

ファジイ数間のあるパラメトリックな全順序関係と その応用について

創価大・工 古川 長太 (Nagata Furukawa)

1. はじめに

目的関数がファジイ数で与えられるような最適化問題を、ファジイマックス順序基準の下で解くと、ファジイマックス順序が半順序であるために、一般に最大解（最小解）は存在することなく、非常に多くの極大解（極小解）が存在する。ファジイ線形計画の場合は、クリスプな多目的線形計画問題に変換されるので、極大解（極小解）のすべてを求めることは比較的容易である。これに対してファジイ動的計画問題では、ことはそれほど容易ではない。本報告では、主としてファジイ動的計画問題に有効である最適化基準として、パラメトリックなものを幾つか紹介する。これらを用いて最適化を試みることにより、ファジイマックス順序に関する最大解（最小解）が存在する場合はそれを、存在しない場合は極大解（極小解）のうち重要なものはすべて検出できることが示される。

なお本報告は、参考文献で挙げた報告者自身によるものの続編で、一部分それと重複していることを付記しておく。

2. ファジイ数とファジイマックス順序

一般にファジイ集合 A, B のメンバーシップ関数を μ_A, μ_B で表す。

定義 2.1 μ_A が次の (i), (ii) をみたすとき、 A をファジイ数とよぶ。

- (i) $\mu_A: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$,
- (ii) 実数 m が一意に存在して次をみたす:

$$\begin{cases} \mu_A(m) = 1, \\ \mu_A(\cdot) \text{ is nondecreasing on } (-\infty, m], \\ \mu_A(\cdot) \text{ is nonincreasing on } [m, +\infty). \end{cases}$$

ファジイ数 A に対して上の (ii) で定まる m を A の center とよび、 m_A で表す。同様にファジイ数 B, C の center を m_B, m_C とかく。

ファジイ数の全体を $\mathbf{F}$ で表す。実数はファジイ数の特別な場合であって、

$$\mathbf{R} \subset \mathbf{F}$$

の関係が成立する。

定義 2.2 $\mathbf{F}$ の要素 A, B に対して

$$A \preceq B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i) } m_A \leq m_B, \\ \text{(ii) } m_A \leq \exists c \leq m_B \\ \quad \text{such that} \\ \quad \left[\begin{array}{l} \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad \forall x < c, \\ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad \forall x > c. \end{array} \right. \end{cases}$$

上の定義は表現は異なるが、Dubois - Prade が提案したファジイマックス順序 (fuzzy max order) と同値である。

補題 2.1 実数 a, b に定義 3.2 の大小関係を適用すると

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \leq b.$$

定理 2.1 定義 2.2 で導入した大小関係は $\mathbf{F}$ の上で半順序の公理をみたす。

定義 2.3 $L: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は次の条件をみたすとする。

- (i) $L(x) = L(-x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$,
- (ii) $L(x) = 1 \quad \text{iff } x = 0$,
- (iii) L は $[0, +\infty)$ 上で広義単調減少,

- (iv) $x_0 = \inf \{x > 0 \mid L(x) = 0\}$ とおくとき $0 < x_0 < +\infty$ が成り立つ。

このとき L を型関数 (shape function) と呼び、(iv) の x_0 を L の零点と呼ぶ。

定義 2.4 m を任意の実数、 α を任意の正数とする。ファジイ数 A のメンバーシップ関数 μ_A が型関数 L を使って

$$\mu_A(x) = L((x-m)/\alpha) \vee 0, \quad x \in \mathbf{R}, \quad (2.1)$$

と表されるとき、 A を L -ファジイ数とよぶ。

(2.1)における m は、定義 2.1 により A の center である。(2.1)における α を A の偏差係数 (deviation parameter) とよぶ。 $\alpha = 0$ のときは (3.1) 式は定義出来ないが、そのとき A は実数 m であると定義する。

簡単のために L -ファジイ数 (3.1) をパラメータで表現して

$$A = (m, \alpha)_L$$

と書く。

定理 2.2 L を型関数、 x_0 をその零点とする。このとき

$$\begin{aligned} A &= (m, \alpha)_L, B = (n, \beta)_L, \\ \alpha &\geq 0, \beta \geq 0, \end{aligned}$$

