

代用電荷法による正準スリット領域への 数値等角写像

Numerical Conformal Mappings onto Canonical Slit Domains by the Charge Simulation Method

愛媛大学大学院理工学研究科 天野 要 (Kaname Amano)
岡野 大 (Dai Okano)

Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

1 はじめに

等角写像は関数論の基本的な問題の一つであり、理工学への応用が広い。しかし、その写像関数を厳密に記述できる場合は限られている。それ故、数値等角写像は計算数学における重要な課題として長く研究されてきた [14, 17, 24, 32, 55]。

数値等角写像の方法は与えられた問題領域から標準領域への写像を求める方法と、逆に標準領域から問題領域への写像を求める方法とに大別される。いずれの場合にも等角写像の問題を未知の境界対応関数を含む積分方程式に帰着させることが多い。問題領域から標準領域への場合には、積分方程式は線形で、Symm [51, 52, 53] の積分方程式法が著名である。これは調和関数の 1 重層対数ポテンシャル表現により、等角写像の問題を境界対応関数の導関数であるソース密度を未知量とした第 1 種 Fredholm 型の積分方程式に帰着させたものである。Symm はソース密度を階段関数で近似した。その後、Gaier [18, 19] は解の存在と一意性を証明し、Hayes ら [23] はソース密度を区分多項式で近似して計算精度を改善し、Hough & Papamichael [25, 26] はスプライン関数と特異関数の組み合わせで角点の特異性の問題を解消している。標準領域から問題領域への場合には、積分方程式は非線形で、Theodorsen の積分方程式法 [54] が著名である。これは等角写像の問題を境界対応関数を未知量とした積分方程式に帰着させたものである。数値解法としては様々な反復法が用いられている [20, 21, 22]。

Trefethen [55] は 1980 年代半ばの状況を (a) 新しい方法が次々に提案されている, (b) 科学技術計算の現場との交流が少ない, (c) 一般理論が少ない, (d) ソフトウェアが少ないという理由で、数値等角写像の研究が急速な発展途上にあると記している。ソフトウェアに関しては、線形計算における EISPACK や LINPACK のようなソフトウェアの作成には、数値等角写像の技術がまだ未成熟であることを示唆している。その後、Hough [27] の CONFPACK, Trefethen [56] の SCPACK, Warby [57] の BKMPACK 等が開発されている。これらは単連結領域の等角写像を扱い、SCPACK は MATLAB の Toolbox としても実装されている [14]。

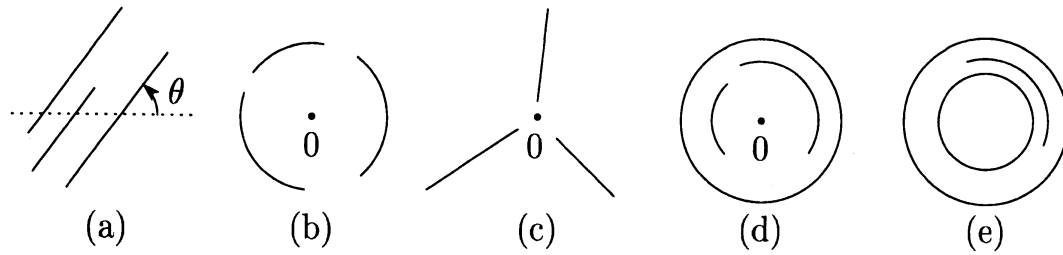


図 1: 正準スリット領域 (Nahari, 1952)

このような背景の中で、天野 [1, 3] は数値等角写像にポテンシャル問題の数値解法として知られていた代用電荷法 [35] を適用した。これは調和関数を N 個の対数関数の 1 次結合で表現し、等角写像の問題をその未定係数を未知量とする連立 1 次方程式に帰着させたものである。この方法は数値積分が不要で、一定の条件下では表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与える。問題領域から標準領域への等角写像で得られた境界上の対応関係を用いて、逆に標準領域から問題領域への近似写像関数を構成することも可能である [2]。同じ頃、桂田・岡本 [29] は代用電荷法に収束証明を与え、誤差が N に対して指数的に減少することを示している。代用電荷法については桂田・岡本 [30, 45]、室田 [36]、緒方ら [40] も参照されたい。

近年、多重連結領域の問題があらためて注目されている。しかし、単位円板領域のような単一の標準領域が存在しないという点で、多重連結領域の等角写像は単連結領域の場合と様相が異なる。等角写像が存在するのは、領域の多重度 n だけでなく、 $3n - 6$ ($n \geq 3$) 個のモジュラスが一致する場合に限られる。そこで、領域の幾何学的な形状に着目して、多重度とモジュラスの値に依存しない正準領域を設定するという方法がとられる。正準領域はスリットを伴うことが多く、図 1 のような (a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域、(d) 円弧スリット円板領域、(e) 円弧スリット円環領域が広く知られている (Nehari [37])。遡って、Koebe [31] は実に 39 種の正準スリット領域を挙げている。また、スリットを伴うことなく、全ての境界が円であるような領域も重要な正準領域である。

本稿の構成は次のとおりである。第 2 章では、正準領域および多重連結領域の等角写像研究の状況を概観する。第 3 章では、代用電荷法を用いて、非有界な多重連結領域から円弧放射スリット領域への近似写像関数を構成し、その有効性を数値例で示す。第 4 章では、同様に直線スリット領域への近似写像関数を構成し、その有効性を数値例で示す。第 5 章では、代用電荷法と数値等角写像に関係する幾つかの課題や関連研究に触れる。

2 等角写像と正準領域

まず、図 1 の Nehari [37] の正準スリット領域について多少具体的に説明すると次のとおりである：

(a) 平行スリット領域 無限遠点を含み、互いに平行な直線分状のスリットを伴う複素平面の全体、

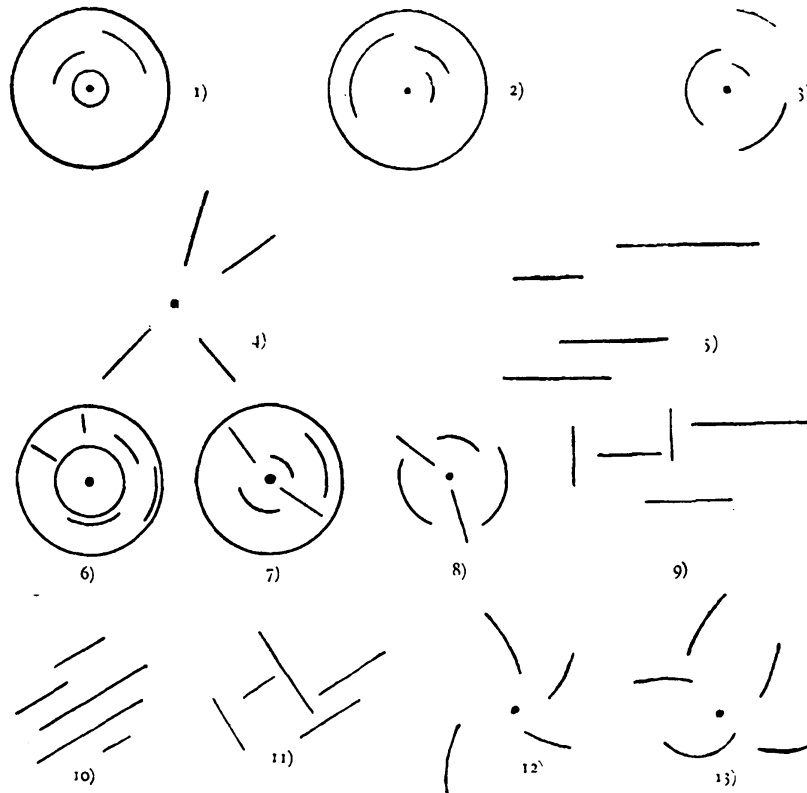


図 2: 正準スリット領域 1)-13) (Koebe, 1916)

