

Nelson の仕事 について (I)

神戸大 工 麦林布道

徳島大 工 長町重昭

Markoff field から quantum field を構成する Nelson の方法を、Nelson [1], [2], [3] をもとにして、free Markoff field を例に紹介する。

§ 1. 第 2 量子化

$\mathcal{H}$ を実 Hilbert 空間とし、 $\varepsilon = \varepsilon$ の内積を $\langle u, v \rangle$ 、

$u, v \in \mathcal{H}$ と書く。

ϕ を平均が 0 で分散が $\mathcal{H}$ の内積で与えられる $\mathcal{H}$ 上のガウス過程とする。つまり、 (Ω, μ) を ϕ の確率空間といたとき、 $u, v \in \mathcal{H}$ に対して

$$E \phi(u) = \int_{\Omega} \phi(u)(\omega) d\mu(\omega) = 0,$$

$$\begin{aligned} E \phi(u) \phi(v) &= \int_{\Omega} \phi(u)(\omega) \phi(v)(\omega) d\mu(\omega) \\ &= \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

が成り立つものとする。 ϕ はガウス過程だから、 $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{H}$ に対して、 $\phi(u_1) \cdots \phi(u_m) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ である。

$\Gamma(\mathcal{H}) = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ とし、 $\Gamma(\mathcal{H})_{\leq n}$ を $\phi(u_1) \cdots \phi(u_m)$ 、 $m \leq n$ なる元で張られる $\Gamma(\mathcal{H})$ の閉部分空間、 $\Gamma(\mathcal{H})_n$ を $\Gamma(\mathcal{H})_{\leq n}$ の中での $\Gamma(\mathcal{H})_{\leq n-1}$ の直交補空間とすれば

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\mathcal{H})_n$$

となる。ただし、 $\Gamma(\mathcal{H})_0 = \mathbb{C}$ 、 $\mathbb{C}$ は複素数とする。

$:\phi(u_1) \cdots \phi(u_n):$ を $\phi(u_1) \cdots \phi(u_n)$ の $\Gamma(\mathcal{H})_n$ への正射影とすると、

$$\begin{aligned} \langle :\phi(v_1) \cdots \phi(v_n):, :\phi(u_1) \cdots \phi(u_n): \rangle \\ = \sum_{\pi} \langle v_{\pi(1)}, u_1 \rangle \cdots \langle v_{\pi(n)}, u_n \rangle \end{aligned}$$

が成立する。ただし、和は $1, \dots, n$ の全ての置換 π についてとるものとする。 $\mathcal{H}_1$ を $\mathcal{H}$ の複素化、 $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ 、 $\mathcal{H}_n$ を $\mathcal{H}_1$ の n 階の symmetric tensor とすると

$$\begin{aligned} \langle \text{sym } v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, \text{sym } u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \rangle \\ = \sum_{\pi} \langle v_{\pi(1)}, u_1 \rangle \cdots \langle v_{\pi(n)}, u_n \rangle \end{aligned}$$

となる。

$$\text{sym } u_1 \otimes \cdots \otimes u_n \longmapsto :\phi(u_1) \cdots \phi(u_n):$$

は $\mathcal{H}_n$ から $\Gamma(\mathcal{H})_n$ への等距離写像であることがわかる。

$\mathcal{H}_n$ と $\Gamma(\mathcal{H})_n$ を同一視して、

$$\Gamma(\mathcal{H}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

をうる。 A を $\mathcal{H}$ 上の線型作用素とする。 A を $\mathcal{H}_1$ 上に拡張したものを A と書くことにして、 $\Gamma(\mathcal{H})$ 上の作用素 $\Gamma(A)$ を

$$\Gamma(A)|_{\mathcal{H}_n} = A \otimes \cdots \otimes A$$

と定義する。 $\Gamma(\mathcal{H})$, $\Gamma(A)$ はそれぞれ Fock 空間, A の $\mathcal{H}_2$ 量子化と呼ばれているものである。

