

logarithmic Hodge-Witt sheaf に対する Gersten 予想について

諏訪紀幸 (東京電機大学工学部)

1. 動機と主要な結果

1.1. k を体, X を連結な有限型 k -scheme, $N = \dim X$, また, $X_{\text{ét}}$ を X の étale site, X_{zar} を X の Zariski site, $\varepsilon: X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ を自然な site の morphism とする. X の codimension d の点の全体を $X^{(d)}$ で表わす.

l を k の標数とは異なる素数, $H^j(Z/l^n(r)) = R^j \varepsilon_* Z/l^n(r)$ とする. X が k の上に smooth なら, $R\Gamma(X_{\text{zar}}, H^j(Z/l^n(r)))$ は Cousin complex

$$(1) \quad \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H_x^d(X, Z/l^n(r)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H_x^{d+1}(X, Z/l^n(r)) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H_x^{2d-1}(X, Z/l^n(r)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H_x^{2d}(X, Z/l^n(r))$$

によって代表される (Bloch-Ogus [2]). したがって, Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(X_{\text{zar}}, H^j(Z/l^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X_{\text{ét}}, Z/l^n(r))$$

によって定義される $H^*(X_{\text{ét}}, Z/l^n(r))$ の filtration は coniveau filtration に他ならない.

étale cohomology の purity theorem から, Cousin complex (1) は Gersten complex

$$\text{BO}(d, r): \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^d(k(x), Z/l^n(r)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{d-1}(k(x), Z/l^n(r-1)) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H^1(k(x), Z/l^n(r-d+1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H^0(k(x), Z/l^n(r-d))$$

に同型であるが, $d = r$, $(d, r) = (N+1, N)$ の場合が特に興味深い.

I) $d = r$

$$\text{BO}(d): \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^d(k(x), Z/l^n(d)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{d-1}(k(x), Z/l^n(d-1)) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H^2(k(x), Z/l^n(2)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H^1(k(x), Z/l^n(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H^0(k(x), Z/l^n)$$

は代数的 K 理論の Gersten-Quillen complex

$$\text{GQ}(d): \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_d(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{d-1}(k(x)) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(2)}} K_2(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_1(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} K_0(k(x))$$

と関係が付けられ, algebraic cycle の研究に有用である. 実際, Galois symbol によって complex の準同型

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Q}\mathbb{Q}(d)^{\geq d-3}: & \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(2)}}} K_2(k(x)) & \rightarrow & \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(1)}}} K_1(k(x)) & \rightarrow & \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(0)}}} K_0(k(x)) \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{BO}(d)^{\geq d-3}: & \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d-3)}}} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) & \rightarrow & \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d-1)}}} H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) & \rightarrow & \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d)}}} H^0(k(x), \mathbb{Z}/l^n) \end{array}$$

が定義される. さらに, Galois symbol は同型

$$\begin{aligned} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) &\xrightarrow{\sim} K_2(k(x))/l^n \quad (\text{Mercurjev-Suslin の定理}), \\ H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) &\xrightarrow{\sim} k(x)^\times/l^n = K_1(k(x))/l^n \quad (\text{Hilbert の定理 90}), \\ H^0(k(x), \mathbb{Z}/l^n) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/l^n = K_0(k(x))/l^n \end{aligned}$$

を誘導する. また,

$$\bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d)}}} K_0(k(x)) = \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d)}}} \mathbb{Z}$$

は X の codimension d の algebraic cycle の群に, また,

$$H^d(X, K_d) = \text{Coker} \left[\bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(1)}}} K_1(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d)}}} K_0(k(x)) \right] = \text{Coker} \left[\bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(1)}}} k(x)^\times \rightarrow \bigoplus_{\substack{\text{reg } X^{(d)}}} \mathbb{Z} \right]$$

は X の codimension d の algebraic cycle の Chow 群に他ならない. これから,

符号を除いて可換な図式

$$\begin{array}{ccc} H^{d-1}(X_{\text{zar}}, H^d(\mathbb{Z}/l^n(d))) & \xrightarrow{\gamma} & {}_l\text{CH}^d(X) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \rho \\ H^{2d-1}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^n(d)) & \xrightarrow{\beta} & H^{2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^m(d)) \end{array}$$

を得る ([5]). ここで,

$$\alpha: H^{d-1}(X_{\text{zar}}, H^d(\mathbb{Z}/l^n(d))) \rightarrow H^{2d-1}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^n(d))$$

は Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(X_{\text{zar}}, H^j(\mathbb{Z}/l^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^n(r))$$

によって定義される準同型,

$$\beta: H^{2d-1}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^n(d)) \rightarrow H^{2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^m(d))$$

は Bockstein operator,

$$\gamma: H^{d-1}(X_{\text{zar}}, H^d(\mathbb{Z}/l^n(d))) \rightarrow {}_l\text{CH}^d(X)$$

は complex の準同型 $\mathbb{Q}\mathbb{Q}(d)^{\geq d-3} \rightarrow \text{BO}(d)^{\geq d-3}$ によって定義される準同型,

$$\rho: {}_l\text{CH}^d(X) \rightarrow H^{2d}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^m(d))$$

は cycle map.