(b) 円弧スリット領域 無限遠点を含み, 原点を中心とする同心円弧状のスリットを伴う複素平面の全体,

(c) 放射スリット領域 無限遠点を含み, 原点からの放射直線分状のスリットを伴う複素平面の全体,

(d) 円弧スリット円板領域 原点を中心とする同心円弧状のスリットを伴う円板領域,

(e) 円弧スリット円環領域 原点を中心とする同心円弧状のスリットを伴う円環領域.

図 2 と図 3 は Koebe [31] の正準スリット領域である. 図 2 1)-13) は上記の正準スリット領域 (a)-(e) と, それらの特殊化と一般化に対応している. 表 1 はこれらを Nehari の正準スリット領域と比較したものである. 特に, 6) 円弧放射スリット円環領域と 7) 円弧放射スリット円板領域はそれぞれ円弧スリットと放射スリットの混在を許すという意味で (e) 円弧スリット円環領域と (d) 円弧スリット円板領域の一般化であり, 同様に 8) 円弧放射スリット領域は (b) 円弧スリット領域と (c) 放射スリット領域の一般化である. 螺旋スリット領域 12), 13) もまた (b) 円弧スリット領域と (c) 放射スリット領域の一般化であると考えることができる. 直交直線スリット領域 9), 11) の直線スリットだけでなく, 領域 6), 7), 8) の円弧スリットと放射スリット, 13) の直交螺旋スリットも互いに直交関係にあるスリット群から構成されていることに注意する.

図 3 14)-39) は原点や無限遠点を通る (または端点とする) ようなスリットも伴う領域で, スリットの長さも有限であるとは限らない. これらの正準スリット領域に関する等

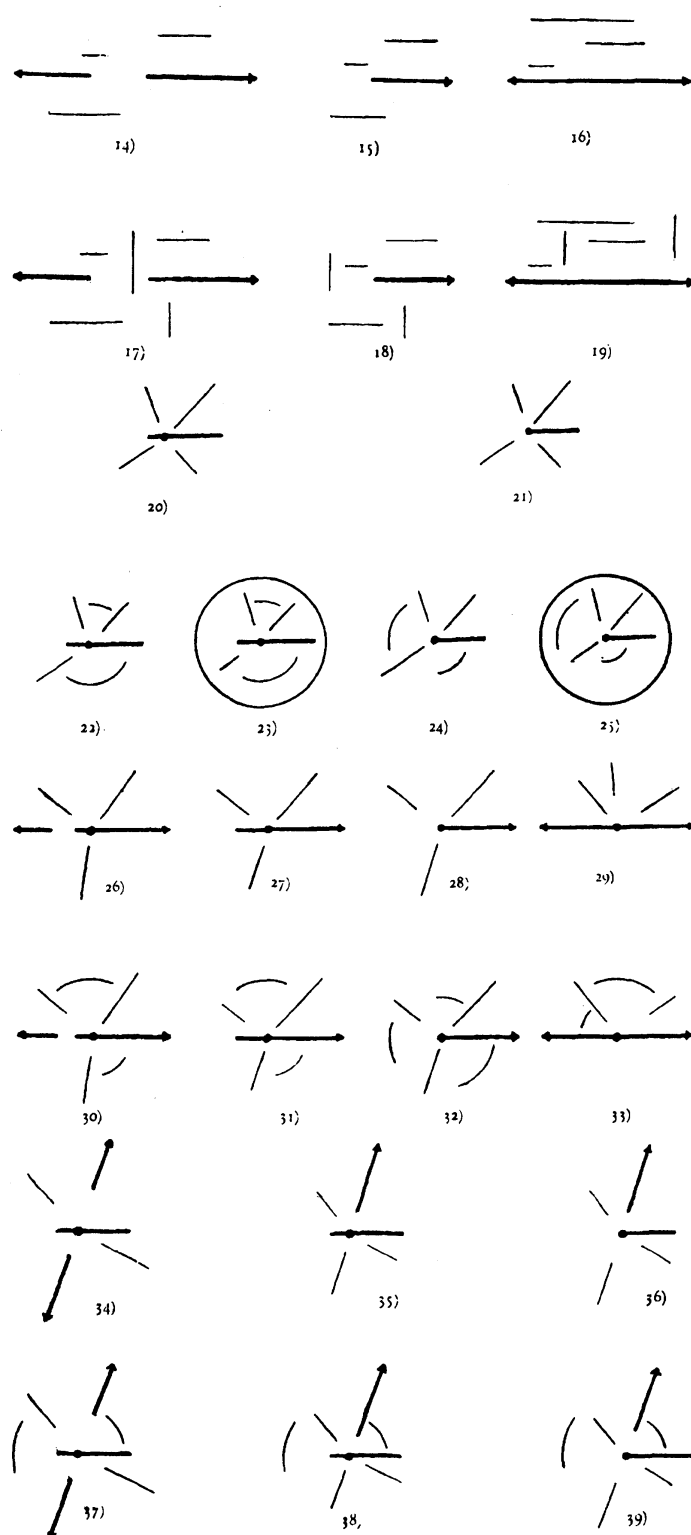


図 3: 正準スリット領域 14)–39) (Koebe, 1916)

表 1: Nehari (1952) と Koebe (1916) 1)–13) の比較

Nehari	Koebe	特殊化	一般化
(a) 平行スリット領域	10)	5) 水平	9) 水平垂直, 11) 直交直線
(b) 円弧スリット領域	3)		
(c) 放射スリット領域	4)		8) 円弧放射
			12) 螺旋, 13) 直交螺旋
(d) 円弧スリット円板領域	2)		7) 円弧放射
(e) 円弧スリット円環領域	1)		6) 円弧放射