これまでのことを categorical に考えてみる。 Hilbert 空間を object とし, contraction operator を morphism とする category を $\mathcal{H}$ 。 確率空間を object とし, doubly Markovian operator を morphism とする category を $\mathcal{P}$ と書く。 $\mathcal{H}$ と $\mathcal{P}$ 、 doubly Markovian operator とは、 $L^1(\Omega_1, \mu_1)$ から $L^1(\Omega_2, \mu_2)$ への線型正值作用素 P であつて、

$$P1 = 1, \quad \int_{\Omega_1} f d\mu_1 = \int_{\Omega_2} Pf d\mu_2$$

を満足するものをいう。 $\mathcal{H}$ を実 Hilbert 空間とその

contraction operator の作る category とすると、次の定理によって、量子化は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{P}$ への covariant functor であることがわかる。

定理 1

$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ を実 Hilbert 空間とし、 A を $\mathcal{H}$ から $\mathcal{K}$ への contraction operator とすれば、 $T(A)$ は doubly Markovian operator である。

§ 2. Markoff fields

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の台が compact な C^∞ 関数の全体とし、 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ を内積 $\langle g, f \rangle_{-1} = \langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} f \rangle$, $m > 0$, による $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の完備化とする。 ϕ が $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 上の random field であるとは、 $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 上の確率過程であって、 $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ より、 $\phi(f_n) \rightarrow \phi(f)$ in measure がいえるものをいう。 ϕ が $\mathbb{R}^d$ 上の質量 m の free Markoff field であるとは、 ϕ が $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 上の Gaussian 過程であることを見る。 ϕ を $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 上の random field とするとき、 $\phi(f)$ 、 $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ かつ $\text{supp } f \subset E$ 、で生成された σ -algebra を $\mathcal{Q}(E)$ で表す。また、 $\mathcal{Q}(E)$ 可測な関数の全体も同じ $\mathcal{Q}(E)$ で表すことにする。

U を $\mathbb{R}^d$ の任意の開集合、 U' を U の補集合、 ∂U を

U の境界とする。 $\mathbb{R}^d$ 上の random field ϕ から上の
 ようにして $\Theta(U)$ をつくる。 この ϕ が $\mathbb{R}^d$ 上の
 Markoff field であるとき、 $\Theta(U)$ の正の確率変数 u
 に対して

$$E\{u \mid \Theta(U')\} = E\{u \mid \Theta(\partial U)\}$$

が成立することである。これを Markoff 性という。ここに、
 $E\{u \mid \Theta(U')\}$ は u の $\Theta(U')$ に関する条件付期待値であ
 る。特に、 $u \in L^2(\Omega, \mu)$ ならば、 $E\{u \mid \Theta(U')\}$ は U
 の $\Theta(U') \cap L^2(\Omega, \mu)$ への正射影になる。 Markoff 性は直
 感的には、 U 内での field に関する予測に対しては、 U
 外での情報は U の境界での情報以上のものを含まない
 ということである。

$\mathbb{R}^d$ の非斉次直交群 (回転を含む) を Euclidean group
 という。 Euclidean group から保測変換を作る群への準同
 型 $\pi \rightarrow T_2$ での条件:

u を確率変数とするとき、 $\pi \rightarrow \pi$ ならば $T_2 u \rightarrow$

$T_2 u$ in measure、ここで $(T_2 u)(\omega) = u(T_2^{-1}(\omega))$

を満足するものを、 Euclidean group の確率空間の上での表
 現という。 $\mathbb{R}^d$ 上の Markoff field ϕ が $\mathbb{R}^d$ 上
 の Euclidean field であるとき、 ϕ の確率空間上

Euclidean group の表現 T が存在して、

$$T_2 \phi(f) = \phi(f \circ \tau^{-1})$$

が成り立つことである。

定理 2

free Markoff field は Euclidean field である。

証明

まず Markoff field であることを示す。 U を R^d の開集合、 f を $\text{supp } f \subset U$ なる $\mathcal{D}'(R^d)$ の元とする。

$$M = \{ g \in \mathcal{D}'(R^d) ; \text{supp } g \subset U' \}$$

$$N = \{ g \in \mathcal{D}'(R^d) ; \text{supp } g \subset \partial U \}$$

とし、 h を f の M への正射影とする。このとき、 h は実は N の元であることが次のようにしてわかる。

M の任意の元 g に対して

$$\langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} h \rangle = \langle g, (-\Delta + m^2)^{-1} f \rangle$$

