$

となる (図 3 参照) .

4. 異なる方向に伝播するソリトンの相互作用

ここでは異なる方向に伝播するソリトンの相互作用を考える. 最初に γ が γ_c に近くない場合, 次に γ が γ_c に近い場合を考える.

4.1. γ が γ_c に近くない場合

この場合事柄はすべて浅水波の場合と同様であると予想される. 実際, 方程式系 (9a ~ c) は浅水波と同じ形の方程式に帰着される. まず, $\varepsilon \sim \delta^2$ に注意する.

$$g = f_1 + f_2, \quad h = (\sigma f_2 - \gamma f_1) / (\gamma + \sigma) \quad (30)$$

と変換して, (9) を ζ, g, h に関する方程式に書き換える. その結果, $g \sim O(\varepsilon)$ と考えることができ, この事実を用いて g を消去すれば, $O(\varepsilon^2), O(\varepsilon\delta^2)$ の項を無視した近似で

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \Delta h + \varepsilon p \nabla \cdot (\zeta \nabla h) - \frac{\delta^2}{6} q \Delta^2 h = 0, \quad (31a)$$

$$(h - \frac{\delta^2}{2} q \Delta h)_t + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} p (\nabla h)^2 = 0 \quad (31b)$$

を得る. ここで p, q は (14) で与えられる. $\varepsilon p \rightarrow \varepsilon, \delta^2 q \rightarrow \delta^2$ という置き換えをすれば, (31) は Funakoshi⁶⁾ が浅水波のマッハ反射の計算において用いた基礎方程式となる. 従って, この場合には浅水波と同様, ソリトン共鳴^{7), 8)} やマッハ反射^{6), 7)} が起ると考えられる.

2つのソリトンの伝播方向が近くなければ, それらの相互作用は摂動法で扱うことができ, 漸近的には相互作用の効果は位相のずれとしてあらわれる.^{7), 9)} 2つのソリトンの伝播方向が近いときには, それらの相互作用は KP 方程式¹⁰⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial x} + \frac{3}{2} \varepsilon p \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial x} + \frac{\delta^2}{6} q \frac{\partial^3 \zeta^{(0)}}{\partial x^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta^{(0)}}{\partial y^2} = 0 \quad (32)$$

によって記述される. ここで, $\zeta = \zeta^{(0)} + \varepsilon \zeta^{(1)} + \dots$ である. 2つのソリトンの振幅を a_1, a_2 とし, それらの伝播方向のなす角を ψ とすれば, (32) によれば, ソリトン共鳴が起る条件は

$$3\varepsilon p(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \leq \tan^2 \psi \leq 3\varepsilon p(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2})^2 \quad (33)$$

で与えられる.

4.2. γ が γ_c に近い場合 ($\gamma = \gamma_c + \varepsilon\beta$)

この場合のソリトンの2次元的相互作用, 特にソリトン共鳴が起るかどうかといったことに興味があり, この研究の元来の目的はこの点にあるが, まだ, この点に

関しては答を得ていない。以下にわれわれがこれまでに得ている結果を述べる。ここでは $\varepsilon \sim \delta$ であることに注意する。

γ が γ_c に近くない場合とちがって、この場合にはソリトンの正面衝突を除いては摂動法によるソリトンの相互作用の記述はうまくゆかない。1次元の正面衝突の場合には摂動法が使える。方程式系 (9) に直接摂動法を適用することもできるが、 $O(\varepsilon^2)$ までを問題にするならば、1次元問題に対しては次のように簡単化された方程式系を導くことができる。(9) で y 方向の変化がないとし、変換 (30) を行くと、 g を消去することができ (ただし、 $x \rightarrow +\infty$ あるいは $-\infty$ において、 $\zeta, \partial g/\partial x, \partial h/\partial x, \partial^3 g/\partial x^3, \partial^3 h/\partial x^3 \rightarrow 0$ と仮定する) ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \varepsilon p \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \varepsilon^2 r \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta^2 \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\delta^2 q}{6} \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} = 0, \quad (34a)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \zeta + \frac{\varepsilon p}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \varepsilon^3 r \zeta \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 - \frac{\delta^2 q}{2} \frac{\partial^3 h}{\partial t \partial x^2} = 0, \quad (34b)$$