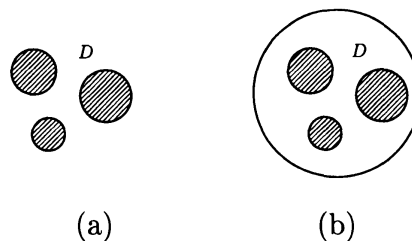


図 4: 正準円領域

角写像の写像関数や近似写像関数の体系的な構成法に関する研究はあまり見当たらない。

図 4 の正準円領域も多少具体的に説明すると次のとおりである：

(a) 非有界正準円領域 無限遠点を含み、互いに交わらない円形の穴を伴う複素平面の全体、

(b) 有界正準円領域 互いに交わらない円形の穴を伴う円板領域。

近年、多重連結領域の等角写像、数値等角写像が活発に研究されている。例えば、DeLillo ら [8, 11] は Fornberg の方法 [15, 16] を拡張し、非有界な正準円領域から非有界な多重連結領域への数値等角写像の方法を与えている。また、DeLillo ら [12] は Schwarz-Christoffel 変換を多重連結領域に拡張し、非有界な正準円領域から非有界な多角形外部領域への写像関数を導出している。Crowdy & Marshall [10] は有界な正準円領域から図 1(a)–(e) の 5 種の正準スリット領域への写像関数に解析的表現を与え、DeLillo ら [13] は非有界な正準円領域から 8) 円弧放射スリット領域への解析的表現を与えている。さらに Crowdy [9] は複数の円柱形の障害物を過ぎる一様流に解析的表現を与えている。

代用電荷法はこのような多重連結領域の数値等角写像にも比較的簡単に適用することができる。天野ら [4, 5] は非有界な多重連結領域から (a) 平行スリット領域、(b) 円弧スリット領域、(c) 放射スリット領域への数値等角写像の方法を提案し、その有効性を数値実験で検証している。これらのすべての問題が係数行列を同じくする連立 1 次方程式に帰着されるので、LU 分解は一度行えばよい。得られた近似写像関数は、たとえばポテンシャル流問題への応用では、障害物の周囲の一様流、渦流、湧き出し（吸い込み）流だけでなく、重ね合わせによって複数の渦や湧き出しを伴う一様流に対しても簡単に適用すること

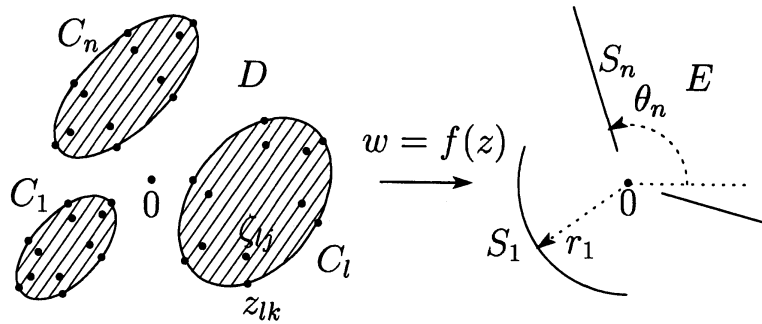


図 5: 円弧放射スリット領域への等角写像

ができる. また, 岡野ら [46] は有界な多重連結領域から (d) 円弧スリット円板領域, (e) 円弧スリット円環領域への近似写像関数を構成している.

次の2つの章では, 代用電荷法を用いて, 非有界な多重連結領域から円弧放射スリット領域と一般的な直線スリット領域への数値等角写像の方法を記す. 前者は天野 [4] の方法の Koebe の正準スリット領域 8) への一般化である [7]. 後者は天野ら [6] の方法に伴う連立1次方程式の特異性の問題を解消したもので, そこで扱われる正準スリット領域 [50] は Nehari (a) すなわち Koebe 10) と, Koebe 5), 9), 11) のさらなる一般化になっている. その特徴は非直交スリットの存在を許すことにある.

3 円弧放射スリット領域への数値等角写像

3.1 写像定理と問題

無限遠点を含み, 共通の中心を持つ円弧スリットと放射スリットを伴う複素平面の全体を円弧放射スリット領域と呼ぶ. ここでは z 平面上の単純閉曲線 $C_1, \dots, C_n$ ($n = n_1 + n_2$) の外側の非有界な n 重連結領域 D から w 平面上の円弧放射スリット領域への等角写像 $w = f(z)$ を考える (図5). このとき, 閉曲線 $C_1, \dots, C_{n_1}$ は半径 $r_1, \dots, r_{n_1}$ の円弧スリット $S_1, \dots, S_{n_1}$ に移り, 閉曲線 $C_{n_1+1}, \dots, C_n$ は偏角 $\theta_{n_1+1}, \dots, \theta_n$ の放射スリット $S_{n_1+1}, \dots, S_n$ に移るとする. 円弧スリット領域, 放射スリット領域の場合と同様に次の定理が成立する [37].

定理 1 問題の等角写像は $f(0) = 0$, $f(\infty) = \infty$ かつ $z = \infty$ のまわりの Laurent 級数が

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (1)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる.

ここに, スリットの半径 $r_1, \dots, r_{n_1}$ と偏角 $\theta_{n_1+1}, \dots, \theta_n$ は写像関数 $f(z)$ とともに定まる未知の定数である.

この等角写像の写像関数を

$$f(z) = z \exp a(z) \quad (2)$$

と表現する. 関数 $a(z)$ は D で解析的で, (i) 無限遠点における正規化条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z} = 1, \quad \text{i.e., } a(\infty) = 0 \quad (3)$$

と, (ii) 閉曲線 $C_1, \dots, C_{n_1}$ が半径 $r_1, \dots, r_{n_1}$ の円弧スリット $S_1, \dots, S_{n_1}$ に移り, $C_{n_1+1}, \dots, C_n$ が偏角 $\theta_{n_1+1}, \dots, \theta_n$ の放射スリット $S_{n_1+1}, \dots, S_n$ に移るという境界条件

$$|f(z)| = r_m, \quad \text{i.e., } \operatorname{Re} a(z) - \log r_m = -\log |z|, \\ z \in C_m, \quad m = 1, \dots, n_1, \quad (4)$$

$$\arg f(z) = \theta_m, \quad \text{i.e., } \operatorname{Im} a(z) - \theta_m = -\arg z, \\ z \in C_m, \quad m = n_1 + 1, \dots, n \quad (5)$$

を満たさなければならない. こうして問題は解析関数 $a(z)$ を定数 $r_1, \dots, r_{n_1}, \theta_{n_1+1}, \dots, \theta_n$ の値とともに求めることに帰着する.

3.2 代用電荷法の適用

代用電荷法を用いて $a(z)$ を複素対数関数の 1 次結合で

$$a(z) \simeq A(z) = Q_0 + \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (6)$$

と近似する. Q_0 は未知の複素定数, Q_{lj} は未知の実係数 (電荷と呼ばれる) である. 特異点 (電荷点と呼ばれる) ζ_{lj} は領域 D の外部すなわち閉曲線 C_l の内側に配置される. この近似関数に次の 3 条件を課す.

