

Transitive 代数とその諸問題

東北大学 教養部 御園主善尚

ヒルベルト空間上の有界線形作用素に関する, いわゆる “不変部分空間問題” に関連して, 必ずしも $*$ -operation に関して閉じていない作用素代数が研究されるようになった. Transitive 代数はその一つで, “不変部分空間問題” に最も密着した作用素代数といえよう. この代数に関する諸問題および 2, 3 の結果を紹介するのが本稿の目的である.

1 Transitive 代数と諸問題 Transitive 代数の研究の端緒を開いたのは Arveson [1] である. ヒルベルト空間 H 上のすべての有界線形作用素の作る代数を $B(H)$, α を恒等作用素をもつ $B(H)$ の部分代数とする. H の任意の 1 次独立な n 個の元 $x_1, \dots, x_n$ および任意の n 個の元 $y_1, \dots, y_n$ に対して

$$\lim_i A_i x_k = y_k \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

となるような $\{A_i\} \subset \alpha$ が存在するとき, α を n -fold tran-

sitive であるという. 1-fold transitive 代数を単に transitive であるという. これは Arveson による定義である.

$A \in \mathcal{B}(H)$ に対して, A で不変な H の部分空間の作る束を $\text{Lat } A$ で表わし, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(H)$ に対しては

$$\text{Lat } \mathcal{A} = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} \text{Lat } A$$

とする. また, A と可換な任意の $\mathcal{B}(H)$ の作用素で不変な H の部分空間を, A で hyperinvariant であるという. 容易にわかるように, $\mathcal{A}$ が transitive 代数であるための必要十分条件は $\text{Lat } \mathcal{A} = \{\{0\}, H\}$ である.

Douglass - Pearcy [2] は, transitive 代数に関する基本的な諸問題を次のように整理している.

命題 1 $\mathcal{A}$ が transitive 代数ならば $\mathcal{A}$ は強位相に関して $\mathcal{B}(H)$ で稠密である.

命題 2 $\mathcal{A}$ が transitive 代数ならば, $\mathcal{A}$ は 2-fold transitive である.

命題 3 $\mathcal{A}$ が transitive 代数ならば, $\mathcal{A}' = \{\lambda I\}$ である.

命題 4 恒等作用素のスカラー倍でない $\mathcal{B}(H)$ の任意の作用素は, 自明でない hyperinvariant な部分空間をもつ.

命題 5 $\mathcal{B}(H)$ の任意の作用素 A に対して, $\text{Lat } A \neq \{\{0\}, H\}$ である.

これらの命題は, すべて未解決であり

命題 1 $\Rightarrow$ 命題 2 $\Rightarrow$ 命題 3 $\Leftrightarrow$ 命題 4 $\Rightarrow$ 命題 5
 の関係にある。命題 5 が成り立つかどうかという問題が、いわゆる“不変部分空間問題”である。

Arveson は次の定理を与えた。

定理 (Arveson) 任意の自然数 n に対して、 n -fold transitive な代数は強位相に関して $B(H)$ で稠密である。

さらに、Arveson は、命題 2 は次の命題と同値であることを示した。

命題 2' $\mathcal{A}$ を transitive 代数とすると、 $\mathcal{A}$ と可換な任意の閉作用素は恒等作用素のスカラー倍である。

これらの諸問題を考えるに当って、transitive 代数の定義を Radjavi - Rosenthal [5] に従って、次のように改めて、その本質を失わない。