さらに, k が algebraically closed で, X が k の上に smooth proper のとき, l -adic Abel-Jacobi map $\lambda^d: CH^d(X)_{l\text{-tors}} \rightarrow H^{2d-1}(X, \mathbb{Q}_l/\mathbb{Z}_l)$ を構成することが出来る (Bloch [1]).

II) $(d, r) = (N+1, N)$

$$\begin{aligned} \text{BO}(N+1, N): \quad & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^{N+1}(k(x), \mathbb{Z}/l^n(N)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^N(k(x), \mathbb{Z}/l^n(N-1)) \rightarrow \dots \\ & \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^3(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n) \end{aligned}$$

は有限体の上の函数体の類体論であられる reciprocity sequence を与える。まず, 一般に自然な同型

$$\begin{aligned} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) &\xrightarrow{\sim} {}_l\text{Br}(k(x)), \\ H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Z}/l^n) \end{aligned}$$

が存在することに注意する。さらに, k が有限体で X が k の上に smooth proper なら,

$$H^N(X_{\text{Zar}}, H^{N+1}(\mathbb{Z}/l^n(N))) = H^{2N+1}(X_{\text{et}}, \mathbb{Z}/l^n(N)) = \mathbb{Z}/l^n.$$

したがって, $\text{BO}(N+1, N)$ に $\text{Coker}[\bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^2(k(x), \mathbb{Z}/l^n(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} H^1(k(x), \mathbb{Z}/l^n)]$
 $= \text{Coker}[\bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} {}_l\text{Br}(X) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Z}/l^n)] = \mathbb{Z}/l^n$ を付け加えて reciprocity sequence

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-3)}} H^4(k(x), \mathbb{Z}/l^n(3)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^3(k(x), \mathbb{Z}/l^n(2)) \rightarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} {}_l\text{Br}(X) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow \mathbb{Z}/l^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

を得る。reciprocity sequence は exact であると予想されている (加藤 [10])。例えば, $\dim X = 1$ のときは, reciprocity sequence

$$0 \rightarrow {}_l\text{Br}(k(X)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Z}/l^n) \rightarrow \mathbb{Z}/l^n \rightarrow 0$$

は Witt の reciprocity exact sequence

$$0 \rightarrow \text{Br}(k(X)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x)), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

の l -torsion part に他ならない。

1.2. k の標数が $p > 0$ のとき, p -part を記述するものが必要であるが, k が完全で X が k の上に smooth であるとき, logarithmic Hodge-Witt sheaf 係数の cohomology $H^*(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ がその役を果たす. ここで, $W_n \Omega_{X, \log}^r$ は対数微分形式で生成される Hodge-Witt sheaf $W_n \Omega_X^r$ の abelian subsheaf (Illusie [9], Ch. I), l -adic étale cohomology との類似から

$$H^j(X, Z/p^n(r)) = H^{j-r}(X, W_n \Omega_{X, \log}^r),$$

$$H^j(Z/p^n(r)) = R^{j-r} \varepsilon_* W_n \Omega_{X, \log}^r$$

と書くことにする. このとき, $R\Gamma(X_{\text{zar}}, H^j(Z/p^n(r))) = R\Gamma(X_{\text{zar}}, R^{j-r} \varepsilon_* W_n \Omega_{X, \log}^r)$ は Cousin complex

$$(2) \quad \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H_x^d(X, Z/p^n(r)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H_x^{d+1}(X, Z/p^n(r)) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H_x^{2d-1}(X, Z/p^n(r)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H_x^{2d}(X, Z/p^n(r))$$

によって代表される ([8]). $d = r$ のとき, logarithmic Hodge-Witt sheaf に対する purity theorem (Gros [6]) から, Cousin complex (2) は Gersten complex

$$C(d): \quad \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^d(k(x), Z/p^n(d)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^{d-1}(k(x), Z/p^n(d-1)) \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H^2(k(x), Z/p^n(2)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H^1(k(x), Z/p^n(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H^0(k(x), Z/p^n)$$