(i) 1 価性条件: (6) は一般的には無限多価であり, これが D で 1 価であるためには

$$\int_{C_m} dA(z) = \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \int_{C_m} d \log(z - \zeta_{lj}) = 0$$

すなわち

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad l = 1, \dots, n \quad (7)$$

でなければならない.

(ii) 正規化条件: 1 価性条件の下, (3) から

$$A(\infty) = Q_0 + \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) = 0$$

を課して

$$Q_0 = 0,$$

したがって

$$A(z) = \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (8)$$

を得る.

(iii) 拘束条件: 各閉曲線 C_m 上に電荷と同数の拘束点 z_{mk} を配置し, ここで (8) に境界条件 (4), (5) を選点的に課して拘束条件

$$\sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - \sum_{l=n_1+1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \arg(z_{mk} - \zeta_{lj}) - \log R_m = -\log |z_{mk}|$$

$$z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, \dots, n_1 \quad (9)$$

$$\sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \arg(z_{mk} - \zeta_{lj}) + \sum_{l=n_1+1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - \Theta_m = -\arg z_{mk}$$

$$z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = n_1 + 1, \dots, n \quad (10)$$

を得る. R_m, Θ_m は r_m, θ_m の近似値である.

式 (7) と (9), (10) は Q_{lj} と $\log R_1, \dots, \log R_{n_1}, \Theta_{n_1+1}, \dots, \Theta_n$ に関する $N_1 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式を構成する. これを解いて (8) で $A(z)$ を定め, $a(z)$ の近似値として (2) に代入すれば問題の等角写像の近似写像関数 $F(z) \simeq f(z)$ を得ることができる.

数値計算には複素対数関数の主値を用いる. すると (8) の $\log(z - \zeta_{lj})$ は半直線 $\{\zeta_{lj} - t \mid t > 0\}$ 上に $2\pi i$ の不連続を伴う. ここでは, 記述を簡潔にするために, 閉曲線 $C_1, \dots, C_n$ はそれぞれの内側の 1 点 $\zeta_{10}, \dots, \zeta_{n0}$ に対して星形であると仮定する. 前述の 1 価性条件 (7) の下, (8) を

$$A(z) = \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) - \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{l0})$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}}$$

と変形する. この式の $\log((z - \zeta_{lj})/(z - \zeta_{l0}))$ の不連続は線分 (ζ_{lj}, ζ_{l0}) 上に現れる. こうして領域 D で連続な近似写像関数を構成することができる.

スキーム 1 近似写像関数を

$$F(z) = z \exp A(z), \quad A(z) = \left(\sum_{l=1}^{n_1} + i \sum_{l=n_1+1}^n \right) \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (11)$$

と表現すれば、未定係数 Q_{lj} は R_m, Θ_m とともに $N_1 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (12)$$

$$\sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \left| \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} \right| - \sum_{l=n_1+1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \arg \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} - \log R_m = -\log |z_{mk}|, \quad (13)$$

$$z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, \dots, n_1,$$

$$\sum_{l=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \arg \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} + \sum_{l=n_1+1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \left| \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} \right| - \Theta_m = -\arg z_{mk}, \quad (14)$$

$$z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = n_1 + 1, \dots, n$$

の解として定まる。

3.3 数値例

例 1 3 個の円

$$C_l: |z - \zeta_{l0}| = \rho_l, \quad \rho_1 = 1, \quad \rho_2 = 0.5, \quad \rho_3 = 1.5, \quad (15)$$

$$\zeta_{l0} = 2 \exp \frac{2(l-1)\pi i}{3}, \quad l = 1, 2, 3$$

の外側の 3 重連結領域を D とし、拘束点と電荷点を

$$z_{lj} = \zeta_{l0} + \rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q\rho_l \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad (16)$$

$$j = 1, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3$$

と配置する。 $0 < q < 1$ は電荷配置のパラメータである。誤差の指標としては

$$\epsilon_{F_l} = \max_{z \in C_l} ||F(z)| - R_l|, \quad \epsilon_{R_l} = |R_l - R_l^{(2N)}|, \quad 1 \leq l \leq n_1 (= 1), \quad (17)$$

$$\epsilon_{F_l} = \max_{z \in C_l} |\arg F(z) - \Theta_l|, \quad \epsilon_{\Theta_l} = |\Theta_l - \Theta_l^{(2N)}|, \quad n_1 + 1 \leq l \leq n (= 3) \quad (18)$$

を用いる。実際には、 ϵ_{F_l} は C_l 上に一様に配置された $8N$ 個の点で評価する。 $R_l^{(2N)}$ と $\Theta_l^{(2N)}$ は電荷数を N から $2N$ に倍増して得られた計算値である。

図 6 上半は $n_1 = 1, n_2 = 2$ の場合の数値等角写像の結果である。境界円 C_1 は円弧スリットに、 C_2 と C_3 は放射スリットに移っている。内側の点列は電荷点である。図 6 下半は $\log |F(z)|$ と $\arg F(z)$ の等高線である。これらに電磁気学または流体力学的な解釈を与えることは困難である。しかし、定常熱伝導問題では、原点に線熱源があり、その周囲に熱伝導率 $\lambda = \infty$ の超熱伝導体の領域 (C_1 の内側、温度一定) と $\lambda = 0$ の断熱体の領域 (C_2 と C_3 の内側) が混在する場合の等温線と熱流線を表示している。

表 2 は計算誤差である。ここに、 κ は解かれた連立 1 次方程式の L_1 条件数で、スリットの半径 R_1 と偏角 Θ_2, Θ_3 の値は (17) と (18) の第 2 式右辺に非零の数字が現れた桁までを記している。

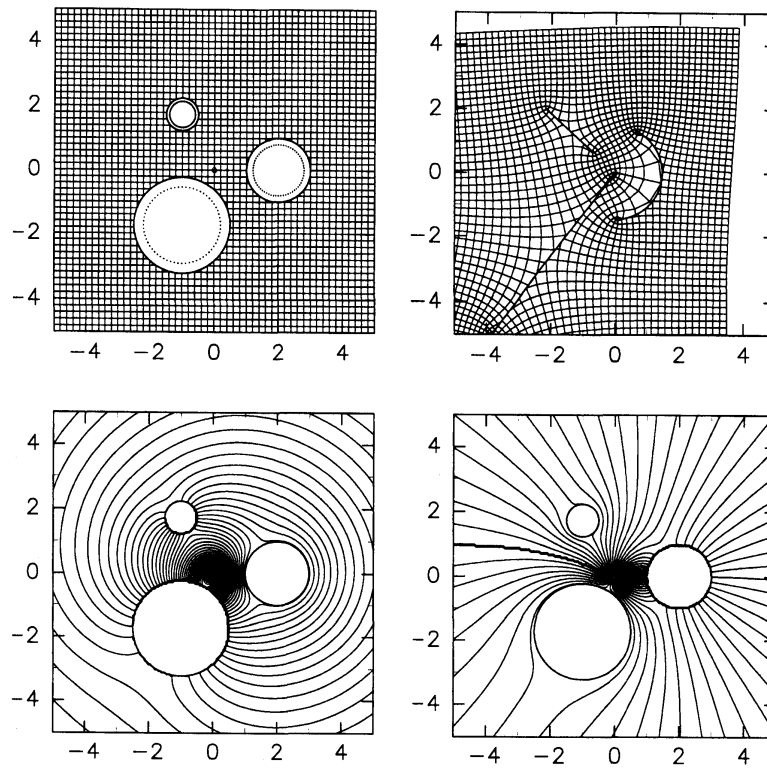


図 6: 円弧放射スリット領域への数値等角写像と定常熱伝導問題

表 2: 誤差 (例 1, $q = 0.8$)