に対して次の関係が成立する。

$$A \preceq B \Leftrightarrow x_0 |\alpha - \beta| \leq (n - m). \quad (2.2)$$

3. パラメトリックな全順序関係

目的関数がファジイ数であるような数理計画問題では、問題のスケールが大きいとファジイマックス順序に関する極大解(極小解)の意味の最適解の個数は、一般に極めて多くなる。これを更にしほり込むにはいろいろな方法が考えられるが、ここでは L -ファジイ数のパラメータに着目した順序を導入する。

定義 3.1 $0 \leq \lambda \leq 1$ を任意に与えておく。 $A = (m, \alpha)_L, B = (n, \beta)_L$ に対して次のように定義する。

$$A \leq_{\lambda} B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i) } A \preceq B, \\ \text{or} \\ \text{(ii) } \lambda x_0 |\alpha - \beta| < n - m < x_0 |\alpha - \beta|, \\ \text{or} \\ \text{(iii) } |n - m| < \lambda x_0 (\beta - \alpha). \end{cases}$$

$$A \leq^\lambda B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)} & A \leq B, \\ & \text{or} \\ \text{(ii)} & 0 < \lambda x_0(\beta - \alpha) \leq |n - m| < x_0(\beta - \alpha), \\ & \text{or} \\ \text{(iii)} & 0 < n - m < \lambda x_0|\alpha - \beta|, \\ & \text{or} \\ \text{(iv)} & m = n \text{ and } \alpha < \beta. \end{cases}$$

定義 3.2 $A = (m, \alpha)_L, B = (n, \beta)_L$ に対して、

$$A \succ \prec B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [\text{neither } A \leq B \text{ nor } B \leq A \text{ holds}].$$

補題 3.1 定義 3.1 の 2 通りの定義のそれぞれにおいて各 case は互いに排反であつて、(i) 以外の各 case では $A \succ \prec B$ が成立する。

補題 3.2 $A = (m, \alpha)_L, B = (n, \beta)_L, C = (l, \gamma)_L, \mu \geq 0$ に対して次のことが成立する。

$$\text{(i)} \quad A \leq_\lambda B \Rightarrow \mu A \leq_\lambda \mu B, A \oplus C \leq_\lambda B \oplus C,$$

$$\text{(ii)} \quad A \leq^\lambda B \Rightarrow \mu A \leq^\lambda \mu B, A \oplus C \leq^\lambda B \oplus C.$$

定理 3.1 定義 3.1 の 2 通りの大小関係はいずれも、 L -ファジイ数の集合上の全順序関係である。

補題 3.3 定義 3.1 は、特に $\lambda = 0$ or 1 の場合は次のようになる。

$$A \leq_0 B \Leftrightarrow m \leq n$$

$$A \leq_1 B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & A \leq B \\ & \text{or} \\ \text{(ii)} & |m - n| < x_0(\beta - \alpha) \end{cases}$$

$$A \leq^0 B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} A \leq B \\ \text{or} \\ \text{(ii)} |m-n| < x_0(\beta-\alpha) \end{cases}$$

$$A \leq^1 B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} m < n \\ \text{or} \\ \text{(ii)} m = n \text{ and } \alpha \leq \beta \end{cases}$$

以下では、 L -ファジイ数の center の値と deviation parameter の値をそれぞれ x 軸、 y 軸にとった xy 平面を考え、 L -ファジイ数 $A = (m, \alpha)_L$ を xy 平面上の点 (m, α) と同一視することにする。

簡単のために $x_0 = 1$ としておく。

補題 3.4 $A = (m, \alpha)_L, B = (n, \beta)_L, C = (l, \gamma)_L$ に対して、もし

$$m < \min\{n, l\} \text{ and } \alpha < \min\{\beta, \gamma\}$$

ならば、 $0 < \lambda < 1$ をどのようにとっても、定義 3.1 のどちらの順序関係に関しても A, B, C の中で A が最小である。

xy 平面における 2 点 A, B を結ぶ線分の勾配を γ_{AB} で表す。

定理 3.2

$$A_i = (m_i, \alpha_i)_L, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

において、

$$\left. \begin{array}{l} m_i < m_{i+1} \\ \alpha_i > \alpha_{i+1} \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.1)$$

とし、さらに

$$A_i \succ A_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

$$\gamma_{A_{i-1}A_i} < \gamma_{A_iA_{i+1}}, \quad i = 2, 3, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