に同型. さらに, 対数微分形式によって complex の準同型

$$CQ(d)^{\geq d-3}: \quad \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_2(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_1(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} K_0(k(x))$$

$$\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$$

$$C(d)^{\geq d-3}: \quad \bigoplus_{x \in X^{(d-3)}} H^2(k(x), Z/p^n(2)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d-1)}} H^1(k(x), Z/p^n(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} H^0(k(x), Z/p^n)$$

が定義され, 自然な同型

$$H^2(k(x), Z/p^n(2)) \xleftarrow{\sim} K_2(k(x))/p^n \quad (\text{Bloch-加藤-Gabber の定理}),$$

$$H^1(k(x), Z/p^n(1)) \xleftarrow{\sim} k(x)^\times/p^n = K_1(k(x))/p^n \quad (\text{Hilbert の定理 90}),$$

$$H^0(k(x), Z/p^n) \xleftarrow{\sim} Z/p^n = K_0(k(x))/p^n$$

が誘導される. したがって, l -adic étale cohomology の場合と同じように, 符号を除いて可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
H^{d-1}(X_{\text{zar}}, H^d(Z/p^n(d))) & \xrightarrow{\gamma} & {}_p\text{CH}^d(X) \\
\downarrow \alpha & & \downarrow \rho \\
H^{2d-1}(X, Z/p^n(d)) & \xrightarrow{\beta} & H^{2d}(X, Z/p^n(d))
\end{array}$$

を得る。ここで、

$$\alpha: H^{d-1}(X, H^d(Z/p^n(d))) \rightarrow H^{2d-1}(X, Z/p^n(d))$$

は Leray の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(X_{\text{zar}}, H^j(Z/p^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, Z/p^n(r))$$

によって定義される準同型、

$$\beta: H^{2d-1}(X, Z/p^n(d)) \rightarrow H^{2d}(X, Z/p^n(d))$$

は Bockstein operator,

$$\gamma: H^{d-1}(X, H^d(Z/p^n(d))) \rightarrow {}_p\text{CH}^d(X)$$

は complex の準同型 $GQ(d)^{\geq d-3} \rightarrow C(d)^{\geq d-3}$ によって定義される準同型、

$$\rho: {}_p\text{CH}^d(X) \rightarrow H^{2d}(X, Z/p^n(d))$$

は cycle map.

さらに、 k が algebraically closed で、 X が k の上に smooth projective のとき、 p -adic Abel-Jacobi map $\lambda^d: \text{CH}^d(X)_{p\text{-tors}} \rightarrow H^{2d-1}(X, \mathbb{Q}_p/Z_p)$ を構成することが出来る ([7]).

しかし、 $d = r+1$ のときは、 $BO(r+1, r)$ に類似の Gersten complex $C(r+1, r)$ は構成できるが、一般に Cousin complex (2) と同型ではない。これは logarithmic Hodge-Witt sheaf に対する purity theorem の不完全さ、あるいは、標数 $p > 0$ の体の上の代数多様体の p -part の晦渋さに由来する。

註 1.3. purity theorem の比較

X を有限型 k -scheme, Y を X の closed subscheme とする。 X, Y が k の上に smooth で $\text{codim}(Y, X) = d$ なら、

$$H_Y^j(Z/l^n(r)) \simeq \begin{cases} (Z/l^n(r-d))_Y & (j = 2d) \\ 0 & (j \neq 2d) \end{cases}.$$

一方、

$$\underline{H}_Y^j(W_n \Omega_{X, \log}^r) \simeq \begin{cases} W_n \Omega_Y^{r-d} & (j = d) \\ 0 & (j \neq d, d+1) \end{cases}.$$

ところが, $r = N (= \dim X)$ の場合, logarithmic Hodge-Witt sheaf に対しても完全な purity theorem が成立する.

定理 1.4. k を標数 $p > 0$ の完全体, X を有限型 k -scheme, Y を X の closed subscheme, $N = \dim X$ とする. X, Y が k の上に smooth で $\text{codim}(Y, X) = d$ なら, $\underline{H}_Y^{d+1}(W_n \Omega_{X, \log}^N) = 0$.

これから, $R\Gamma(X_{\text{zar}}, H^{N+1}(Z/p^n(N)))$ は Gersten complex

$$\begin{aligned} C(N+1, N): \quad & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} H^{N+1}(k(x), Z/l^n(N)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^N(k(x), Z/l^n(N-1)) \rightarrow \dots \\ & \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^3(k(x), Z/p^n(2)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^2(k(x), Z/p^n(1)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} H^1(k(x), Z/p^n) \end{aligned}$$

で代表されることが従う.