N	$\epsilon_{F_{1,2,3}}$	$\epsilon_{R_1, \Theta_{2,3}}$	$R_1, \Theta_{2,3}$	κ
	3.9E-04	2.9E-05	1.46757	
32	4.4E-05	3.1E-05	2.39447	7.4E+02
	3.8E-03	1.7E-05	-2.22633	
	1.6E-07	9.7E-09	1.467540618	
64	1.7E-08	1.1E-08	2.39449861	5.3E+04
	2.5E-05	5.6E-09	-2.226352156	

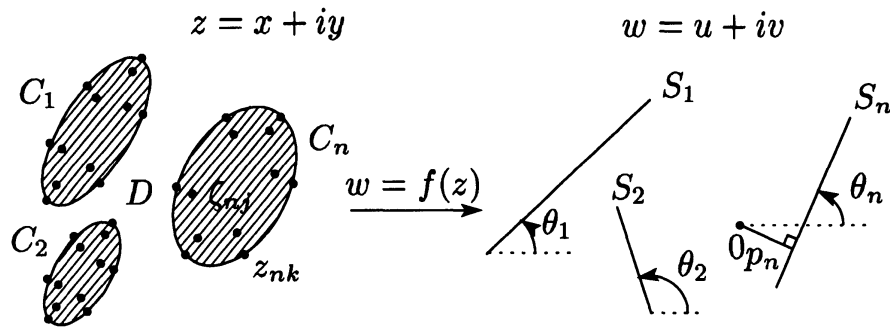


図 7: 直線スリット領域への等角写像

4 直線スリット領域への数値等角写像

4.1 写像定理と問題

無限遠点を含み、直線分状のスリット $S_1, \dots, S_n$ を伴う複素平面の全体を直線スリット領域と呼ぶ。ここでは z 平面上の単純閉曲線 $C_1, \dots, C_n$ の外側の非有界な n 重連結領域 D から w 平面上の直線スリット領域への等角写像 $w = f(z)$ を考える (図 7)。スリット $S_1, \dots, S_n$ が実軸となす角を $\theta_1, \dots, \theta_n$ とする。次の定理が成立する。

定理 2 問題の等角写像は、任意に与えられた $\theta_1, \dots, \theta_n$ に対して、 $f(\infty) = \infty$ かつ $z = \infty$ のまわりの Laurent 級数が

$$f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \quad (19)$$

の形になるという正規化条件の下に一意に定まる。

柴 [50] はより一般的な枠組みの中でこのような正準スリット領域への等角写像をはじめて扱った。

この等角写像の写像関数を

$$f(z) = z + a(z) \quad (20)$$

と表現する。関数 $a(z)$ は D で解析的で、(i) 無限遠点における正規化条件

$$\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - z) = 0, \quad \text{i.e., } a(\infty) = 0 \quad (21)$$

と、(ii) 閉曲線 C_m が実軸と角 θ_m をなす直線スリット S_m に移るという境界条件

$$\text{Im}(e^{-i\theta_m} f(z)) = p_m, \quad \text{i.e., } \text{Im}(e^{-i\theta_m} a(z)) - p_m = -\text{Im}(e^{-i\theta_m} z), \quad z \in C_m, \quad m = 1, \dots, n \quad (22)$$

を満たさなければならない。未定の定数 p_m は w 平面上の原点からスリット S_m を含む直線までの符号付き距離を意味する未知の定数である。こうして問題は解析関数 $a(z)$ を $p_1, \dots, p_n$ の値とともに求めることに帰着する。

4.2 代用電荷法の適用

代用電荷法を用いて、 $a(z)$ を複素対数関数の 1 次結合で

$$a(z) \simeq A(z) = Q_0 + i \sum_{l=1}^n e^{i\theta_l} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (23)$$

と近似する. この近似表現を基礎に前章と同様な考え方で数値等角写像のスキームを導出する. その過程を簡潔に記す. まず, 近似関数 (23) に次の 3 条件を課す.

(i) 1 価性条件: (7) の場合と同様に

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad l = 1, \dots, n \quad (24)$$

でなければならない.

(ii) 正規化条件: (8) の場合と同様に $Q_0=0$, したがって

$$A(z) = i \sum_{l=1}^n e^{i\theta_l} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (25)$$

を得る.

(iii) 拘束条件: (25) に境界条件 (22) を選点的に課して拘束条件

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} [\cos(\theta_l - \theta_m) \log |z_{mk} - \zeta_{lj}| - \sin(\theta_l - \theta_m) \arg(z_{mk} - \zeta_{lj})] - P_m \\ = \operatorname{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mk}), \\ z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (26)$$

を得る. P_m は p_m の近似値である.

式 (24) と (26) は Q_{lj} と P_m に関する $N_1 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式を構成する. これを解いて (25) で $A(z)$ を定め, $a(z)$ の近似値として (20) に代入すれば近似写像関数 $F(z) \simeq f(z)$ を得ることができる. 各閉曲線 C_l はその内側の 1 点 ζ_{l0} に対して星形であると仮定して, 次のスキームを得ることができる.

スキーム 2 近似写像関数を

$$F(z) = z + A(z), \quad A(z) = i \sum_{l=1}^n e^{i\theta_l} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (27)$$

と表現すれば、未定係数 Q_{lj} は P_m とともに $N_1 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \left[\cos(\theta_l - \theta_m) \log \left| \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} \right| - \sin(\theta_l - \theta_m) \arg \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} \right] - P_m \\ = -\operatorname{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mk}), \\ z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (29)$$

の解として定まる。

このスキームは、スリットが実軸となす角を任意に指定できるので、平行スリット領域や直交直線スリットの場合にもそのまま適用することができる。

写像定理 2 の Laurent 級数 (19) の係数も

$$a_k \simeq A_k = -\frac{i}{k} \sum_{l=1}^n e^{i\theta_l} \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \zeta_{lj}^k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (30)$$

と簡単に計算することができる。導出は (19) の $f(z) - z$ と (27) の $A(z)$ を等置して微分し、項別に比較するだけでよい。

なお、代用電荷法を (23) ではなく

$$a(z) \simeq A(z) = Q_0 + \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log(z - \zeta_{lj}) \quad (31)$$

