

MHD 平衡の逆解法について

名大フラスマ研

等々力二郎 (Jiro Todoroki)

§ 1. はじめに

通常行われている MHD 平衡の解き方は、空間に固定された座標 $r = (x, y, z)$ を用いて、磁場 B やフラスマ圧力 p などを r の関数として求めるというやり方である。たとえば軸対称トカマクの平衡の問題では、ポロイダル磁束関数 Ψ を Grad-Shafranov 方程式

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi &= -2\pi\mu_0 r j_\phi(r, \Psi), \\ j_\phi(r, \Psi) &\equiv 2\pi r \frac{dp(\Psi)}{d\Psi} + \frac{\mu_0}{2\pi r} I_\theta(\Psi) \frac{dI_\theta(\Psi)}{d\Psi}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

から求めるのが、一般によく行われている。この場合にはフラスマ圧力 p とポロイダル電流 I_θ が、 Ψ の関数として固定されているという拘束条件の下で平衡を求めることになる。

しかし、MHD 平衡を解くやり方には、もう一つ別のや

り方、いわゆる逆平衡法という方法がある。これは、空間に固定された座標ではなくフローズマに固定された曲線座標系を考え、空間座標 r をこの座標の関数として求めるというやり方である。MHD平衡の計算が繰り返しの方法によって行われるとき、その繰り返しをある種の時間発展として考えると、通常の方法は物理量が変化するという Euler 的な方法であるのに対し、逆平衡法は空間内を点が移動する Lagrange 的な方法である。

逆平衡法をとることの利点には次のようなものがある。

1) 磁気面や磁気軸の形が直接求められる。安定性の計算や粒子軌道の計算などは、磁力線や磁気面を座標に用いて行われることが多いが、通常の場合には、逆内挿によって磁気面を求めなければならない。2) フローズマの境界面を固定して解くような場合に簡単である。3) 種々の拘束条件に対して、等しく柔軟に対応できる。これは、磁気面が座標にとられているために、磁気面上での平均が簡単に行えるということによる。4) 対称性のない場合の MHD 平衡を取り扱うことができる。

一方、逆平衡法の欠点（短所）としては、1) 磁気面の位相幾何学的な構造を仮定するため、それからはずれたような平衡、たとえば、複数の磁気軸をもつような平衡が取り扱

えないこと、2) 取り扱う方程式が著しく非線形である。
 3) プラズマの外部(真空領域)では、プラズマ内部とは全く別の取り扱いをしなければならない。4) 磁気軸が座標系の特異点となるので、そこでの取り扱いに注意が必要であり、また磁気軸上で計算の精度を維持するための対策が必要である。

以下では、まず逆平衡法の考え方がMHD平衡の性質から自然に導かれる筋道を示し、磁気軸近傍で起こる数値計算上の問題とその解決法を示す。

§2. 曲線座標系でのMHD平衡方程式

適当な境界条件と拘束条件の下で、MHD平衡方程式

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad \mu_0 \mathbf{J} = \text{curl } \mathbf{B}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

を考える。 $p = \text{const.}$ の等圧面は磁力線によって織りなされた“磁気面”である。理想的な場合には、単純なトーラス状の磁気面が単純な入れ子の構造をもち、中心に一本の磁気軸がある。このような単純な入れ子構造をした磁気面をもつような平衡解が一般の非対称な場合に存在するか否かについては重大な疑問があるが、ここではそのような平衡解が存在するものと仮定する。

磁気面の存在を仮定すると、各磁気面の上で一定の値を

もつような関数 $\Delta(r)$ と, 磁気面上の適当な二つの角変数 $\theta(r)$, $\zeta(r)$ をとり, 曲線座標系 (Δ, θ, ζ) をつくることのできる。座標として用いることのできることから, 逆関数 $r(\Delta, \theta, \zeta)$ が一意的に定まる必要があるが, それ以外には, Δ, θ, ζ の選い方は全く任意である。いま, Δ については磁気軸上では 0, フラズマ表面では 1 の値をとるものとし, θ は磁気軸のまわりを一周したとき 2π の周期をもち, ζ は磁気軸に沿ってトーラスを一周したとき 2π の周期をもつものとする。

磁場 B は, ポテンシャル $F(r)$ を用いて

$$B = \nabla \Delta \times \nabla F \quad (3)$$

と表わすことのできる。 F は多価関数であるが,

$$F = \Psi'_3(\Delta) \frac{\theta}{2\pi} - \Psi'_0(\Delta) \frac{\zeta}{2\pi} + \tilde{F}(\Delta, \theta, \zeta) \quad (4)$$

