

Construction of algebraic vector bundles on non-singular algebraic varieties

広大・理 隅広秀康

§ 1. 序

(1.1) 代数的ベクトル束(以下, ベクトル束と略記する)を扱う方法として色々なものが考えられているが,

(1) Monads,

(2) 基本変換 (Elementary transformations)

はそれらの中でも有用な方法であると思われる。(1) は G. Horrocks [1] により導入されたもので, ベクトル束を層の言葉で記述するものである。この方法は G. Horrocks, W. Barth 氏等を中心に, 主として射影空間 $\mathbb{P}^n$ 上のベクトル束及びそれらの Moduli 空間の研究に用いられ種々の有用な結果を得ている。一方 (2) は丸山氏 [3], [4] により導入されたもので, (1) が代数的な方法であると言えらるのに対し, 幾何学的な方法であると言えらる。[3] で導入された基本変換

は高次元代数多様体上のベクトル束を扱うには多少不便な面を具している。[9] でその自然な一般化がなされ、任意次元の代数多様体上でベクトル束の基本変換を扱うことが出来るようになった。この小論では、この基本変換の観点により任意次元の非特異代数多様体上のベクトル束の構成法(定理(2.7))を示し、その応用として $\mathbb{P}^4$ 上の Horrocks-Mumford バンドルを幾何学的に構成しよう。

(1.2) 笹倉氏 [6] によっても、任意次元の非特異代数多様体上のベクトル束の構成が行なわれている。また、丸山氏 [5] によっても、基本変換の一般化が扱われている。

§ 2. 正則ベクトル束

非特異代数多様体上のベクトル束の一つの構成法を示そう。先ず、[9] で得られたいくつかの結果を復習しよう。[] の中は [9] で対応している Definition, Lemma ... 等である。

(2.1) 定義 [Def. (1.1)]. X を局所ネータースキーム, E を X 上の r -バンドル, $\pi: P(E) \rightarrow X$ を E に付随した X

上の射影的バンドルとする。 (Z, Y) を次の様な閉部分スキームの組とする。 Z は X の埋蔵サイクルを持たない正 Cartier 因子, Y は $p(E)$ の閉部分スキームで Z の上に乗っているものとする。次の条件が満たされているとき, (Z, Y) は条件 $(*)_m$ ($1 \leq m \leq r-1$) を満たすと言う:

Z の各点 x に対し, x の適当なアフィン開近傍 $U = \text{Spec}(A)$ が存在し, 次の性質が成立する。

$$(i) \quad E|_U \simeq \bigoplus^r \mathcal{O}_U.$$

(ii) Z は U 上 A の非零因子 $\Delta = 0$ で定義され, Y は $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{P}^{r-1}$ 上連立一次方程式:

$$\begin{cases} \Delta_{11}X_1 + \cdots + \Delta_{1r}X_r = 0 \\ \vdots \\ \Delta_{r1}X_1 + \cdots + \Delta_{rr}X_r = 0 \end{cases} \quad (\Delta_{ij} \in A)$$

ただし, $\{X_1, \dots, X_r\}$ は $\mathbb{P}^{r-1}$ の斉次座標である。

で定義されている。

(iii) $S = (\Delta_{ij}) \in M(r, A)$ を上記連立一次方程式の係数行列とする。このとき, 適当な行列 $S' \in M(r, A)$ が存在して

$$S \cdot S' = S' \cdot S = \Delta I_r \quad (I_r = \text{単位行列}),$$

Z の各生成点における S の階数 $= m$,

Z の各生成点における S' の階数 $= r-m$,

をみたす。

(2.2) (Z, Y) を (2.1) の条件 $(*)_m$ ($1 \leq m \leq r-1$) をみたす閉部分スキームの組とし, L_E を $P(F)$ の tautological 線束とする。 I_Y を Y の定義イデアルとすると, 次の完全列:

$$0 \rightarrow I_Y \otimes L_E \rightarrow L_E \rightarrow \mathcal{O}_Y \otimes L_E \rightarrow 0$$

が存在する。この完全列の π による direct images を考えて完全列:

$$0 \rightarrow \pi_*(I_Y \otimes L_E) \xrightarrow{\alpha} \pi_*(L_E) \xrightarrow{\beta} \pi_*(\mathcal{O}_Y \otimes L_E) \rightarrow$$