が成り立つので、 U^0 を U' の内点の集合といたるとき、 $g \in \mathcal{D}'(R^d)$ の元 g に対して $\text{supp } g \subset U^0$ なる $\mathcal{D}'(R^d)$ の元 g に対しては上の式は成立する。したがって、 distribution として U^0 で

$$(-\Delta + m^2)^{-1} h = (-\Delta + m^2)^{-1} f$$

が成立する。両辺に局所作用素 $-\Delta + m^2$ を作用させると、
 U^0 で $h = f = 0$ となり、 $\text{supp } h \subset U' \setminus U^0 = \partial U$ だから、
 $h \in N$ がいえる。

$\phi(f)$ の $\Gamma(\mathcal{H}^{-1}(R^d)) \cap \mathcal{O}(U')$ および $\Gamma(\mathcal{H}^{-1}(R^d)) \cap \mathcal{O}(\partial U)$
 への正射影は共に $\phi(h)$ であるから、

$$E\{\phi(f) | \mathcal{O}(U')\} = E\{\phi(f) | \mathcal{O}(\partial U)\} = \phi(h)$$

となる。 $\mathcal{L}$ を M の中での N の直交補空間、また $\mathcal{U}$ を

$$\mathcal{U} = \{f \in \mathcal{H}^{-1}(R^d); \text{supp } f \subset U\}$$

とすると、 ϕ は平均 0 のガウス過程だから、 $f_i \in \mathcal{U}$, $k_i \in \mathcal{L}$ のとき、 $\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)$ と $\phi(k_1) \cdots \phi(k_m)$ とは独立
 となり、

$$E\{\phi(f_1) \cdots \phi(f_n) | \mathcal{O}(U')\} = E\{\phi(f_1) \cdots \phi(f_n) | \mathcal{O}(\partial U)\}$$

が得る。 $\mathcal{O}(U)$ は $\phi(f_1) \cdots \phi(f_n)$, $f_i \in \mathcal{U}$, の形の元で生成
 されているから、 $\mathcal{U}$ が $\mathcal{O}(U)$ の正の元であれば

$$E\{u | \mathcal{O}(U')\} = E\{u | \mathcal{O}(\partial U)\}$$

が成立する。これで Markoff 性が示された。

次に Euclidean field であることを示す。 $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ の内

積 $\langle v, u \rangle_{-1} = \langle v, (-\Delta + m^2)^{-1} u \rangle$ は Euclidean group の作用 $U(\gamma) u = u \circ \gamma^{-1}$ に関して不変であって、 $\gamma \mapsto U(\gamma)$ は Euclidean group の強連続な直交表現である。 $T_\gamma = \Gamma(U(\gamma))$ とすれば

$$T_\gamma \phi(f) = \phi(f \circ \gamma^{-1})$$

となり、定理 1 によって、 T_γ は確率代数の同型写像への Euclidean group の表現になっていることがわかる。いま、 Ω として $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ の核型拡大 $\mathcal{S}'$ をとると、 T_γ は Ω の回転という保測変換による Euclidean group の表現となり、 $U(\gamma)$ の連続性から T_γ の連続性がいえる。したがって、free Markoff field は Euclidean field である。

§ 3. Hamiltonian

Euclidean field から quantum field を構成するために、まず Hamiltonian を定義する。今後、 $\mathbb{R}^d$ の元 x を $x = (X, t)$ 、 $X \in \mathbb{R}^{d-1}$ 、 $t \in \mathbb{R}$ と表わすことにする。 Y_s を $t = s$ なる超平面、 Z_s を $t \leq s$ なる半空間、 $p(s)$ を Y_s に関する反転、 $\eta(s)$ を $(X, t) \mapsto (X, t+s)$ なる移動とする。 ϕ を $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ 上の Euclidean field として、 $\mathcal{K} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu)$ 、 $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2(\Omega, \mu) \cap \mathcal{Q}(\mathbb{R}^{d-1})$ で表わす、 $\mathcal{H}$

は後に quantum field の Hilbert 空間となる。 E を K から $\mathcal{H}$ への正射影とすると、

$$E_0 u = E \{ u \mid \mathcal{O}(R^{d-1}) \}$$

である。 $u \in \mathcal{H}$ と $0 \leq t < \infty$ に対して、作用素 P^t を

$$P^t u = E_0 T_{2(t)} u$$

で定義すると、次の定理が成立する。

定理 3.