とおくと $\tilde{F}$ は一価関数となる。ここで, $\Psi_3(\Delta)$ は磁気面で囲まれたトロイダル磁束, $\Psi_0(\Delta)$ は磁気面の内側のポロイダル磁束で, ' は Δ についての微分を表わしている。磁気面上で $F = \text{const.}$ の線は磁力線を表わす。

電流 J についても, 同様にポテンシャル関数 $G(r)$ を用いて

$$J = \nabla G \times \nabla \Delta \quad (5)$$

と表わすことができ,

$$G = -I_0'(\Delta) \frac{\zeta}{2\pi} - I_3'(\Delta) \frac{\theta}{2\pi} + \tilde{G}(\Delta, \theta, \zeta) \quad (6)$$

とおくと, $\tilde{G}$ は一価関数, $I_0(\Delta)$ は磁気面の外側のトロイダル電流, $I_z(\Delta)$ は磁気面の内側のトロイダル電流である。

更に, $\mu_0 \mathbf{J} = \text{curl } \mathbf{B}$ の関係から, (5)式を積分して

$$\mathbf{B} = \nabla H + \mu_0 \tilde{G} \nabla \Delta \quad (7)$$

が得られる。 H も多価関数であるが,

$$H = \mu_0 I_0(\Delta) \frac{\zeta}{2\pi} + \mu_0 I_z(\Delta) \frac{\theta}{2\pi} + \tilde{H}(\Delta, \theta, \zeta) \quad (8)$$

とすると $\tilde{H}$ は一価の関数である。

三つの関数, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ は磁気面上の角変数 θ , ζ のとり方に依存する。これから逆に, $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ のうちの二つを決めることにより, θ と ζ のきめ方を特定することができる。たとえば, $\tilde{F} = \tilde{G} = 0$ とすると, 電流線も磁力線も共に $\theta - \zeta$ 面上での直線になり, これは HAMADA 座標に対応する。また, $\tilde{F} = \tilde{H} = 0$ というとり方も可能で, このとき磁力線は $\theta - \zeta$ 面上で直線となり, また磁場の反変成分の表式が簡単になる (BOOZER の座標)。これらの選び方は, 平衡解が既にわかっているときには便利であるが, 実際に平衡解を求めるときには, θ , ζ のとり方を指定して $\tilde{F}$, $\tilde{G}$, $\tilde{H}$ を未知関数とする方がよい。

残った平衡の関係式は

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{G} = p'(\Delta), \quad \sim \quad \mathbf{J} \cdot \nabla \tilde{F} = p'(\Delta) \quad (9)$$

であるが, 真の未知関数は, きり見えるように, (4) を

$$B = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \quad (10)$$

と書く。 $\sqrt{g} = \left(\frac{\partial r}{\partial \Delta} \times \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial \zeta}$ はヤコビアンである。 (10) を

(7) と等しいとおくと,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial \theta} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{03} \frac{\partial F}{\partial \theta} - g_{00} \frac{\partial F}{\partial \zeta}), \quad \frac{\partial H}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{33} \frac{\partial F}{\partial \theta} - g_{03} \frac{\partial F}{\partial \zeta}), \\ \frac{\partial H}{\partial \Delta} + \mu_0 \tilde{G} &= \frac{1}{\sqrt{g}} (g_{13} \frac{\partial F}{\partial \theta} - g_{10} \frac{\partial F}{\partial \zeta}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

あるいは, H を消去して

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{g_{33}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{g_{03}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right\} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{g_{03}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{g_{00}}{\sqrt{g}} \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right\}, \quad (12)$$

を得る。ただし $g_{ij} = \frac{\partial r}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial r}{\partial x^j}$, $(x^1, x^2, x^3) \equiv (\Delta, \theta, \zeta)$ 。

(11) を用いて G を消去すると, (9) は

$$\sqrt{g} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left(1 + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \frac{1}{\mu_0 \sqrt{g}} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial F}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) B = 0, \quad (13)$$

となる。

§3. 磁束と電流の拘束条件.