を得る。従って, $\text{Ker}(\beta) = \pi_*(I_Y \otimes L_E) \in E'$, $\text{Im}(\beta) \in F$ となることにより, 次の完全列:

$$0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0$$

を得る。この完全列に関して, 次の補題が成立する。

補題 [Lemma (1.3)] (1) E' は X 上の r -バンドルである。

(2) F は $\mathcal{O}_Z$ -coherent sheaf で, $Y = P(F)$ である。

(3) Z が正規スキームならば, F は reflexive $\mathcal{O}_Z$ -sheaf である。

$$\text{rank}(F) = r-m,$$

$$\text{Sing}(F) = \{x \in Z \mid \dim(\pi|_Y)^{-1}(x) \geq r-m\}.$$

(2.3) 従って, 条件 $(*)_m$ ($1 \leq m \leq r-1$) を満たす閉部分スキームの組 (Z, Y) を与えることにより, X 上に新しい r -バシールド F' を得る。

定義 [Def. (1.6)]. F' を Y を中心とする F の基本変換 (elementary transformation) といい, $F' = \text{elem}_Y(F)$ で表わす。

(a) [(1.5.3)] F' の変換行列は具体的に次の様に表わされる。 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ($\alpha \in \Lambda$) を X のアフィニ被覆で閉部分スキームの組 (Z, Y) が各アフィニ集合 $U_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$ ($\alpha \in \Lambda$) 上で (1.1) の条件 $(*)_m$ を満たしているものとする。また, U_α, U_β での Z, Y の定義方程式をそれぞれ

$$Z: \Delta_\alpha = 0, \quad Z: \Delta_\beta = 0,$$

$$Y: S_\alpha^t X_\alpha = 0, \quad Y: S_\beta^t X_\beta = 0,$$

ただし, $\Delta_\alpha \in A_\alpha, \Delta_\beta \in A_\beta, S_\alpha \in M(r, A_\alpha), S_\beta \in M(r, A_\beta)$ とし, $X_\alpha = (X_{\alpha 1}, \dots, X_{\alpha r}), X_\beta = (X_{\beta 1}, \dots, X_{\beta r})$ は $\mathbb{P}^r$ の斉次座標とする。

とする。 F の $U_\alpha \cap U_\beta$ での変換行列を $G_{\beta\alpha}$ とする。このとき, $H_{\beta\alpha} \in GL(r, \mathcal{O}_{U_\alpha \cap U_\beta})$ を

$$S_\alpha \cdot {}^t G_{\beta\alpha} = H_{\beta\alpha} \cdot S_\beta$$

をみたすものとするとき, ${}^t H_{\beta\alpha}$ が F' の $U_\alpha \cap U_\beta$ における変換

行列である。

(b) [(1.6)] E と E' は次の様に互いに双対関係にある。

次の可換図式を考えよう。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & E \otimes I_Z & = & E \otimes I_Z & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 0 & \rightarrow & E' & \rightarrow & E & \rightarrow & F \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \rightarrow & F' & \rightarrow & E|_Z & \rightarrow & F \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

E' に付随した射影的バンドル $\pi': p(E') \rightarrow X$ の閉部分スキーム $p(F) \in Y'$ とあると, 閉部分スキームの組 (Z, Y') は条件 $(*)_{r-m}$ をみたし, $\text{elem}_{Y'}(E') \simeq E \otimes \mathcal{O}_X(-Z)$ である。

(2.4) 非特異射影多様体上のすべてのベクトル束は線束のテンソル積を除いて, 自明なベクトル束に適当な基本変換をほどこして得られる。

定理 [Theorem (3.2)]. X を非特異射影多様体, E を X 上の r -バンドルとする。このとき, 次の条件をみたす

閉部分スキームの組 (Z, Y) が存在する。

(1) Z は X の正規既約因子である。

(2) Y は $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ の閉部分スキームで、 (Z, Y) は条件 $(*)_1$ をみたす。

(3) $\text{elem}_Y(\bigoplus \mathcal{O}_X) \simeq E \otimes \mathcal{O}_X(-Z)$ 。

従って、補題 (2.2), 定理 (2.4) より X 上のすべてのベクトル束は X 上の正規既約因子 Z と $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ の閉部分スキーム Y で条件 $(*)_1$ をみたすものを与えることにより得られることが解る。