Colliot-Thélène は, k が有限体で X が k の上に smooth proper なら, $H^{N-1}(X, \mathcal{K}_N) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = 0$ となることを示し, それから $BO(N+1, N)$ を用いて, $\dim X \leq 3$ なら reciprocity sequence

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-2)}} H^4(k(x), Z/l^n(3)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^3(k(x), Z/l^n(2)) \rightarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} {}_l \text{Br}(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x), Z/l^n) \rightarrow Z/l^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が exact であることを導いた ([4]). $C(N+1, N)$ を用いれば, 同様に $\dim X \leq 3$ なら reciprocity sequence

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-2)}} H^4(k(x), Z/p^n(3)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} H^3(k(x), Z/p^n(2)) \rightarrow \\ \bigoplus_{x \in X^{(N-1)}} p^n \text{Br}(k(x)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(N)}} \text{Hom}(\text{Gal}(k(\bar{x})/k(x), Z/p^n) \rightarrow Z/p^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が exact であることが従う ([13]).

2. 定理の証明の概略

定理の証明には次の命題が本質的である。

命題 2.1. k を標数 $p > 0$ の algebraically closed field, X を smooth affine k -scheme, $N = \dim X$ とする。このとき, $j > 0$ に対して

$$H^{j+N}(X, Z/p^n(N)) = H^j(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_{X, \log}^N) = 0.$$

$X_{\text{ét}}$ 上の abelian sheaf の exact sequence

$$0 \rightarrow \Omega_{X, \log}^N \rightarrow \Omega_X^N \xrightarrow{C-1} \Omega_X^N \rightarrow 0 \quad (C \text{ は } \Omega_X^N \text{ の上の Cartier operator})$$

を用いて次の補題に帰着される。

補題 2.2. k を標数 $p > 0$ の algebraically closed field, X を有限型 smooth k -scheme, $N = \dim X$ とする。このとき, $C-1$ は $\Gamma(X, \Omega_X^N)$ の上で全射。

次の事実に注意して補題は示される。

(1) k を標数 $p > 0$ の体, X を有限型 normal k -scheme, また, $\omega \in \Gamma(X, Z_\omega \Omega_X^N)$ とする。このとき, $C^k \omega$ ($k \geq 0$) によって生成される $\Gamma(X, \Omega_X^N)$ の部分空間は k の上に有限次元;

(2) k を標数 $p > 0$ の algebraically closed field, E を k の上の有限次元線形空間, φ を E の p^{-1} -linear endomorphism とする。このとき, $\varphi-1$ は E の上で全射。

2.3. 定理の証明は, 局所性から k が algebraically closed, X が affine と仮定してよい。 $d = \text{codim}(Y, X)$ に関する帰納法による。

$d = 1$ のとき, X を充分小さく取り直すことによって, $X-Y$ が affine と仮定してよい。 local cohomology の exact sequence

$$\dots \rightarrow H_Y^j(X, W_n \Omega_{X, \log}^N) \rightarrow H^j(X, W_n \Omega_{X, \log}^N) \rightarrow H^j(X-Y, W_n \Omega_{X, \log}^N) \rightarrow \dots$$

を考えて, 命題 2.1 から

$$H_Y^j(X, W_n \Omega_{X, \log}^N) = 0 \quad (j \neq 1).$$

を得る。 $d > 1$ のときは, 同型 $H_Y^d(W_n \Omega_{X, \log}^N) \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_{Y, \log}^{N-d}$ を用いて帰納法を進める。

3. 補遺

命題2.1 から他の興味深い結論が導き出される。

定理 3.1. k を標数 $p > 0$ の algebraically closed field, X を有限型 separated smooth k -scheme, $N = \dim X$ とする。このとき, $H^{j+N}(X, Z/p^n(N)) = H^j(X_{\text{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^N)$ は有限群。

実際, 命題2.1 から, $H^j(X_{\text{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^N)$ は X の有限 affine 開被覆 $\mathcal{U}$ に対する Čech cohomology $\check{H}^j(\mathcal{U}, W_n \Omega_{X, \log}^N) = H^j(C^*(\mathcal{U}, W_n \Omega_{X, \log}^N))$ に同型。ここで, Čech complex $C^*(\mathcal{U}, W_n \Omega_{X, \log}^N)$ の各成分は有限群。