ϕ と $\mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Euclidean field とし、 $\mathcal{H}$ と P^t を上のとおり定義したものとすると、 $\mathcal{H}$ 上に正値自己共役作用素 H が一意的に存在して、 $P^t = e^{-tH}$ 、 $0 \leq t < \infty$ 、となる。

証明

まず、 P^t が強連続な半群になっていることを示す。 $Y_0 = R^{d-1}$ に注意して

$$P^s P^t = E \{ T_{2(s)} P^t u \mid \mathcal{O}(Y_0) \} \quad (1)$$

$$= E \{ T_{2(s)} E \{ T_{2(t)} u \mid \mathcal{O}(Y_0) \} \mid \mathcal{O}(Y_0) \} \quad (2)$$

$$= E \{ E \{ T_{2(s+t)} u \mid \mathcal{O}(Y_s) \} \mid \mathcal{O}(Y_0) \} \quad (3)$$

$$= E \{ E \{ T_{2(s+t)} u \mid \mathcal{O}(Y_s) \} \mid \mathcal{O}(Z_0) \} \quad (4)$$

$$= E \{ E \{ T_{2(s+t)} u \mid \mathcal{O}(Z_s) \} \mid \mathcal{O}(Z_0) \} \quad (5)$$

$$= E \{ T_{2(s+t)} u \mid \mathcal{O}(Z_0) \} \quad (6)$$

$$= E \{ T_{2(s+t)} u \mid \mathcal{O}(Y_0) \} \quad (7)$$

$$= P^{s+t} u \quad (8)$$

(1), (2), (8) は P の定義、(3) は Euclidean covariance, (4), (5), (7) は Markoff 性、(6) は $\mathcal{O}(Z_s) \subset \mathcal{O}(Z_0)$ より成立する。また、 $t \rightarrow 0$ のとき $T_{2(t)} u \rightarrow u$ in measure で、 $T_{2(t)}$ は unitary 作用素であるから、 $T_{2(t)} u \rightarrow u$ in K が従い、 P^t は強連続であることがわかる。さらに、 P^t は contraction operator だから、 P^t が自己共役であることを示せば、 P^t の生成作用素について定理が成立する。

作用素 $(-\Delta + m^2)^{-1}$ の積分核は変形 Bessel 関数で表わされるので、対応するポテンシャル論は最大値の原理を満たす。最大値の原理が成り立てば、台が閉集合 E に属するエネルギー有限の distribution T は、 E 上のエネルギー有限の測度の一次結合の強収束の極限である、という Deny の定理 [4] によれば、 $\{f \in \mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^d); \text{supp } f \subset \mathbb{R}^{d-1}\}$ の元 f は、 $\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ のノルムの意味で $\mathcal{H}^{-1}(\mathbb{R}^{d-1})$ の正の元の有限一次

結合でいくらでも近似できる。ところが、正の distribution は測度であり、反転 P は R^d を点毎に不変にするから、その上の測度を、またその極限である f を不変にする。したがって、 T_P は $\phi(f)$ を不変にするので、 T_P は $\mathcal{H}$ の恒等作用素である。これを反転性と呼ぶ。

$u, v \in \mathcal{H}$ のとき

$$\langle v, P^t u \rangle = \langle v, E_0 T_{\gamma(t)} u \rangle = \langle v, T_{\gamma(t)} u \rangle = E(\bar{v} T_{\gamma(t)} u),$$