(2.5) 定理 (2.4) における Y は次の様にして得られる。

$W = \text{Reg}(Z) = \{x \in Z \mid x \text{ は } Z \text{ の単純点}\}$, $j: W \rightarrow Z$ を自然な開写像とする。 Z 上の $(r-1)$ 次元線形束 (W_1, L) ($L = k f_1 + \dots + k f_r$, $f_i \in k(Z)$) を W 上に制限して得られる単射:

$$\mathcal{O}_W(-W_1) \ni g \xrightarrow{f} (g f_1, \dots, g f_r) \in \bigoplus \mathcal{O}_W$$

を f とし, $F(f) = \text{Coker}(f)$ とする。

命題 [Prop. (3.4.3)]. Z 上の適当な $(r-1)$ 次元線形束

(W_1, L) ($L = k f_1 + \dots + k f_r$, $f_i \in k(Z)$) が存在し, $Y = p(F)$ である。但し, $F = j_*(F(f))$ 。

(2.6) E を代数多様体 X 上の r -バンドル, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$ ($1 \leq i \leq r$) を E の i 個の global sections とする。 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ($\alpha \in \Lambda$) を X のあるアフィノ開被覆で, $E|_{U_\alpha} \simeq \bigoplus^r \mathcal{O}_{U_\alpha}$ ($\alpha \in \Lambda$) をみたすものとする。各アフィノ開集合 $U_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$ 上で,

$$\sigma_j|_{U_\alpha} = (\sigma_{j1}^\alpha, \dots, \sigma_{jr}^\alpha) \quad (\sigma_{jk}^\alpha \in A_\alpha, 1 \leq j \leq i, 1 \leq k \leq r)$$

と表わし

$I_\alpha =$ 行列 (σ_{jk}^α) のすべての i 次小行列式で生成され

た A_α のイデアル

とする。このとき, イデアルの集合 $\{I_\alpha\}$ ($\alpha \in \Lambda$) は張合可能で $\mathcal{O}_X$ のイデアル I を定める, i.e., $I|_{U_\alpha} = I_\alpha$ ($\alpha \in \Lambda$)。イデアル I が定める X の閉部分スキームを $Z(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ で表わす。

(2.7) 以上の準備の下に, 非特異代数多様体 X 上のベクトル束を構成する一つの方法を示そう。この方法は [8] で与えた階数 2 のベクトル束の構成法の拡張であり, [3] で示されている正則ベクトル束の一般化でもある。

定理. X を非特異代数多様体とする。 Z を X の正規既約因子, $\{W_1, \dots, W_r\}$ を Z 上の r 個の正 Weil 因子で次の条

件をみたしているものとする:

$$(i) \quad W_i \sim W_j \text{ (線形同値)} \quad (1 \leq i, j \leq r).$$

$$(ii) \quad \bigcap_{i=1}^r W_i = \emptyset \quad \text{か} \quad \text{又は} \quad \text{codim}_X \left(\bigcap_{i=1}^r W_i \right) \geq r+2.$$

(iii) 各 W_i ($1 \leq i \leq r$) は X で局所的に完全交差している。

このとき, X 上の r -ベクトル E と r 個の global sections $\{s_1, \dots, s_r\}$ で次の性質をみたすものが存在する。

$$(a) \quad \{s_1, \dots, s_r\} \text{ は } k \text{ 上一次独立である。}$$

$$(b) \quad Z = Z(s_1 \wedge \dots \wedge s_r).$$

$$(c) \quad W_i = Z(s_1 \wedge \dots \wedge \hat{s}_i \wedge \dots \wedge s_r) \quad (1 \leq i \leq r).$$

(証明) $X, X \times \mathbb{P}^{r-1}$ の閉部分スキームの組 (Z, Y) で条件 $(*)_1$ をみたすものを作る。(1). (i) より, W_i ($1 \leq i \leq r$) は W_1 と線形同値であるから,

$$W_i = W_1 + (f_i) \quad (\exists f_i \in k(Z), f_1 = 1)$$

と示せる。 $I(Z)$ を Z の X での定義イデアル, $I(W_i)$ を W_i の X での定義イデアル ($1 \leq i \leq r$) とすると,

$$I(W_i)/I(Z) = I(W_1)/I(Z) \cdot f_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