定義 $B(H)$ の部分代数が弱閉で恒等作用素をもち、かつ

$$\text{Lat } \mathcal{A} = \{ \{0\}, H \}$$

であるとき transitive であるという。

この定義に対して、命題 1 は次のように述べ替えられる。

命題 1' $\mathcal{A}$ が transitive ならば、 $\mathcal{A} = B(H)$ 。

この命題が成り立つかどうかという問題が“transitive 代数問題”である。

2 グラフ変換とその分解 Radjavi - Rosenthal [] は、前節の諸問題を考察するに当って、グラフ変換という概念を導入した。

ヒルベルト空間 H の n 個の直和を $H^{(n)}$ で表わし、 H 上の作用素 T の n 個の直和を $T^{(n)}$ で表わす。 $H^{(n)}$ の部分空間 $\mathcal{M}$ に対して

$$\mathcal{M} = \{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D} \}$$

を満たす共通の定義域 $\mathcal{D}$ をもつ H 上の (必ずしも有界でない) 作用素 $T_1, \dots, T_{n-1}$ が存在するとき、 $\mathcal{M}$ を $H^{(n)}$ のグラフ部分空間という。また、ある n に対して、上のような作用素をグラフ変換という。

$H^{(n)}$ の部分空間 $\mathcal{M}$ がグラフ部分空間であるための必要十分条件は

$$x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n \in \mathcal{M}, x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = \cdots = x_n = 0$$

がなりたつことである。 H 上の閉作用素がグラフ変換であることは明らかであるが、グラフ変換は必ずしも閉作用素ではない。閉作用素を考える場合に、その極分解は有力な手段である。グラフ変換に関して、類似の分解定理として、次の結果がある。[4]

定理 $\{ x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D} \}$

を $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間とすると

$$T_i x = n V_i S x \quad (x \in \mathcal{D}; i = 1, 2, \dots, n)$$

を満たす H 上の正値作用素 S および $V_i \in \mathcal{B}(H)$ が存在して

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_1 & \dots & V_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ V_n & V_n & \dots & V_n \end{bmatrix}$$

は $H^{(n)}$ 上の部分的等距離作用素である. さらに

$$P = n \sum_{i=1}^n V_i^* V_i$$

とすれば, P は射影作用素で

$$V_i P = V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

である.

この分解が一意的でないことは

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \dots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

が $H^{(n)}$ のグラフ部分空間ならば

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \dots \oplus T_{n-1} x \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

が $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間となることから容易にわかる.

3 Transitive 代数のグラフ変換 $\mathcal{A}$ をヒルベルト空間 H 上の transitive 代数とする.

$$\mathcal{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \dots \oplus T_{n-1} x \mid x \in \mathcal{D}\}$$

が $\mathcal{A}^{(n)} = \{A^{(n)} \mid A \in \mathcal{A}\}$ で不変な $H^{(n)}$ のグラフ部分空間であるとき, $\mathcal{M}$ を $\mathcal{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間という. $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}$ で不

変であるから, $\mathfrak{A} \neq \{0\}$ ならば $\mathfrak{A}$ は H で稠密である. (以下, $\mathfrak{A} \neq \{0\}$ の場合について考えることにする.) また, ある n に対して, $\mathfrak{A}^{(n)}$ の不変グラフ部分空間を構成するグラフ変換を単に $\mathfrak{A}$ のグラフ変換という.

$\mathfrak{A}$ と可換な $\mathcal{B}(H)$ の作用素の集合を $\mathfrak{A}'$ で表わし, $\mathfrak{A}$ と可換な閉作用素の集合を $\mathfrak{A}'_c$ で表わす. ($\mathfrak{A}'_c$ の閉作用素の定義域も上と同様にして H で稠密である場合を考えることにする.) さらに $\mathfrak{A}$ のグラフ変換の集合を $\mathfrak{A}'_g$ で表わすとき

$$\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}'_c \subset \mathfrak{A}'_g$$

である.

$$\text{命題 1} \Rightarrow \mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_c = \mathfrak{A}'_g = \{\lambda I\}$$

であることは明らかで, Arveson の定理は

$$\mathfrak{A}'_g = \{\lambda I\} \Rightarrow \mathfrak{A}' = \mathcal{B}(H)$$

のように述べることができる. [5] 命題 2' は $\mathfrak{A}'_c = \{\lambda I\}$ に外ならない. 次の定理がなりたつ. [4]