を得る。ただし、 p, q は (14) で与えられ、

$$r = \frac{\sigma(1+\gamma)^2}{\gamma(\gamma+\sigma)^2} \quad (35)$$

である。さらに、 $\gamma = \gamma_c + \varepsilon\beta$, $\gamma_c = \sqrt{\sigma}$ を用いると

$$p = \varepsilon p_c + O(\varepsilon^2), \quad q = q_c + O(\varepsilon), \quad r = r_c + O(\varepsilon) \quad (36)$$

であるから、(34) は $O(\varepsilon^2)$ まででは

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} + \varepsilon^2 p_c \frac{\partial}{\partial x} (\zeta v) - \varepsilon^2 r_c \frac{\partial}{\partial x} (\zeta^2 v) - \frac{\delta^2 q_c}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad (37a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\varepsilon^2 p_c}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v^2) - \varepsilon^2 r_c \frac{\partial}{\partial x} (\zeta v^2) - \frac{\delta^2 q_c}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = 0, \quad (37b)$$

と書ける。Oikawa & Yajima⁹⁾ に従って

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x - t + \varepsilon^2 \psi_1(x, t), & \xi_2 &= x + t + \varepsilon^2 \psi_2(x, t), \\ \tau &= \varepsilon^2 t \end{aligned} \quad (38)$$

を導入し、

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta^{(0)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \varepsilon^2 \zeta^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \cdots \\ v &= v^{(0)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \varepsilon^2 v^{(1)}(\xi_1, \xi_2, \tau) + \cdots \end{aligned} \quad (39)$$

と展開すれば、

$$\zeta^{(0)} = F(\xi_1, \tau) + G(\xi_2, \tau), \quad v^{(0)} = F(\xi_1, \tau) - G(\xi_2, \tau), \quad (40a)$$

$$\psi_1 = \int^{\xi_2} \left(\frac{p_c}{4} G - \frac{r_c}{2} G^2 \right) d\xi_2, \quad \psi_2 = \int^{\xi_1} \left(\frac{p_c}{4} F - \frac{r_c}{2} F^2 \right) d\xi_1, \quad (40b)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} + \frac{3p_c}{2} F \frac{\partial F}{\partial \xi_1} - 3r_c F^2 \frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial \xi_1^3} = 0, \quad (40c)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} - \frac{3p_c}{2} G \frac{\partial G}{\partial \xi_2} + 3r_c G^2 \frac{\partial G}{\partial \xi_2} - \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 G}{\partial \xi_2^3} = 0 \quad (40d)$$

を得る。ただし, $\delta = \varepsilon$ とした。(40c) は EKdV (19a) であり, (40d) の係数の符号のちがいは伝播方向のちがいによる。この結果, ソリトンの正面衝突の場合には $O(\varepsilon^2)$ の位相のずれを生じることになる。 F がショックで G がソリトンの場合, すなわち,

$$F = \frac{\kappa_1}{\sqrt{Q}} (1 - \tanh \eta_1), \quad \eta_1 = \kappa_1 \left(\xi_1 - \frac{2}{3} q_c \kappa_1^2 \tau \right), \quad \kappa_1 = \frac{P}{2\sqrt{Q}} \quad (41a)$$

$$G = \frac{a_2 \operatorname{sech}^2 \eta_2}{1 - b_2 \tanh^2 \eta_2}, \quad \eta_2 = \kappa_2 \left(\xi_2 + \frac{2}{3} q_c \kappa_2^2 \tau \right) \quad (41b)$$

$$a_2 = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4\kappa_2^2 Q}}{Q}, \quad b_2 = \frac{P - \sqrt{P^2 - 4\kappa_2^2 Q}}{P + \sqrt{P^2 + 4\kappa_2^2 Q}} \quad (41c)$$