次の完全列を考える:

$$(*) \quad 0 \rightarrow I(W_1)/I(Z) \xrightarrow{f} \bigoplus^r \mathcal{O}_Z \rightarrow F \rightarrow 0$$

$$\text{ただし, } f: I(W_1)/I(Z) \ni g \rightarrow (gf_1, \dots, gf_r) \in \bigoplus^r \mathcal{O}_Z.$$

F は torsion-free $\mathcal{O}_Z$ -coherent sheaf で $\text{rank}(F) = r-1$ である。

$X \times \mathbb{P}^{r-1} = P(\bigoplus \mathcal{O}_X)$ の閉部分スキーム $P(F)$ を Y とする。(2).

(Z, Y) が条件 $(*)_1$ をみたすことを示そう。 $x \in Z$ を任意の点とする。(iii) より, x の適当なアフィン開近傍 $U = \text{Spec}(A)$ が存在して,

$$I(Z) = (0) \quad (0 \in A: \text{非零因子}),$$

$$I(W_i) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}) \quad (\alpha_{i1} \in A, \{\alpha_{i1}, \alpha_{i2}\}: A \text{ の正則列}).$$

従って, 完全列 $(*)$ より Y を $Z \times \mathbb{P}^{r-1}$ の閉部分スキームとみたとき Y は次の連立一次方程式:

$$\begin{cases} \overline{\alpha_{11}} X_1 + \overline{\alpha_{11}} f_2 X_2 + \cdots + \overline{\alpha_{11}} f_r X_r = 0 \\ \overline{\alpha_{21}} X_1 + \overline{\alpha_{21}} f_2 X_2 + \cdots + \overline{\alpha_{21}} f_r X_r = 0 \end{cases}$$

ただし, “ $\overline{}$ ” は $I(W_i)/I(Z)$ における剰余類を表わす。

で定義される。

Case a). $x \notin \bigcup_{i=1}^r W_i$: $x \notin W_1, \alpha_{11}(x) \neq 0$ と仮定する。このとき, Y は次の一次方程式:

$$X_1 + f_2 X_2 + \cdots + f_r X_r = 0$$

で定義され, 各 $f_i (1 \leq i \leq r)$ は x で正則である。従って, $g_i (1 \leq i \leq r)$ を x で正則な X の有理関数で $\overline{g_i} = f_i$ をみたすものとするとき, Y は $U \times \mathbb{P}^{r-1}$ の閉部分スキームとして次の連立一次方程式によって定義されている (必要ならば, U を各 g_i の共通定義域に取りかえる):

$$\begin{cases} X_1 + g_2 X_2 + \dots & \dots + g_r X_r = 0 \\ & \Delta X_2 & & = 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \Delta X_r = 0. \end{cases}$$

さらに,

$$\begin{pmatrix} \Delta & -g_2 & \dots & -g_r \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g_2 & \dots & g_r \\ & \Delta & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Delta \end{pmatrix} = \Delta I_r$$

が成立する。

(case d). $x \in \bigcap_{i=1}^r W_i$: $I(Z)_x \not\subseteq \mathcal{M}_x I(W_i)_x$ と仮定して矛盾を示す (ただし, $\mathcal{M}_x$ は x の定める極大イデアルである)。
 $I(Z)_x \not\subseteq \mathcal{M}_x I(W_i)_x$ ならば, $\dim I(W_i)/I(Z) \otimes k(x) = 1$, i.e., $(I(W_i)/I(Z))_x$ は一つの元 $\bar{t}$ ($t \in I(W_i)$) で生成される。故に $(I(W_i)/I(Z))_x$ は一つの元 $\bar{t}_i = \bar{t} f_i$ ($t_i \in I(W_i)_x$, $1 \leq i \leq r$) で生成される。従って

$$I(W_i)_x = (\Delta, t_i)_x \quad (1 \leq i \leq r)$$

であるから, $\text{codim}_x \left(\bigcap_{i=1}^r W_i \right) \geq r+2$ になる。故に, $I(Z)_x \subseteq \mathcal{M}_x I(W_i)_x$ ($1 \leq i \leq r$) である, i.e., $x \in \text{Sing}(Z)$ 。さて, $\dim(I(W_i)/I(Z) \otimes k(x)) = 2$, $(I(W_i)/I(Z))_x = (\bar{\sigma}_{1i} f_i, \bar{\sigma}_{2i} f_i)_x$ であるから,

$$I(W_i)_x = (\sigma_{1i}, \sigma_{2i}) \quad (\exists \sigma_{1i}, \sigma_{2i} \in A)$$

$$\text{ただし, } \overline{a_{1i}} = \overline{a_{11}} f_i, \overline{a_{2i}} = \overline{a_{21}} f_i$$