定理 $\mathfrak{A}$ を H 上の transitive 代数とし, $\mathfrak{A}'_c = \{\lambda I\}$ とする. 任意の $n (\geq 2)$ に対して, $\mathfrak{A}^{(n+1)}$ の任意の不変グラフ部分空間

$$\{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{A}\}$$

に対して, $\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathfrak{A}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密でなければ $\mathfrak{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

この定理に関連して、前節の分解定理を用いるとき、次の結果が成立する。

定理 $\mathcal{M} = \{x \oplus T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$

を $H^{(n+1)}$ のグラフ部分空間とすると、 $\{T_1 x \oplus \cdots \oplus T_n x \mid x \in \mathcal{D}\}$ が $H^{(n)}$ で稠密であるための必要十分条件は

$$n \sum_{i=1}^n V_i V_i^* = \delta_{ij} I \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

がなりたつことである。さらに、 $\mathcal{A}$ が *transitive* で、 $\mathcal{M}$ が $\mathcal{A}^{(n+1)}$ の不変グラフ部分空間ならば

$$n \sum_{i=1}^n V_i^* V_i = I$$

である。

命題 3 に関連した考察をしよう。 $x \in H$, $x \neq 0$ に対して

$$\mathcal{A}(x) = \{A \in \mathcal{A} \mid Ax = 0\}, \quad \mathcal{M}(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}(x)} \mathcal{M}(A)$$

とする。ここに $\mathcal{M}(A) = \{y \in H \mid Ay = 0\}$ である。このとき、次の定理がなりたつ。[3]

定理 $\mathcal{A}$ を *transitive* 代数とする。 $\mathcal{A}(x) \neq \{0\}$ で $\mathcal{M}(x)$ が有限次元であるような $x \in H$ が存在すれば $\mathcal{A}' = \{\lambda I\}$ である。

命題がなりたてば、 $\mathcal{A}(x) \neq \{0\}$ で $\mathcal{M}(x) = \{\lambda x\}$ であるが、*transitive* ならば $\mathcal{A}(x) \neq \{0\}$ は未解決である。さらに

定理 $\mathcal{A}$ を *transitive* 代数とする。任意の $x \in H$ に対して

$$\mathcal{A}(x) \neq \{0\}, \quad \mathcal{M}(x) \text{ は有限次元}$$

なら $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

4 Strictly transitive 代数 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ の単位元を含む部分代数とする. 任意の $x (\neq 0), y \in H$ に対して

$$Ax = y$$

を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在するとき, $\mathcal{A}$ を *strictly transitive* であるという. 一般の線形空間で, $\mathcal{A}$ が *strictly transitive* である為の必要十分条件は $\text{Lat } \mathcal{A} = \{0\}, H$ である. H が有限次元であるとき, $\mathcal{A}$ が *strictly transitive* であるための必要条件が $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ であることは, Burnside の定理として知られているが, さらに次の定理がなりたつ. [5]

定理 $\mathcal{A}$ が弱閉な *strictly transitive* 代数なら $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

この定理に類似する結果として, 次の定理がある. [3]

定理 $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(H)$ を *transitive* 代数とする. さらに, H の任意の 1 次独立な x, y に対して

$$Ax = 0, \quad Ay \neq 0$$

を満たす $A \in \mathcal{A}$ が存在すれば $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ である.

文 献

- 1 W. B. Arveson, A density theorem for operator al-

algebras, Duke Math. J., 34 (1967), 635 - 647

2. R. G. Douglas and C. Pearcy, Hyperinvariant subspaces and transitive algebras, Michigan Math. J., 19 (1972), 1 - 12

3 御園生善尚 洲之内長一郎 Transitive algebra について, 数理解析研究所講究録, 238, 70 - 76

4 ————— Invariant subspaces problem に関連する operator algebra について, 数理解析研究所講究録, 377, 141 - 156.

5 H. Radjavi and P. Rosenthal, Invariant subspaces, Springer-Verlag, New York, 1973