と適用すれば、次のスキームを得ることができる [6]。

スキーム 2* 近似写像関数を

$$F(z) = z + A(z), \quad A(z) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \log \frac{z - \zeta_{lj}}{z - \zeta_{l0}} \quad (32)$$

と表現すれば、未定係数 Q_{lj} は P_m とともに $N_1 + \dots + N_n + n$ 元連立 1 次方程式

$$\sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} = 0, \quad l = 1, \dots, n \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{N_l} Q_{lj} \left[-\sin \theta_m \log \left| \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} \right| + \cos \theta_m \arg \frac{z_{mk} - \zeta_{lj}}{z_{mk} - \zeta_{l0}} \right] - P_m = -\operatorname{Im}(e^{-i\theta_m} z_{mk}) \\ z_{mk} \in C_m, \quad k = 1, \dots, N_m, \quad m = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (34)$$

の解として定まる。

しかし、スキーム 2* は次の 3 つの条件が重なると解くべき連立 1 次方程式に数値的悪条件を生じることがある：(i) 境界曲線、たとえば C_m 、が対称性を持ち、(ii) $\theta_m = 0$ で、(iii) 偶数 N_m 個の電荷を用いる。実際、問題の領域が単一円の外部で、 $\theta = 0$ 、さらに偶数 N 個の拘束点と電荷点を用いた場合の $N + 1$ 行 $N + 1$ 列の係数行列が特異であることは容易にわかる（詳細は割愛する）。

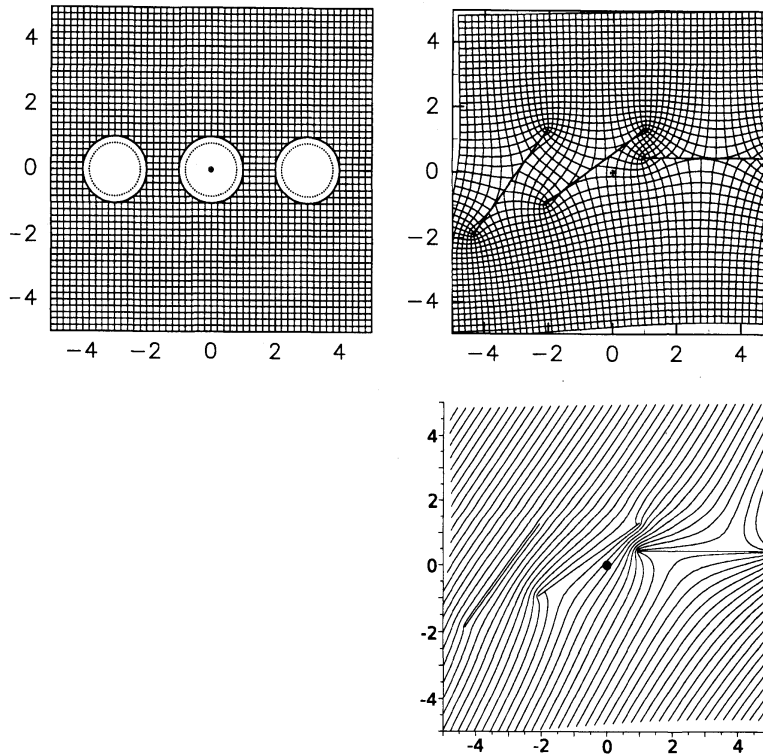


図 8: 直線スリット領域への数値等角写像とスリットを過ぎる一様流 ($\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.2\pi$, $\theta_3 = 0.3\pi$, $\theta = \pi/3$)

4.3 数値例

例 2 3 個の円

$$C_l : |z - \zeta_{l0}| = 1, \quad \zeta_{l0} = 3(2 - l), \quad l = 1, 2, 3 \quad (35)$$

の外側の 3 重連結領域を D とし, 拘束点と電荷点を

$$z_{lj} = \zeta_{l0} + \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \quad \zeta_{lj} = \zeta_{l0} + q \exp \frac{2(j-1)\pi i}{N}, \\ j = 1, \dots, N, \quad l = 1, 2, 3$$

と配置する. 誤差の指標としては

$$\epsilon_{F_l} = \max_{z \in C_l} |\operatorname{Im}(e^{-i\theta_l} F(z)) - P_l|, \quad \epsilon_{P_l} = P_l - P_l^{(2N)}, \quad l = 1, \dots, n (= 3) \quad (36)$$

を用いる.

図 8 は $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.2\pi$, $\theta_3 = 0.3\pi$ の場合の数値等角写像の結果である. 右下はこのスリットを過ぎる一様流を表現している (詳細は後述する). 表 3 はスキーム 2 と 2* を用いた場合の計算誤差である. P_l は (36) の第 2 式右辺に非零の数字が現れた桁までを記している.

表 3: 誤差 (例 2, $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0.2\pi$, $\theta_3 = 0.3\pi$, $q = 0.8$)

	N	ϵ_{F_1}	ϵ_{F_2}	ϵ_{F_3}	κ
スキーム 2	63	6.8E-08	6.3E-08	6.4E-08	3.6E+04
	64	5.4E-08	5.0E-08	5.0E-08	4.1E+04
	65	4.2E-08	3.9E-08	4.0E-08	4.6E+04
	66	3.3E-08	3.1E-08	3.1E-08	5.3E+04
スキーム 2*	63	3.9E-08	5.4E-08	5.9E-08	2.6E+05
	64	5.7E-03	4.2E-08	4.6E-08	5.0E+17
	65	2.4E-08	3.3E-08	3.6E-08	3.4E+05
	66	5.2E-03	2.6E-08	2.9E-08	9.3E+17

スキーム 2* の結果は, $N = 64, 66$ の場合に数値的悪条件を生じ, スリットが実軸となす角 $\theta_1 = 0$ の境界 C_1 上でのみ計算精度が低下している. 数値実験では, このような数値的悪条件は境界曲線が楕円や Cassini の楕形の場合にも生じている. スキーム 2 ではこのような問題は見られない.

この方法は $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta$ として平行スリット領域の問題にそのまま適用可能である. 図 9 は $\theta = \pi/3$ の場合の結果である. 左下は $\text{Im}(e^{-i\theta} F(z))$ の等高線で, 3 個の円柱形の障害物を過ぎる一様流の流線を表現している. 計算誤差は表 3 でスキーム 2 を用いた場合とほとんど同じである.

前述の図 8 の右下はスリットを過ぎる一様流の流線を $\text{Im}(e^{-i\theta} F_\theta(F^{-1}(w)))$ の等高線として描いたものである. ここに, $F(z)$ は図 8 の近似写像関数であり, $F_\theta(z)$ は図 9 の近似写像関数である. したがって, この方法でスリットを任意の方法に過ぎる一様流を描くことができる. しかし, 図 8 のスリットは問題領域に対して近似写像関数 $F(z)$ と同時に求まるので, 任意に与えられたスリットを過ぎる一様流にそのまま適用できるわけではない.