と表わせる。2次小行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} \quad (2 \leq i \leq r)$$

の区への制限は0であるから, 各 i ($2 \leq i \leq r$) に対し

$$(**) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{21} & a_{2i} \end{vmatrix} = a u_i \quad (\exists u_i \in A)$$

のとき, $u_i(x) \neq 0$ ($2 \leq i \leq r$) である。 $u_i(x) = 0$ ($2 \leq i \leq r$) とし矛盾を示す。 $a \in I(W_1)_x$ であるから,

$$a = x_1 a_{11} + x_2 a_{21} \quad (\exists x_1, x_2 \in A)。$$

$\{a_{11}, a_{21}\}$ は正則列であるから, 上式を(**)に代入して

$$a_{1i} = -x_2 u_i + a_{11} v_i \quad (\exists u_i \in A)$$

$$a_{2i} = x_1 u_i + a_{21} v_i。$$

従って, $\text{codim}_X(\bigcap_{i=1}^r W_i) \leq r+1$ と再び仮定に反する。 $u_2(x) \neq 0$ と仮定する。このとき, Y は $U \times \mathbb{P}^{r+1}$ の閉部分スキームとして連立一次方程式:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \cdots & \cdots + a_{1r} X_r = 0 \\ a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \cdots & \cdots + a_{2r} X_r = 0 \\ & a X_3 \quad \cdots = 0 \\ & \vdots \\ & \cdots, \quad a X_r = 0 \end{array} \right.$$

で定義される。さらに,

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \in M(2, A)$$

を

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a I_2$$

をみたすものとする。各 i ($3 \leq i \leq r$) に対し

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix} \quad (\exists u_i', v_i' \in A)$$

何故ならば、左辺の行列を $\mathbb{Z}$ に制限したものは 0 に等しい。

従って、次の等式が成立する:

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} t_{11} & t_{12} & -u_3' & \cdots & -u_r' \\ t_{21} & t_{22} & -v_3' & \cdots & -v_r' \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2r} \\ \hline & & a & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & a \end{array} \right) = a I_r$$

以上により, $(\mathbb{Z}, Y)$ は条件 $(*)_1$ をみたす開部分スキームの組である。(3). $E' = \text{elem}_Y(\bigoplus \mathcal{O}_X)$ とすると, E' は X 上の r -バンドルである。 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ ($\alpha \in \Lambda$) を X のアフィニル被覆で, $(\mathbb{Z}, Y)$ が各アフィニル集合 U_α 上で条件 $(*)_1$ をみたしているものとする。 $\mathbb{Z}, Y$ の U_α, U_β での定義方程式をそれぞれ

すなわち

$$Z : s_\alpha = 0, \quad Z : s_\beta = 0,$$

$$Y : s_\alpha {}^t x_\alpha = 0, \quad Y : s_\beta {}^t x_\beta = 0,$$

とし、 $s'_\alpha, s'_\beta \in s_\alpha, s_\beta$ に付随する行列とする。 $H_{\beta\alpha} \in$

$GL(r, \mathbb{C}_{U_\alpha \cap U_\beta})$ を $s_\alpha = H_{\beta\alpha} s_\beta$ をみたすものとする、

(2.3)(a) より E' は $U_\alpha \cap U_\beta$ での変換行列は ${}^t H_{\beta\alpha}$ であり

、 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で等式：

$${}^t s'_\beta = (s_\beta / s_\alpha) {}^t H_{\beta\alpha} \cdot {}^t s'_\alpha$$