$\gamma(t)^{-1} \circ P(\frac{t}{2}) = P$ と反転性より、 $T_{\gamma(t)}^{-1} \circ P(t/2) \bar{v} = \bar{v}$ 、
 かつ、 $T_{P(t/2)} \bar{v} = T_{\gamma(t)} \bar{v}$ が成り立ち、 $P(\frac{t}{2}) \circ \gamma(t) = P$ より
 同様にして、 $T_{P(t/2)} T_{\gamma(t)} u = u$ となる。よって、

$$T_{P(t/2)} (\bar{v} T_{\gamma(t)} u) = (T_{\gamma(t)} \bar{v}) u \text{ である。 Euclidean covariance より}$$

$$E(\bar{v} T_{\gamma(t)} u) = E T_{P(t/2)} (\bar{v} T_{\gamma(t)} u) = E (T_{\gamma(t)} \bar{v}) u$$

$$= \langle T_{\gamma(t)} \bar{v}, u \rangle = \langle E_0 T_{\gamma(t)} \bar{v}, u \rangle = \langle P^t \bar{v}, u \rangle.$$

したがって、 P^t は自己共役である。

§ 4. Quantum field

$\phi \in \mathcal{H}^{-1}(R^d)$ 上の Euclidean field とする。 $-\infty < k < \infty$

κ に対して、 $D(H^{\frac{\kappa}{2}})$ のノルム $\|u\|_{\kappa} = \|(1+H)^{\kappa/2} u\|$ に対して
 の完備化を $\mathcal{D}^{\kappa}$ とし、 $\mathcal{D}^{\infty} = \bigcap \mathcal{D}^{\kappa}$ 、 $\mathcal{D}^{-\infty} = \bigcup \mathcal{D}^{\kappa}$ とおく。

$\tilde{u}$, $\tilde{v}$ を u , v の Fourier 変換とする。

$$\langle u, v \rangle_{-1} = \int \overline{\tilde{u}(k)} \tilde{v}(k) \frac{1}{k^2 + m^2} dk.$$

$$\widetilde{g \otimes \delta}(k_1, \dots, k_d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{g}(k_1, \dots, k_{d-1})$$

より

$$\|g \otimes \delta\|_{-1}^2 = \frac{1}{2\pi} \iint |\tilde{g}(k)|^2 \frac{1}{|k^2 + l^2 + m^2|} dk dl$$

$$= \frac{1}{2} \int |\tilde{g}(k)|^2 \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk.$$

これから、 $f \in \mathcal{S}(R^{d-1})$ ならば、 $f \otimes \delta \in \mathcal{D}^{-1}(R^d)$ であることがわかる。そこで

$$\phi_0(f) = \phi(f \otimes \delta), \quad f \in \mathcal{S}(R^{d-1})$$

と定義する。これは free quantum field である。

$\mathcal{L}(\mathcal{D}^{\kappa}, \mathcal{D}^{\ell})$ を $\mathcal{D}^{\kappa}$ から $\mathcal{D}^{\ell}$ への有界線型作用素のつくる Banach 空間とする。確率変数 w に対して、 w を掛けるという演算が $\mathcal{L}(\mathcal{D}^{\kappa}, \mathcal{D}^{\ell})$ の元ならば、 $w \in \mathcal{L}(\mathcal{D}^{\kappa}, \mathcal{D}^{\ell})$ と書く。Wightman distribution の存在を示すために次の

仮定 (A) を設ける。 $\phi_0(f)$ が確率変数であることに注意して、

仮定 (A)

任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ に対して、 $\phi_0(f) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^K, \mathbb{H}^L)$ となる K, L が f に無関係に存在して、 $f \mapsto \phi_0(f)$ は連続である。

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ に対して、 $\theta_0(f) = \phi_0(f) = \phi(f \otimes \delta)$ と書いて、 $\theta_\tau(f) = e^{i\tau H} \theta_0(f) e^{-i\tau H}$ と定義すれば、 $e^{i\tau H}$ はそれぞれの $\mathbb{H}^K$ を不変に保ち、その上で unitary であるので、