を仮定する。各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して

$$\lambda_{ki} = \frac{m_k - m_i}{\alpha_i - \alpha_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq k$$

とおく。このとき

$$0 < \lambda_{12} < \lambda_{23} < \dots < \lambda_{k-1,k} < \lambda_{k,k+1} < \dots < \lambda_{N-1,N} < 1$$

が成立して、順序関係 $\leq_\lambda$ に関して次のことが成り立つ。

$$\begin{aligned} A_1 &\text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} && \text{if } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{12}, \\ A_2 &\text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} && \text{if } \lambda_{12} < \lambda \leq \lambda_{23}, \\ &\vdots && \vdots \\ A_k &\text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} && \text{if } \lambda_{k-1,k} < \lambda \leq \lambda_{k,k+1}, \\ &\vdots && \vdots \\ A_N &\text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} && \text{if } \lambda_{N-1,N} < \lambda \leq 1. \end{aligned}$$

定理 3. 3

$$A_i = (m_i, \alpha_i)_L, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

において、

$$\left. \begin{aligned} m_i &< m_{i+1} \\ \alpha_i &> \alpha_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

とし、さらに

$$\begin{aligned} A_i &\succ A_{i+1}, && i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \gamma_{A_{i-1}A_i} &> \gamma_{A_iA_{i+1}}, && i = 2, 3, \dots, N-1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

を仮定する。各 $k = 1, 2, \dots, N$ に対して

$$\lambda_{ki} = \frac{m_k - m_i}{\alpha_i - \alpha_k}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad i \neq k$$

とおく。このとき

$$1 > \lambda_{12} > \lambda_{23} > \dots > \lambda_{k-1,k} > \lambda_{k,k+1} > \dots > \lambda_{N-1,N} > 0$$

が成立して、順序関係 $\leq^\lambda$ に関して次のことが成り立つ。

$$\begin{array}{ll}
 A_1 \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} & \text{if } \lambda_{12} \leq \lambda \leq 1, \\
 A_2 \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} & \text{if } \lambda_{23} < \lambda \leq \lambda_{12}, \\
 \vdots & \vdots \\
 A_k \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} & \text{if } \lambda_{k, k+1} < \lambda \leq \lambda_{k-1, k}, \\
 \vdots & \vdots \\
 A_N \text{ is the smallest one among } \{A_1, A_2, \dots, A_N\} & \text{if } 0 \leq \lambda \leq \lambda_{N-1, N}.
 \end{array}$$

定理3.2 と定理3.3 で示されたように 順序関係 $\leq_\lambda$ 及び $\leq^\lambda$ はいずれも仮定 (3.1) 及び (3.2) の下で有効であるが、(3.1) の代わりに

$$\left. \begin{array}{l} m_i < m_{i+1} \\ \alpha_i < \alpha_{i+1} \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.5)$$

と (3.2) の仮定の下では、 λ の値をどのようにとっても

$$A_1 = (m_1, \alpha_1)_L$$

だけしか検出できない。(補題 3.4 を参照)

(3.5) の下で有効な順序関係として、次の2つのものを定義することが出来る。

定義 3. 2 $0 < \lambda < 1$ に対して

$$A \lesssim_{\lambda} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } A \preceq B \\ \text{or} \\ \text{(ii) } 0 < \lambda(m-n) < \lambda|\alpha-\beta| \leq m-n \\ \text{or} \\ \text{(iii) } 0 < n-m < \lambda|\alpha-\beta| \\ \text{or} \\ \text{(iv) } m=n \text{ and } \alpha < \beta \end{array} \right.$$

$$A \lesssim^{\lambda} B \stackrel{\text{def}}{\iff} \left\{ \begin{array}{l} \text{(i) } A \preceq B \\ \text{or} \\ \text{(ii) } 0 < \lambda(n-m) < \lambda|\alpha-\beta| \leq n-m \\ \text{or} \\ \text{(iii) } 0 < m-n < \lambda|\alpha-\beta| \\ \text{or} \\ \text{(iv) } m=n \text{ and } \alpha < \beta \end{array} \right.$$

参考文献

N. Furukawa : A Parametric Total Order on Fuzzy Numbers and a Fuzzy Shortest Route Problem, Optimization vol. 30 (1994), 367 - 377.