が成り立つ。故に、 $E = E' \otimes \mathcal{O}_X(Z)$ となると E は次の様、即ち

何個の global sections $\{s_1, \dots, s_r\}$ を持つ： 各アフィニ開集

合 U_α 上、

$$s_i|_{U_\alpha} = s'_\alpha \text{ の } i \text{ 行 } (1 \leq i \leq r)。$$

$\{s_1, \dots, s_r\}$ が定める性質 (a), (b), (c) をみたすことを示さ

う。(2) の証明から解きように、各 U_α は次の2通りの場合に

に分けられる、i.e., Case a) のとき、 $U_\alpha \cap \bigcap_{i=1}^r W_i = \emptyset$, Case b)

のとき、 $U_\alpha \cap \bigcap_{i=1}^r W_i \neq \emptyset$ 。この2通りの場合に従って (a), (b),

(c) がみたすことを示す。Case a) のとき： (2) の

証明中と同様に、 $U_\alpha \cap W_1 = \emptyset$ と仮定し同じ記号を用いる。

このとき、

$$s_1 = (s, -g_2, \dots, -g_r)$$

$$s_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\alpha_r = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

である。何故ならば、

$$S'_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & -g_2 & \dots & \dots & -g_r \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & 0 & \ddots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

従って容易に、 $Z = Z(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)$, $W_i = Z(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \dots \wedge \alpha_r)$ ($1 \leq i \leq r$) であることが確かめられる。Case 1) のとき: (2) の証明中と同様に仮定し、同じ記号をもちいる。このとき、同様にして、

$$\alpha_1 = (t_{11}, t_{12}, -u'_3, \dots, -u'_r)$$

$$\alpha_2 = (t_{21}, t_{22}, -u'_3, \dots, -u'_r)$$

$$\alpha_3 = (0, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_r = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

故に容易に、 $Z = Z(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_r)$, $W_i = Z(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \hat{\alpha}_i \wedge \dots \wedge \alpha_r)$ ($1 \leq i \leq 2$) であることが示される。また、 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ が k 上一次独立であることも明らかである。 Q.E.D.

(2.8) 定理(2.7)で定まる X 上の r -バンドルは Z 上の (

$(r-1)$ 次元線形束 (W_i, L) により (同型を除いて) 一意に定まる。 (W_i, L) を定理 (2.7) にあたる Z 上の $(r-1)$ 次元線形束とすると: $W_i = W_i + (f_i) \ (1 \leq i \leq r)$, $L = kf_1 + \dots + kf_r$. また, (W'_i, L') を Z 上の $(r-1)$ 次元線形束で定理 (2.7) の条件を満たしているものとする: $W'_i = W'_i + (g_i) \ (1 \leq i \leq r)$, $L' = kg_1 + \dots + kg_r$. このとき, (W_i, L) と (W'_i, L') が同じ, i.e.,

$$W'_i = W_i + (\varphi) \ (\exists \varphi \in k(Z)), \quad \varphi L' = L$$

ならば, $(W_i, L), (W'_i, L')$ によって定まる X 上の r -バンドルは同型である。何故ならば, $(W_i, L), (W'_i, L')$ によって定まる Z 上の完全列をそれぞれ

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & I(W_i)/I(Z) & \xrightarrow{f} & \bigoplus^r \mathcal{O}_Z & \rightarrow & F \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \varphi & & \downarrow \sigma & & \\ 0 & \rightarrow & I(W'_i)/I(Z) & \xrightarrow{g} & \bigoplus^r \mathcal{O}_Z & \rightarrow & F' \rightarrow 0 \end{array}$$

とする。 $\varphi L' = L$ より, $\exists \sigma \in GL(r, k)$ での図式を可換にするものが存在する, i.e., $g \circ \varphi = \sigma \circ f$. 従って, $X \times \mathbb{P}^{r-1}$ の閉部分スキーム $Y = p(F)$, $Y' = p(F')$ に対し, $Y' = \sigma(Y)$. 故に, $\text{elem}_Y(\bigoplus^r \mathcal{O}_X) \simeq \text{elem}_{Y'}(\bigoplus^r \mathcal{O}_X)$ ([9] Prop. (2.3)).