いま F を

$$F = \Psi_0'(\Delta) F^{(2)}(\Delta, \theta, \zeta) + \Psi_3'(\Delta) F^{(3)}(\Delta, \theta, \zeta), \quad (14)$$

と置き, $F^{(2)}, F^{(3)}$ は (12) と同じ面調和方程式を満たし,

$$\left. \begin{aligned} \oint \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \theta} d\theta &= 0, & \oint \frac{\partial F^{(2)}}{\partial \zeta} d\zeta &= 1 \\ \oint \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \theta} d\theta &= -1, & \oint \frac{\partial F^{(3)}}{\partial \zeta} d\zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

という周期条件を満足するものとする。このとき

$$Y_{ij}(\Delta) = \frac{1}{\mu_0} \oint \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial F^{(i)}}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \zeta} - \frac{\partial F^{(i)}}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) \cdot \left(\frac{\partial F^{(j)}}{\partial \theta} \frac{\partial r}{\partial \zeta} - \frac{\partial F^{(j)}}{\partial \zeta} \frac{\partial r}{\partial \theta} \right) d\theta d\zeta,$$

$$(i, j = 2, 3), \quad (16)$$

と定義すると

$$\left. \begin{aligned} I_5(\Delta) &= Y_{22}(\Delta) \Psi_0'(\Delta) + Y_{23}(\Delta) \Psi_3'(\Delta), \\ I_0(\Delta) &= Y_{23}(\Delta) \Psi_0'(\Delta) + Y_{33}(\Delta) \Psi_3'(\Delta) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

の関係が成り立つ。 $Y_{22} > 0$, $Y_{33} > 0$, $Y_{22}Y_{33} - |Y_{23}|^2 > 0$ であるから, I_0 , I_5 , Ψ_0' , Ψ_3' の四つの量のうち, $(\Psi_0'$ と $\Psi_3')$, $(\Psi_0'$ と $I_0)$, $(\Psi_3'$ と $I_5)$, $(I_0$ と $I_5)$ の組合せのうちのいずれかの二つの量を与えると, 残りの二つの量を決定できる。

§4. 変分原理

簡単のために, 固定境界をもつポラズマ平衡を考え, ポラズマの全ポテンシャルエネルギーを

$$E = \int_{\Omega} \left\{ \frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{p}{\gamma - 1} \right\} d\tau \quad (18)$$

とおく。ここで $p = p(\Delta) = m(\Delta) [V'(\Delta)]^{-\gamma}$, $V'(\Delta) \equiv \oint \sqrt{g} d\theta d\zeta$ であり, B は (10) で与えられるとする。 $\Psi_0(\Delta)$, $\Psi_3(\Delta)$, $m(\Delta)$ を固定し, $r(\Delta, \theta, \zeta)$, $F(\Delta, \theta, \zeta)$ を変化させたとき, (18) の極小値を与えるような配位がもし存在するならば, その配位は MHD 的に安定な平衡解を与える (KRUSKAL の変分原理)。

この変分原理は, 非対称な場合の MHD 平衡を数値的に計算するために利用することができる。実際に, BAVER -

BETANCOURT - GARABEDIAN のコード, CHODURA - SCHLÜTER のコードは, これと同種の変分原理に基づいて, ポテンシャルエネルギーの最小化によって平衡解を求めるものである。

拘束条件が $\bar{\psi}_0, \bar{\psi}_3, m$ という量以外の量に対するものである場合には, (18) の最小化という手法を用いることはできないが, この変分原理を MHD 力の計算に用いることはできる。

5. 逆平衡法のやり方

円柱座標 (R, ϕ, Z) を用いて

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_Z, \\ R &= R_0 + x(\Delta, \zeta) - \rho(\Delta, \theta, \zeta) \cos \theta, \\ Z &= y(\Delta, \zeta) + \rho(\Delta, \theta, \zeta) \sin \theta, \\ \phi &= \zeta \end{aligned} \right\} (19)$$

とおく。 $\mathbf{r}$ のこの表現を (18) に代入し, ρ, x, y について変分をとると,

$$\delta E = - \int \delta \rho \cdot f_\rho \, ds d\theta d\zeta - \int (\delta x \cdot f_x + \delta y \cdot f_y) \, ds d\zeta, \quad (20)$$

の関係から, MHD 力の成分 f_ρ, f_x, f_y を求めることができる。これから,

$$M[\rho, x, y] = \int |f_\rho|^2 \, ds d\theta d\zeta + \int (|f_x|^2 + |f_y|^2) \, ds d\zeta, \quad (21)$$