の場合 (EKdV ソリトンは (41b) のようにも書けることに注意), 衝突後ソリトンの速度や幅が変化すると予想されるが, 実際にはそれらに対応する項は 0 になってしまい,

$$\psi_2 = \frac{r_c \kappa_1}{2Q} \tanh \eta_1 \quad (42)$$

となる。つまり, 漸近的にはソリトンはショックとの衝突後 $\varepsilon^2 r_c \kappa_1 / Q$ だけ左にシフトされるだけである。これは 3 節のおわりで述べたショックによるソリトンの追い越しとは非常に異っている。 $\gamma \simeq \gamma_c$ の場合の孤立波の正面衝突は Mirie & Su⁽¹¹⁾ によっても調べられている。彼らはむしろ高次の効果に注目して調べており, ショックとソリトンの衝突については具体的に計算していない。

次にソリトンがほとんど同じ方向 (x 軸とする) に伝播する場合を考える。この場合 (9) において $\gamma = \gamma_c + \varepsilon\beta$, $\delta = \varepsilon$ とし,

$$\xi = x - t, \quad \eta = \varepsilon y, \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (43)$$

を導入して

$$\zeta = \zeta^{(0)}(\xi, \eta, \tau) + \varepsilon \zeta^{(1)}(\xi, \eta, \tau) + \cdots \quad (44)$$

などと展開すれば,

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} p_c \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} - 3r_c \zeta^{(0)2} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 \zeta^{(0)}}{\partial \xi^3} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta^{(0)}}{\partial \eta^2} = 0 \quad (45)$$

を得る。ここではこれを EKP 方程式と呼ぼう。これはもちろん KP 方程式に対応するものである。(45) に基づくソリトンの相互作用についてはまだわかっていな

い. 以下では EdV ソリトンが y 方向の非常にゆるやかな小さな摂動に対して安定である^{10,12)} ように, EKdV ソリトンも同様の摂動に対して安定であることを示す. そのために, $1 \ll \alpha \ll \varepsilon^{1/2}$ として, (45) を

$$\frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} p_c \zeta^{(0)} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} - 3 r_c \zeta^{(0)2} \frac{\partial \zeta^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 \zeta^{(0)}}{\partial \xi^3} + \frac{\alpha^2}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} = 0, \quad (46a)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \zeta^{(0)}, \quad \left(\varphi \equiv \frac{\gamma_c f_2^{(0)} - f_1^{(0)}}{1 + \gamma_c} \right) \quad (46b)$$

と書いておく. つまり y 方向の摂動は十分長波長であるとする. (46a) の最後の項を摂動項と考える. 新しい座標

$$\begin{aligned} \rho &= \xi - \theta, & \lambda &= \alpha \tau, \\ \theta &= c_0 \tau + \theta_1(\lambda, \eta), \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= c = c_0 + \alpha \frac{\partial \theta_1}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (47)$$

を導入し, $\zeta^{(0)} = \zeta^{(0)}(\rho, \lambda, \eta)$, $\varphi = \varphi(\rho, \lambda, \eta)$ とし,

$$\begin{aligned} \zeta^{(0)} &= \zeta_0 + \alpha \zeta_1 + \alpha^2 \zeta_2 + \cdots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \cdots, \end{aligned} \quad (48)$$

と展開する. (47), (48) を (46) に代入すると, α の最低次で

$$-c \frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} + \frac{3}{2} p_c \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} - 3 r_c \zeta_0^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \rho} + \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 \zeta_0}{\partial \rho^3} = 0, \quad (49a)$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} = \zeta_0 \quad (49b)$$

を得る. (49a) の $\rho \rightarrow \pm\infty$ で ζ_0 , $\partial \zeta_0 / \partial \rho$, $\partial^2 \zeta_0 / \partial \rho^2 \rightarrow 0$ となる解は

$$\zeta_0 = \frac{a \operatorname{sech}^2(\kappa \rho)}{1 - b \tanh^2(\kappa \rho)}, \quad (50)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{3c}{2q_c}}, \quad a = \frac{p_c - \sqrt{p_c^2 - 8r_c c}}{2r_c}, \quad b = \frac{p_c - \sqrt{p_c^2 - 8r_c c}}{p_c + \sqrt{p_c^2 - 8r_c c}} \quad (51)$$

($p_c > 0$ の場合を考えている)

と書ける. このとき, (49b) から

$$\varphi_0 = \frac{a}{2\kappa\sqrt{b}} \log \left[\frac{1 + \sqrt{b} \tanh(\kappa \rho)}{1 - \sqrt{b} \tanh(\kappa \rho)} \right]. \quad (52)$$

ここで積分定数は安定性に影響しないので 0 とした.