(2.9) 定理 (2.7) にあって, $\bigcap_{i=1}^r W_i = \phi$ ならば完全列:

$$0 \rightarrow I(W_i)/I(Z) \rightarrow \bigoplus^r \mathcal{O}_Z \rightarrow F \rightarrow 0$$

にあたる F は Z 上のベクトル束である, i.e., $Y = p(F)$ は Z 上

の $\mathbb{P}^{r-2}$ -バンドル である。また、定理 (2.7) の証明より 解る
 ように、一般的に $\bigcap_{i=1}^r W_i \subseteq \text{Sing}(Z)$ 。従って、 Z が X の非特異
 因子ならば定理 (2.7) で定まる X 上の r -バンドル は [3] で
 示されている正則ベクトル束に他ならない。

X を非特異代数多様体とする。 Z を X 上の正則既約因子、
 $\mathcal{L} = (W, L)$ を Z 上の $(r-1)$ 次元線形束で次の条件をみたし
 ているものとする：

- (1) $\mathcal{L}$ は固定成分をもたなく、 $\text{codim}_X B_0(\mathcal{L}) \geq r+2$ 。
- (2) $\mathcal{L}$ は合成されている。
- (3) $\mathcal{L}$ の一般因子は X で局所的に完全交差である。

定義。上の仮定の下に、定理 (2.7) において $\mathcal{L}$ によって定
 まる X 上の r -バンドル を正則ベクトル束という。

§ 3. 例題

定理 (2.7) を利用して種々のベクトル束が構成されるが、
 ここでは $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ 上の Horrocks-Mumford バンドル を幾何学的に構
 成しよう。

(3.1) ある3次元5次超曲面

X を次の $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ の超曲面とする:

$$X_0^5 + X_1^5 + X_2^5 + X_3^5 + X_4^5 - 5 X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 = 0.$$

X は種々の美しい幾何学的性質をもっている。以下, [7] で示されているものの中でベクトル束を構成するのに必要な性質を列記しよう。

a) X の対称性. $\zeta = e^{2\pi i/5}$

$$B = \{ (\zeta^{a_0}; \dots; \zeta^{a_4}) \mid \sum_{i=0}^4 a_i \equiv 0 \pmod{5} \} \subset \mathrm{PGL}(5, \mathbb{C}) \\ \simeq (\mathbb{Z}/5)^{\oplus 3},$$

$$S_5 \subset \mathrm{PGL}(5, \mathbb{C}) \quad (S_5 = 5\text{次対称群}),$$

$$G = B \ltimes S_5 \quad (\text{半直積}),$$

とすると, $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ である。

b) $S = \mathrm{Sing}(X)$.

$$S = \{ (\zeta^{a_0}; \dots; \zeta^{a_4}) \mid \sum_{i=0}^4 a_i \equiv 0 \pmod{5} \} \quad (\#S = 125) \text{ である}$$

り, S は Nodes の集合である。また, G は S に推移的に作用している。

c) X 上の2次曲面,

$$\sum_{i=0}^4 X_i^5 - 5 X_0 X_1 X_2 X_3 X_4 = \sigma_1 \sum_{i=0}^4 X_i^4 - \sigma_2 \sum_{i=0}^4 X_i^3 + \sigma_3 \sum_{i=0}^4 X_i^2 - \sigma_4 \sum_{i=0}^4 X_i, \\ \sum_{i=0}^4 X_i^3 = \sigma_1^3 - 3 \sigma_1 \sigma_2 + 3 \sigma_3, \quad \sum_{i=0}^4 X_i^2 = \sigma_1^2 - 2 \sigma_2,$$

ただし, σ_1, σ_2 は1次, 2次の基本対称式である。

であるから, X は2次曲面 $Z: \sigma_1 = \sigma_2 = 0$ を含む。

α) X 上の線形束

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \zeta & & & \\ & & \zeta^2 & & \\ & & & \zeta^3 & \\ & & & & \zeta^4 \end{pmatrix} \in G,$$

$A = \sum_{i=0}^4 \tau^i(Z)$ とする。 A は次数 = 10 の X 上の被約 Weil 因子である。 $|A|$ を A の完備線形束とする。 $|A|$ に関して次の定理が成り立つ。

定理 ([7] Prop. 4.7). 上記仮定の下に,

(1) $\dim |A| = 1,$

(2) $B_0(|A|) \subseteq S,$

(3) $|A|$ の一般因子は 2 次元アベル多様体である。

(3.2) Horrocks - Mumford バンデッドル

Gr. Horrocks と D. Mumford は次の Monad (M) の cohomology バンデッドルとして $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ 上の階数 2 の stable バンデッドル E を定義した [2].