系 3.2. k を標数 p の有限体, X を有限型 separated smooth k -scheme, $N = \dim X$ とする。このとき, $H^{j+N}(X, Z/p^n(N)) = H^j(X_{\text{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^N)$ は有限群。

実際, Hochschild-Serre の spectral sequence

$$E_2^{i,j} = H^i(\bar{k}/k, H^j(X_{\bar{k}}, Z/p^n(r))) \Rightarrow H^{i+j}(X, Z/p^n(r))$$

を考えて, 有限体の Galois cohomology に対する有限性定理から結論を得る。

系 3.3. k を algebraically closed field, X を有限型 separated smooth k -scheme とする。このとき,

- (1) ${}_p\text{CH}_0(X)$ は有限群;
- (2) X が affine, $\dim X \geq 2$ なら, $\text{CH}_0(X)$ は p -torsion-free.

実際, 命題2.1 から, $j > 0$ に対して,

$$H^{j+N}(Z/p^n(N)) = R^j \varepsilon_* W_n \Omega_{X, \log}^N = 0.$$

したがって, 符号を除いて可換な図式

$$\begin{array}{ccc} H^{N-1}(X_{\text{zar}}, H^N(Z/p^n(N))) & \xrightarrow{\gamma} & {}_p\text{CH}_0(X) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \rho \\ H^{2N-1}(X, Z/p^n(N)) & \xrightarrow{\beta} & H^N(X, Z/p^n(N)) \end{array}$$

において, α は双射。また, 一般に γ は全射。定理3.1 から $H^{2N-1}(X, Z/p^n(d))$ は有限群。これから, ${}_p\text{CH}_0(X)$ が有限群であることが従う。

さらに, X が affine で $N = \dim X \geq 2$ なら, 命題2.1 から $H^{2N-1}(X, Z/p^n(d)) =$

0. したがって, $p_*\mathrm{CH}_0(X) = 0$.

註 3.4. k を標数 $p > 0$ の algebraically closed field, X を有限型 separated smooth k -scheme, $N = \dim X$ とする. このとき,

(1) $H^0(X_{\mathrm{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ は有限群.

(2) $H^j(X_{\mathrm{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^N)$ は有限群.

さらに,

(3) X が X の上に proper のとき, $H^j(X_{\mathrm{et}}, \mathbb{Z}/p^n) = H^j(X_{\mathrm{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^0)$ は有限群.

しかし, X が k の上に proper であっても, $j > 0$, $0 < r < N$ なら, $H^j(X_{\mathrm{et}}, W_n \Omega_{X, \log}^r)$ は有限群であるとは限らない.

以上の詳細は [13] を参照されたい. また, Gersten complex の algebraic cycle への応用については論説 [12], [14], [11], [3] がみやすい.

References

- [1] S. Bloch - Torsion algebraic cycles and a theorem of Roitman. Comp. Math. 39 (1979)
- [2] S. Bloch, A. Ogus - Gersten's conjecture and the homology of schemes. Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. 4^e série 7 (1974)
- [3] J.-L. Colliot-Thélène - Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique. Cours au C.I.M.E., juin 1991. Preprint
- [4] J.-L. Colliot-Thélène - On the reciprocity sequence in higher class field theory of function fields. Preprint
- [5] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, C. Soulé - Torsion dans le groupe de Chow de codimension deux. Duke Math. J. 50 (1983)
- [6] M. Gros - Classes de Chern et classes de cycles en

- cohomologie logarithmique. Bull. Soc. Math. France 113 (1985)
- [7] M. Gros, N. Suwa - Application d'Abel-Jacobi p -adique et cycles algébrique. Duke Math. J. 57 (1988)
- [8] M. Gros, N. Suwa - La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique. Duke Math. J. 57 (1988)
- [9] L. Illusie - Complexes de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. Ann. Scient. de l'Ec. Norm. Sup. 4^e série 12 (1979)
- [10] K. Kato - A Hasse principle for two dimensional global fields. J. für die Reine und Ang. Math. 366 (1986)
- [11] W. Raskind - Algebraic K-theory, étale cohomology and torsion algebraic cycles. Contemp. Math. 83 (1989)
- [12] 清水勇二 - S. Bloch <Lecture on algebraic cycles> からの紹介. 第5回代数セミナー報告集 I, 城崎 (1982)
- [13] N. Suwa - A note on Gersten's conjecture for logarithmic Hodge-Witt sheaves. Prépublication de l'Université de Paris-Sud (1992)
- [14] 諏訪紀幸 - l -adic and p -adic Abel-Jacobi maps. Arithmetic Algebraic Geometry シンポジウム, 東京大学 (1987)