α の次のオーダーにおいて

$$-c \frac{\partial \zeta_1}{\partial \rho} + \frac{3p_c}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\zeta_0 \zeta_1) - 3r_c \frac{\partial}{\partial \rho} (\zeta_0^2 \zeta_1) + \frac{q_c}{6} \frac{\partial^3 \zeta_1}{\partial \rho^3} + \frac{\partial \zeta_0}{\partial \lambda} + \frac{\alpha}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta \partial \rho} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \rho^2} \right) = 0. \quad (53)$$

両辺に ζ_0 を掛けて, ρ について $(-\infty, +\infty)$ で積分し, (49a) を用いると,

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0 \frac{\partial \zeta_0}{\partial \lambda} d\rho + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0 \left(\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \rho} - 2 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta \partial \rho} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \rho^2} \right) d\rho = 0$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho - \alpha \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0 \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \eta^2} d\rho = 0. \quad (54)$$

ζ_0 は ρ について偶, $\partial^2 \varphi_0 / \partial \eta^2$ は ρ について奇だから, 最後の項は 0 になる. また,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho = \frac{2\gamma_c c}{\kappa} \left[\frac{1+b}{2\sqrt{b}} \log \frac{1+\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} - 1 \right], \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho = \alpha \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \lambda^2} \frac{\partial}{\partial c} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho = \alpha \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \lambda^2} \frac{\gamma_c}{\kappa} \left\{ \left(\frac{1+b}{1-b} \right)^2 - 1 \right\}, \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho = \frac{\partial c}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial c} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\rho = O(\alpha). \quad (57)$$

従って, (54) は α の 1 次までで

$$\left\{ \left(\frac{1+b}{1-b} \right)^2 - 1 \right\} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \lambda^2} = 2c \left\{ \frac{1+b}{2\sqrt{b}} \log \frac{1+\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} - 1 \right\} \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} \quad (58)$$

を得る. $\partial^2 \theta_1 / \partial \lambda^2$ および $\partial^2 \theta_1 / \partial \eta^2$ の係数がともに正なので, EKdV ソリトンは中立安定である.

参 考 文 献

- 1) T. Kakutani and N. Yamasaki : J. Phys. Soc. Jpn. **45** (1978) 674.
- 2) J. W. Miles : Tellus **31** (1979) 456.
- 3) 全般的に, 船越満明, 及川正行 : ながれ **8** (1989) 311.
- 4) T. L. Perelman, A. Kh. Fridman and M. M. El'yashevich : Sov. Phys. JETP **39** (1974) 643 ; Phys. Lett. **47A** (1974) 321.
- 5) M. Wadati : J. Phys. Soc. Jpn. **38** (1975) 673; 681.
- 6) M. Funakoshi : J. Phys. Soc. Jpn. **49** (1980) 2371.

- 7) J. W. Miles : J. Fluid Mech. **79** (1977) 157; 171.
- 8) 矢嶋信男 : "乱流現象の科学", 巽友正編 (東京大学出版会, 1986) 第3章.
- 9) M. Oikawa and N. Yajima : J. Phys. Soc. Jpn. **34** (1973) 1093.
- 10) B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili : Sov. Phys. Dokl. **15** (1970) 539.
- 11) R. M. Mirie and C. H. Su : Phys. Fluids **29** (1986) 31.
- 12) M. Oikawa, J. Satsuma and N. Yajima : J. Phys. Soc. Jpn. **37** (1974) 511.