5 おわりに

多重連結領域の問題を中心に数値等角写像の研究に関する概要を記した. また, 代用電荷法を用いて, 非有界な多重連結領域から円弧放射スリット領域と直線スリット領域への近似写像関数を構成し, その有効性を数値例で示した. 前者の方法の原理は有界な多重連結領域の問題にも適用可能である. 定常熱伝導問題等が有界領域の混合型境界値問題として解かれることから, その具体的な検証が望まれる. 後者の方法は Koebe [31] にも記載のない柴 [50] の正準スリット領域を扱い, 非直交スリットの混在を許すことに特徴がある.

代用電荷法を用いた数値等角写像は滑らかな境界の問題に対して表現が簡潔で精度の高い近似写像関数を与える. 多重連結領域の問題にも適用が簡単であり, Koebe の正準スリット領域 1)–13) で残された螺旋スリット領域や, 正準円領域の問題は興味ある研究課題である. なお, 開発途上ではあるが, これまでの方法の一部は INRIA Scilab 上の Toolbox

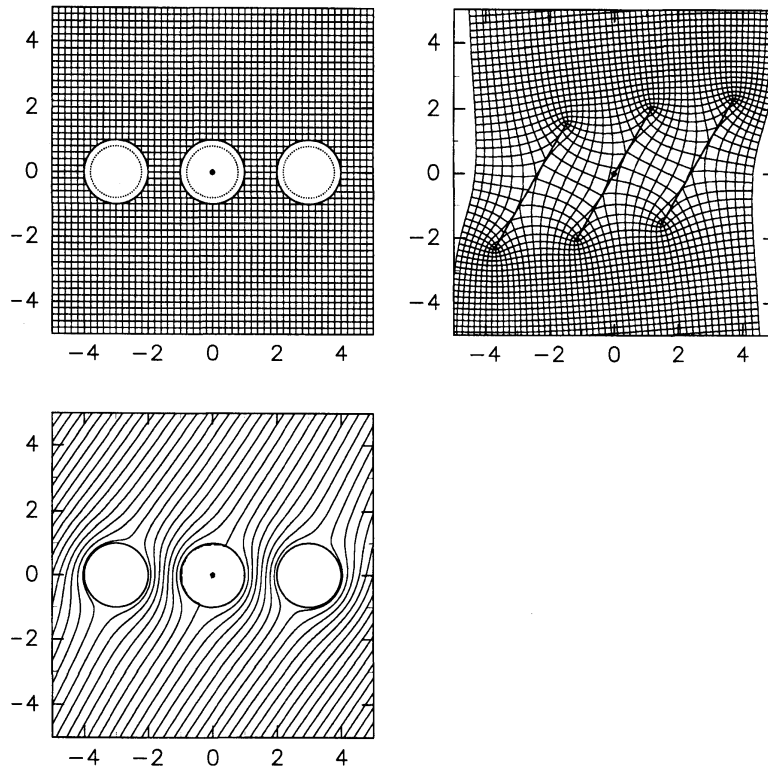


図 9: 平行スリット領域への数値等角写像と円筒形の障害物を過ぎる一様流 ($\theta = \pi/3$)

として実装されている．しかし，代用電荷法で数学ソフトウェアを作成するためには，拘束点と電荷点の自動配置等，利用者インタフェースという視点から研究すべき課題も多い．

最後に代用電荷法と数値等角写像に関連する 3 つの話題に触れる．

(1) 桜井ら [34, 49] は，代用電荷法で求めた近似写像関数を用い，Padé 近似の分母の零点を新しい電荷点として採用することによって計算に必要な電荷数を大幅に低減している．表現が簡潔で精度の高い近似写像関数は誤差の範囲内で解析的な写像関数として扱うことができる [38]．関数論の成果がそのまま適用できるという意味で，この研究は等角写像の応用上も重要であると考えられる．

(2) 緒方らは様々な問題に対して周期基本解を構成し，周期領域の問題に対する等角写像 [39] や Stokes 流 [41, 42, 43, 44] の簡単で精度の高い数値計算法を提案している．この研究は代用電荷法の原理である基本解法 (Fundamental Solution Method) の可能性を広げるものと期待される．

(3) 流体力学では渦は抵抗を生じて流れを妨げ，翼の揚力の低減や騒音の発生の原因であると考えられてきた．しかし，近年，植物の種子や蝶が渦を利用して効率的な飛翔を実現させていると考えられることが明らかになりつつある [28, 33]．一方，坂上 [47] は正準円領域における渦の運動方程式を与えている．直線スリット領域への数値等角写像については，上記のような現象を解析するための多重連結領域における点渦力学への応用が期待されている [48]．

謝辞 研究に関して日頃から助言をいただく東京大学の杉原正顕教授，電気通信大学の

緒方秀教准教授，北海道大学の坂上貴之教授に感謝する．なお，この研究は日本学術振興会の科学研究費補助金（課題番号 19340024）の補助を受けている．

参考文献

- [1] 天野 要，代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法．情報処理学会論文誌，**28** (1987)，697–704.
- [2] 天野 要，代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法．情報処理，**31** (1990)，623–632.
- [3] K. Amano, A charge simulation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains. J. Comput. Appl. Math., **53** (1994), 353–370.
- [4] K. Amano, A charge simulation method for numerical conformal mapping onto circular and radial slit domains. SIAM J. Sci. Comput., **19** (1998), 1169–1187.
- [5] 天野 要，岡野 大，緒方秀教，下平博巳，杉原正顯，代用電荷法による非有界な多重連結領域の統一的な数値等角写像の方法．情報処理学会論文誌，**42** (2001)，385–395.
- [6] 天野 要，鳳 弘勝，李 涛，遠藤慶一，岡野 大，代用電荷法による直線スリット領域への数値等角写像．情報処理学会論文誌，**50** (2009)，1775–1779.
- [7] K. Amano and D. Okano, A circular and radial slit mapping of unbounded multiply connected domains. JSIAM Letters, **2** (2010), 53–56.
- [8] N. Benchama, T.K. DeLillo, T. Hrycak and L. Wang, A simplified Fornberg-like method for the conformal mapping of multiply connected regions — Comparisons and crowding. J. Comput. Appl. Math., **209** (2007), 1–21.
- [9] D.G. Crowdy, Analytical solutions for uniform potential flow past multiple cylinders. Eur. J. Mech. B Fluids, **25** (2006), 459–470.
- [10] D.G. Crowdy and J. Marshall, Conformal mappings between canonical multiply connected domains. Comput. Methods. Funct. Theory, **6** (2006), 59–76.
- [11] T.K. DeLillo, M.A. Horn and J.A. Pfaltzgraff, Numerical conformal mapping of multiply connected regions by Fornberg-like methods. Numer. Math., **83** (1999), 205–230.
- [12] T.K. DeLillo, A.R. Elcrat and J.A. Pfaltzgraff, Schwarz-Christoffel mapping of multiply connected domains. J. Anal. Math., **94** (2004), 17–47.
- [13] T.K. DeLillo, T.A. Driscoll, A.R. Elcrat and J.A. Pfaltzgraff, Radial and circular slit maps of unbounded multiply connected circle domains. Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci., **464** (2008), 1719–1737.

