

An extension of completely positive maps compatible with the Jones basic construction

Keiko KAWAMURO

1 An induction of a bimodule

Type II_1 factor N, P の bimodule ${}_N X_P$ と N - P cyclic かつ right P -bounded な vector $\xi \in X$ のペア $({}_N X_P, \xi)$ と、CP-map $\phi: N \rightarrow P$ は、[1] に述べられているように、bimodule の conjugate や CP-map の adjoint operation と compatible になるように一対一対応している。

Theorem 1.1 $N \subset M, P \subset Q$ を type II_1 subfactor とし、 ${}_N X_P \subset {}_M Y_Q$ を左右の作用と compatible な bimodule の inclusion とする。以下の条件は同値である。

1. Subfactor の Jones index と bimodule の左次元が等しい。つまり、

$$[M : N] = [Q : P] < \infty, \dim_N X = \dim_M Y < \infty.$$

(この二つの等式から右次元の一致 $\dim X_P = \dim Y_Q$ も導かれる。) さらに、bimodule ${}_N X_P$ に N - P cyclic で右 P -bounded な vector $\xi \in X$ が存在し、それを埋め込み写像 $X \subset Y$ によって Y 埋め込んだものを $\eta \in Y$ とおと、 $\eta \in Y$ は M - Q cyclic かつ右 Q -bounded である。またペア $({}_N X_P, \xi), ({}_M Y_Q, \eta)$ に対応する CP-map をそれぞれ $\phi: N \rightarrow P, \psi: M \rightarrow Q$ とすると、

$$\psi|_N = \phi, \psi^*|_P = \phi^*$$

が成り立つ。

2. Bimodule の同型

$$\tau: {}_N X \otimes_P Q_Q \simeq {}_N M \otimes_M Y_Q,$$

$$\sigma: {}_M M \otimes_N X_P \simeq {}_M Y \otimes_Q Q_P$$

が成立つ。さらに vector $\xi \in X$ と $\eta \in Y$ が上の条件 1 と同じ性質をもつように存在し、

$$\tau(\xi \otimes_P 1) = 1 \otimes_M \eta,$$

$$\sigma(1 \otimes_N \xi) = \eta \otimes_Q 1$$

が成り立つ。

3. Bimodule の同型 $\varphi : {}_N M \otimes_N X_P \simeq {}_N X \otimes_P Q_P$ が成り立つ。 N - P cyclic かつ右 P -bounded な vector $\xi \in X$ が存在し、 $\varphi(1 \otimes_N \xi) = \xi \otimes_P 1$ をみたす。 Bimodule $\text{hom } s \in \text{Hom}({}_M M \otimes_N M_M, {}_M M_M), t \in \text{Hom}({}_Q Q \otimes_P Q_Q, {}_Q Q_Q)$ と φ に対して以下のようなペンタゴン条件が成り立つ。 $\zeta \in {}_N M \otimes_N X_P$ のとき、

$$(1 \otimes_N \varphi)(s^* \otimes_N 1_X)(\zeta) = (\varphi^{-1} \otimes_P 1)(1_X \otimes_P t^*)\varphi(\zeta).$$

この意味するところは、(簡単のため、 $P = N, Q = M$ のときを考えると) ペア $({}_N X_N, \xi)$ が三つ目の条件 (type III factor の sector の half braiding 条件を弱くしたようなものともいえる) をみたせば、ペアに対応する N の CP-map を大きい環 M の CP-map に延長することができる、ということである。

Definition 1.2 ペア $({}_N X_P, \xi), ({}_M Y_Q, \eta)$ が上の定理の条件を満足しているとき

$$({}_N X_P, \xi) \subset ({}_M Y_Q, \eta)$$

とかく。

2 An extension of an inclusion of bimodules

次は $({}_N X_P, \xi) \subset ({}_M Y_Q, \eta)$ から出発して Jones basic construction: $N \subset M \subset M_1, P \subset Q \subset Q_1$ と相性のよくなるように $({}_N X_P, \xi) \subset ({}_M Y_Q, \eta) \subset ({}_{M_1} Z_{Q_1}, \nu)$ を構成したい。そのためには、

$${}_{M_1} Z_{Q_1} := {}_{M_1} M \otimes_N X \otimes_P Q_{Q_1},$$

$\Phi : Y \rightarrow X$ を左右の作用と compatible な直交射影、 $\{m_j\}, \{n_k\}$ をそれぞれ $N \subset M, P \subset Q$ の Pimsner-Popa basis として、

$$\nu := [Q : P]^{-1/2} \sum_{j,k} m_j \otimes_N \Phi(m_j^* \eta n_k) \otimes_P n_k$$

と定義すればよい。左右の M_1, Q_1 作用と内積は、 e, f をそれぞれ $N \subset M, P \subset Q$ の Jones projection とし、 $\mathcal{E}_N : M \rightarrow N, \mathcal{F}_P : Q \rightarrow P$ を trace を保つ conditional expectation とすると、

$$\begin{aligned} (aeb) \cdot x \otimes_N \lambda \otimes_P y \cdot (pfq) &:= a \mathcal{E}_N(bx) \otimes_N \lambda \otimes_P \mathcal{F}_P(y p) q, \\ \langle x \otimes_N \lambda_1 \otimes_P y \mid z \otimes_N \lambda_2 \otimes_P w \rangle_Z &:= \langle \mathcal{E}_N(z^* x) \lambda_1 \mathcal{F}_P(y w^*) \mid \lambda_2 \rangle_X. \end{aligned}$$

ヒルベルト空間 Y の元は

$${}_M Y_Q \ni \eta \mapsto [Q : P]^{-1/2} \sum_{j,k} m_j \otimes_N \Phi(m_j^* \eta n_k) \otimes_P n_k^* \in {}_{M_1} Z_{Q_1}$$

によって Z に norm を保つように埋め込まれている。

References

- [1] S. Popa, Correspondences. preprint.