$$(M) \quad \bigoplus^5 \mathcal{O}_P(2) \rightarrow \bigoplus^2 (\wedge^2 \Omega_P^1)(5) \rightarrow \bigoplus^5 \mathcal{O}_P(3)$$

$$\text{ただし, } P = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$$

我々は定理 (2.7), (3.1) を利用して, Horrocks - Mumford

バニールを幾何学的に再構成しよう。

$$X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4,$$

$$X \cap Z : x_0^5 + x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 - 5 x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

$$\mathcal{L} = |A|$$

とすると, 定理 (3.1) より $(X, Z, \mathcal{L})$ は定理 (2.7) の仮定を満たす。従って, $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^4$ 上に階数 2 のベクトル束 E' と global sections $\{s, t\}$ が存在し,

$$Z = Z(s \wedge t),$$

$$A_1 = Z(s), \quad A_2 = Z(t),$$

ただし, A_1, A_2 は $\mathcal{L}$ の一般因子である。

を満たし, 次の可換図式が成り立つ:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & \bigoplus^2 \mathcal{O}_p & = & \bigoplus^2 \mathcal{O}_p & & & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 (***) \quad 0 \longrightarrow E' & \longrightarrow & \bigoplus^2 \mathcal{O}_p(5) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \parallel & \\
 0 \longrightarrow F' & \longrightarrow & \bigoplus^2 \mathcal{O}_Z(5) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & & \\
 & 0 & & 0 & & &
 \end{array}$$

$$\text{ただし, } F' = \mathcal{I}(A_1)/\mathcal{I}(Z) \otimes \mathcal{O}_p(5).$$

F' は Horrocks-Mumford バニール E と同型であることを示す

う。 E, E' は共に階数 2 の stable バンドルで,

$$c_1(E) = c_1(E') = 5H, \quad c_2(E) = c_2(E') = 10H^2$$

であるから, 零でない準同型 $\phi: E \rightarrow E'$ が存在すること, i.e., $H^0(E^* \otimes E') \neq (0)$ を示せば良い。可換図式 (***) に E^* をテンソルして, 次の完全列を得る:

$$0 \rightarrow \bigoplus^2 H^0(E^*) \rightarrow H^0(E^* \otimes E') \rightarrow H^0(I(A_1)/I(Z)^{(5)} \otimes E^*) \rightarrow \bigoplus^2 H^1(E^*)$$

[2] より,

$$H^0(E^*) = H^0(E(-5)) = 0,$$

$$H^1(E^*) = H^1(E(-5)) = 0$$

である。従って, $H^0(E^* \otimes E') \simeq H^0(I(A_1)/I(Z) \otimes E)$ 。一方,

[7] Prop. 4.22 より, A_1 は E のある global section の zero locus である。故に, $0 \neq H^0(I(A_1)/I(Z) \otimes E) \simeq H^0(E^* \otimes E')$ である。 Q.E.D.

References

- [1] G. Horrocks : Vector bundles on the punctured spectrum of a local ring, Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 689-713
- [2] G. Horrocks, D. Mumford : A rank 2 vector bundle on $\mathbb{P}^4$ with 15,000 symmetries, Topolo

99 12 (1973), 63 - 81

- [3] M. Maruyama : On a family of algebraic vector bundles, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Kinokuniya (1973), 95 - 149
- [4] M. Maruyama : Elementary transformations in the theory of algebraic vector bundles, Lect. Notes in math. 961 (1983), 241 - 266, Springer-Verlag
- [5] M. Maruyama : Elementary transformations の一般化, この報告集 (1985)
- [6] N. Sasakura : A stratification theoretical method of constructions of holomorphic vector bundles, Preprint (1985)
- [7] C. Shoen : Algebraic cycles on desingularized nodal hypersurfaces, Preprint
- [8] H. Sumihoro : Construction of algebraic vector bundles of rank 2 on non-singular algebraic varieties of arbitrary dimensions, 代数幾何学にポジューム記録 (1982), 132 - 133
- [9] H. Sumihoro : Elementary transformations of

algebraic vector bundles , Preprint (1985)