- [14] T.A. Driscoll and L.N. Trefethen, Schwarz-Christoffel Mapping. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [15] B. Fornberg, A numerical method for conformal mappings. SIAM J. Sci. Stat. Comput., **1** (1980), 386–400.
- [16] B. Fornberg, A numerical method for conformal mapping of doubly connected regions. SIAM J. Sci. Stat. Comput., **5** (1984), 771–783.
- [17] D. Gaier, Konstruktive Methoden der konformen Abbildung. Springer, Berlin, 1964.
- [18] D. Gaier, Integralgleichungen erster Art und konforme Abbildung. Math. Z., **147** (1976), 113–129.
- [19] D. Gaier, Das logarithmische Potential und die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Gebiete. in P.L. Butzer and F. Fehér, eds., E.B. Christoffel, The Influence of his Work on Mathematics and the Physical Sciences. Birkhäuser, Basel, 1981, 290–303.
- [20] M.H. Gutknecht, Solving Theodorsen’s integral equation for conformal maps with the fast Fourier transform and various nonlinear iterative methods. Numer. Math., **36** (1981), 405–429.
- [21] M.H. Gutknecht, Numerical experiments on solving Theodorsen’s integral equation for conformal maps with the fast Fourier transform and various nonlinear iterative methods. SIAM J. Sci. Stat. Comput., **4** (1983), 1–30.
- [22] M.H. Gutknecht, Numerical conformal mapping methods based on function conjugation. J. Comput. Appl. Math., **14** (1986), 31–77.
- [23] J.K. Hayes, D.K. Kahaner and R.G. Kellner, An improved method for numerical conformal mapping. Math. Comp., **26** (1972), 327–334.
- [24] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis **3**. John Wiley & Sons, New York, 1986.
- [25] D.M. Hough and N. Papamichael, The use of splines and singular functions in an integral equation method for conformal mapping. Numer. Math., **37** (1981), 133–147.
- [26] D.M. Hough and N. Papamichael, An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains. Numer. Math., **41** (1983), 287–307.
- [27] D.M. Hough, User’s Guide to CONFPACK. IPS Research Report No.90-11, ETH, Zürich, 1990.

- [28] M. Iima and T. Yanagita, Is a two-dimensional butterfly able to fly by symmetric flapping?. J. Phys. Soc. Japan, **70** (2001), 5–8.
- [29] M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math., **35** (1988), 507–518.
- [30] M. Katsurada and H. Okamoto, The collocation points of the fundamental solution method for the potential problem. Comput. Math. Appl., **31** (1996), 123–137.
- [31] P. Koebe, Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung IV, Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. Acta Math., **41** (1916), 305–344.
- [32] P.K. Kythe, Computational Conformal Mapping, Birkhäuser, Boston, 1998.
- [33] D. Lentink, W.B. Dickson, J.L. van Leeuwen and M.H. Dickinson, Leading-edge vortices elevate lift of autorotating plant seeds. Science, **324** (2009), 1438–1440.
- [34] 呂 毅斌, 伊東 拓, 櫻井鉄也, 多重連結領域数値等角写像の Padé 近似を用いた電荷点配置法. 日本応用数理学会論文誌, **16** (2006), 149–164.
- [35] 村島定行, 代用電荷法とその応用. 森北出版, 東京, 1983.
- [36] 室田一雄, 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について. 情報処理学会論文誌, **34** (1993), 533–535.
- [37] Z. Nehari, Conformal Mapping. McGraw-Hill, New York, 1952; Dover, New York, 1975.
- [38] H. Ogata, D. Okano and K. Amano, Computations of the forces on obstacles in two-dimensional potential flows by the charge simulation method. Information, **5** (2002), 307–318.
- [39] H. Ogata, D. Okano and K. Amano, Numerical conformal mapping of periodic structure domains. Japan J. Indust. Appl. Math., **19** (2002), 257–275.
- [40] H. Ogata, D. Okano, M. Sugihara and K. Amano, Unique solvability of the linear system appearing in the invariant scheme of the charge simulation method. Japan J. Indust. Appl. Math., **20** (2003), 17–35.
- [41] H. Ogata, K. Amano, M. Sugihara and D. Okano, A fundamental solution method for viscous flow problems with obstacles in a periodic array. J. Comput. Appl. Math., **152** (2003), 411–425.
- [42] H. Ogata, A fundamental solution method for three-dimensional Stokes flow problems with obstacles in a planar periodic array. J. Comput. Appl. Math., **189** (2006), 622–634.

- [43] H. Ogata and K. Amano, A fundamental solution method for three-dimensional viscous flow problems with obstacles in a periodic array. *J. Comput. Appl. Math.*, **193** (2006), 302–318.
- [44] H. Ogata and K. Amano, A fundamental solution method for two-dimensional Stokes flow problems with one-dimensional periodicity, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **27** (2010), 191–215.
- [45] 岡本 久, 桂田祐史, ポテンシャル問題の高速解法. *応用数理*, **2** (1992), 2–20.
- [46] D. Okano, H. Ogata, K. Amano and M. Sugihara, Numerical conformal mappings of bounded multiply-connected domains by the charge simulation method. *J. Comput. Appl. Math.*, **159** (2003), 109–117.
- [47] T. Sakajo, Equation of motion for point vortices in multiply connected circular domains. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **465** (2009), 2589–2611.
- [48] 坂上貴之, 渦・境界相互作用の数理がもたらす新パラダイム. *日本応用数理学会 2010 年度年会講演予稿集*, 15–16.
- [49] 櫻井鉄也, 杉浦 洋, Padé 近似を用いた数値等角写像の計算法. *情報処理学会論文誌*, **43** (2002), 2959–2962.
- [50] M. Shiba, On the Riemann-Roch theorem on open Riemann surfaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, **11** (1971), 495–525.
- [51] G.T. Symm, An integral equation method in conformal mapping, *Numer. Math.*, **9** (1966), 250–258.
- [52] G.T. Symm, Numerical mapping of exterior domains. *Numer. Math.*, **10** (1967), 437–445.
- [53] G.T. Symm, Conformal mapping of doubly-connected domains. *Numer. Math.*, **13** (1969), 448–457.
- [54] T. Theodorsen, Theory of wing sections of arbitrary shape. *NACA Report*, No.411, 1931.
- [55] L.N. Trefethen, ed., *Numerical Conformal Mapping*. North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [56] L.N. Trefethen, *SCPACK User's Guide*. Numerical Analysis Report 89-2, Department of Mathematics, MIT, 1989.
- [57] M.K. Warby, *BKMPACK User's Guide*. Technical Report, Dept of Maths and Stats, Brunel Univ., 1992.