なる汎関数をつくり, この最小化を行うことによって MHD

D 平衡を求めることができる。(20)の関係を導く際に、F は常に (12) の関係を満足しているものとした。実際の数値計算においては、(19) を更に有限個の未知数を用いた近似式によって置きかえるから、(21) は有限個の二乗和になる。

§6. 大アスペクト比のトカマクの例

軸対称の場合には、(12) は簡単に解けて、

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \frac{\frac{\sqrt{g}}{g_{33}} \Psi'_3(\Delta)}{\oint \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} d\theta} \quad (22)$$

となるから、(18) は

$$\left. \begin{aligned} E &= \int d\Delta \left\{ \frac{|\Psi'_\theta|^2}{4\pi\mu_0} W(\Delta) + \frac{\pi}{\mu_0} \frac{|\Psi'_3|^2}{U(\Delta)} + \frac{m}{\gamma-1} [V'(\Delta)]^{1-\gamma} \right\} \\ W(\Delta) &\equiv \oint \frac{g_{\theta\theta}}{\sqrt{g}} d\theta, \quad U(\Delta) \equiv \oint \frac{\sqrt{g}}{g_{33}} d\theta, \quad V'(\Delta) \equiv \oint \sqrt{g} \cdot 2\pi d\theta \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

となる。

$$\left. \begin{aligned} R &= \frac{1}{\epsilon} R_0 - \rho(\Delta) \cos \theta + \epsilon \Delta(\Delta), \\ Z &= \rho(\Delta) \sin \theta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

とにおいて、 W, U, V' を ϵ のべきに展開すると

$$\left. \begin{aligned} W &= \epsilon \frac{2\pi \rho^2}{R_0 \rho \rho'} \left\{ 1 - \epsilon^2 \left[\frac{\Delta}{R_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{R_0} \frac{\Delta'}{\rho'} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R_0} + \frac{\Delta'}{\rho'} \right)^2 + \dots \right] \right\} \\ U &= 2\pi \epsilon \frac{\rho \rho'}{R_0} \left\{ 1 - \epsilon^2 \left[\frac{\Delta}{R_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{R_0} \frac{\Delta'}{\rho'} + \dots \right] \right\} \\ V' &= \frac{(2\pi)^2}{\epsilon} R_0 \rho \rho' \left\{ 1 + \epsilon^2 \left[\frac{\Delta}{R_0} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{R_0} \frac{\Delta'}{\rho'} + \dots \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(ただし $\rho' = d\rho/ds$, $\Delta' = d\Delta/ds$) となるから, ポテンシャルエネルギーも $E = \overset{(0)}{E} + \epsilon^2 \overset{(1)}{E} + \dots$ と展開し, $\overset{(0)}{E}$ を ρ で変分して

$$B_0 \equiv \epsilon \mathcal{E}_0' / 2\pi R_0 \rho', \quad B_3 \equiv \mathcal{E}_3' / 2\pi \rho \rho', \quad p \equiv m (2\pi R_0 \rho \rho' / \epsilon)^{-1/2} \text{ とおくと}$$

$$\rho' B_0^2 + \rho \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{2} (B_0^2 + B_3^2) + \mu_0 p \right\} = 0 \quad (26)$$

を得る. 次のオーダーでは

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{E} = \frac{2\pi R_0}{\epsilon} \int_0^1 \rho \rho' \left\{ \left(\frac{B_3^2}{2\mu_0} - \frac{B_0^2}{2\mu_0} - p \right) \frac{\Delta}{R_0} + \frac{\rho}{2R_0} \left(\frac{B_3^2}{2\mu_0} + \frac{B_0^2}{2\mu_0} - p \right) \frac{\Delta'}{\rho'} \right. \\ \left. + \frac{B_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{\Delta'}{\rho'} \right)^2 + \left(\frac{\rho}{R_0} \right)^2 \frac{B_0^2 - B_3^2}{4\mu_0} \right\} ds, \quad (27) \end{aligned}$$

これを Δ で変分すると

$$\frac{d}{ds} \left\{ \rho B_0^2 \left(\frac{\Delta'}{\rho'} + \frac{\rho}{R_0} \right) \right\} + \frac{\rho^2}{R_0} \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{2} (B_3^2 - B_0^2) - \mu_0 p \right\} = 0, \quad (28)$$

となり, この式は簡単に解くことができて, 一様電流: $B_0(\rho) = B_a \frac{\rho}{a}$, パラボラ分布: $p(\rho) = p(0)(1 - \rho^2/a^2)$ のときには

$$\Delta(\rho) = - \left(\frac{1}{4} + \mu_0 p(0)/B_a^2 \right) (\rho^2 - a^2)/2R_0 + \Delta(a) \quad (29)$$

となる。

ここで, (27) に離散化近似を行って, と"のような現象がおこるかを見てみることにする. $N+1$ 点 $\Delta_0=1 < \Delta_1 < \dots < \Delta_N=1$ をとり, Δ の区間 $[0, 1]$ を N 点の小区間に分割し, $\Delta_i = \Delta(\Delta_i)$ の値を用いて, $\Delta(\Delta)$ を区分的な折れ線で表わす. そのとき (27) の積分を解析的に行うことが不可能であるから, 数値積分によることにして, 各小区間での積分をその中点での値に区間の巾 $h_i \equiv \Delta_i - \Delta_{i-1}$ をかけたもので置きかえる.

こうして, (27) の近似として

$$E^{(1)} \cong \sum_{j=1}^N h_j \left\{ A_{j-1/2} \frac{\Delta_j + \Delta_{j-1}}{2} + B_{j-1/2} \frac{\Delta_j - \Delta_{j-1}}{h_j} + C_{j-1/2} \left(\frac{\Delta_j - \Delta_{j-1}}{h_j} \right)^2 \right\}, \quad (30)$$

これを Δ_j で微分すると

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{h_j} C_{j-1/2} (\Delta_j - \Delta_{j-1}) + \frac{2}{h_{j+1}} C_{j+1/2} (\Delta_{j+1} - \Delta_j) \\ & = \frac{1}{2} h_j A_{j-1/2} + \frac{1}{2} h_{j+1} A_{j+1/2} + B_{j-1/2} - B_{j+1/2}, \quad (1 \leq j < N), \quad (31) \end{aligned}$$

$$\frac{2}{h_1} C_{1/2} (\Delta_1 - \Delta_0) = \frac{1}{2} h_1 A_{1/2} - B_{1/2}, \quad (32)$$

式(31)は(28)の差分近似であるが, (32)は $\Delta=0$ における境界条件 $\rho B_0^2 \Delta' / \rho' = 0$ に対応するものと考えられる。いま $\Delta \propto \rho$ とすると, $h_1 \rightarrow 0$ のとき $C \propto h_1^3$ であるが, (32)の右辺はこれより0になり方の遅い量 $h_1^2 (B_0^2/2 - \rho)$ を含んでいる。それ故, もしこの項の係数が厳密に0にならなければ, $h_1 \rightarrow 0$ のとき $\Delta_1 - \Delta_0 \rightarrow 0$ とならず, 異常な結果が生ずることになる。

これを避けるには種々の方法が考えられる。一つは, $\Delta_0, \Delta_1, \dots$ など"が独立に変化できると考えるから異常なことになるから, それらを独立でなくしてしまうということが考えられる。(たとえば $\Delta_0 = \Delta_1$ と強制的に置く。 $\Delta(\Delta)$ を Δ について低次の多項式で近似する。など) この場合, 磁気軸近傍での精度の問題が残る。次の方法は, ρ の内挿を ρ^2

で行う，すなわち $p_{i-1/2} = \sqrt{(p_i^2 + p_{i-1}^2)/2}$ とすること，この場合には $\Delta_1 - \Delta_0 \propto h_1^2$ となり， $\Delta_1 - \Delta_0$ の誤差は $\sim 100\%$ 位におさえられる。や三の方法として，より高次の積分公式を用いるなど，(27) の定積分の評価をより精度よく行うことも考えられよう。

§ 7. まとめ.

MHD 平衡を逐平衡法の考え方で取り扱うのは，MHD 平衡問題の本質を反映した自然な行き方であり，特に非対称な場合を取り扱う強くと唯一の方法であるが，数値計算を行う際には，特に磁気軸近傍の取り扱いに慎重な注意が必要である。

参考文献

- F. BAUER, O. BETANCOURT, P. GARABEDIAN: "A Computational Method in Plasma Physics", Springer-Verlag, 1978
- A. BOOZER: Phys. of Fluids 24 (1981) 1991
- R. CHODURA, A. SCHLÜTER: J. Comp. Phys. 41 (1981) 68
- S. HAMADA: Nucl. Fusion 1 (1962) 23
- M. D. KRUSKAL, M. KULSRUD: Phys. of Fluids 1 (1958) 265