$\theta_\tau(f) \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^K, \mathbb{H}^L)$ となる。 M^d を d 次元 Minkowski 空間とする。 $f \in \mathcal{S}(M^d)$ のとき、 $f_\tau(x) = f(x, \tau) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ であり、また、仮定 (A) によって、 $u \in \mathbb{H}^K, v \in \mathbb{H}^L$ に対して、 $\langle v, \theta_0(f_\tau) u \rangle \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ である。これによって、Nelson [5] によって、

$$\theta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \theta_\tau(f_\tau) d\tau \in \mathcal{L}(\mathbb{H}^\infty, \mathbb{H}^\infty)$$

となる。 $1 \in \mathbb{H}^\infty$ 故に、 $\langle 1, \theta(f_1) \cdots \theta(f_n) 1 \rangle$ は意味がわかって、仮定 (A) より、各 f_i について連続であることがわかる。故に、核定理を用いると $\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}'(M^d)$ が一意的に存在して

$$\int \cdots \int \mathcal{W}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

$$= \langle 1, \theta(f_1) \cdots \theta(f_n) 1 \rangle$$

が成立する。 $W^{(n)}$ を Wightman distribution とする。

定理 4.

free Markoff field は仮定 (A) を満足する。

証明

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ を内積 $\frac{1}{2} \langle f, (-\Delta + m^2)^{-1/2} g \rangle$ により完備化した $\mathcal{D}^{-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ と、 $\{f \in \mathcal{D}^{-1}(\mathbb{R}^d) : \text{supp } f \subset \mathbb{R}^{d-1}\}$ とは、 $g \in \mathcal{D}^{-1/2}(\mathbb{R}^{d-1}) \mapsto (g \otimes \delta) \in \mathcal{D}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ と対応させることにより同一視できる。 $\mathcal{D}^{-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ 上のガウス過程が Schrödinger 表示における free quantum field であり、運動量表現では次の形をとることよく知られている。(例文は Glimm and Jaffe [6] を見よ。)

$$\begin{aligned} (\phi_0(f) \tilde{u})^{(n)}(k_1, \dots, k_n) &= \left\{ \sqrt{n+1} \int \tilde{f}(k) \tilde{u}^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \tilde{f}(-k_j) \tilde{u}^{(n-1)}(k_1, \dots, \check{k}_j, \dots, k_n) \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

また、 $P^\perp$ はそれを一粒子空間へ制限したものの才2量子化作用素に一致し、一粒子空間では運動量表現で $e^{-\sqrt{k^2 + m^2} t}$ を掛けるという作用素であるから、その生成作用素は運動量表現で

$$H \tilde{u}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \left\{ (k_1^2 + m^2)^{1/2} + \dots + (k_n^2 + m^2)^{1/2} \right\} \tilde{u}^{(n)}(k_1, \dots, k_n)$$

となる。 $f \in \mathcal{D}^{-1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ ならば、 $\tilde{f}(k)(k^2 + m^2)^{-1/2} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^{d-1})$.

したがって、(9)の右辺のオ2項(生成項)は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}^{-1}$ への有界作用素で、その共役作用素であるオ1項(消滅項)は $\mathcal{D}^1$ から $\mathcal{D}$ への有界作用素である。以上のことから、

$\phi_0(f)$ は $\mathcal{D}^1$ から $\mathcal{D}^{-1}$ への有界作用素であり、 $K=1$, $L=-1$ として仮定(A)を満足することを示された。

ここで定義された Wightman distribution の quantum field の再構成定理のための条件(例えば、Bogoliubov 他[7]を見よ)の大部分を満足していることが次の定理からわかる。 $\mathcal{D}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ のすべての元 f について $\phi(\bar{f}) = \overline{\phi(f)}$ が成り立つとき、 ϕ を hermitian field と呼ぶ。

定理 5

ϕ を $\mathcal{D}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ 上の hermitian Euclidean field で仮定(A)を満足するものとする。Wightman distribution $\mathcal{W}^{(n)}$ に対して、次のことが成り立つ。

(a) 相対論的不変性

$$\mathcal{W}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{W}^{(n)}(\Lambda x_1, \dots, \Lambda x_n)$$

ただし、 Λ は M^d の固有 Poincaré 群の元。

(b) スペクトル条件

$$\begin{aligned} \widetilde{W}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) \\ = (2\pi)^{d/2} \delta\left(\sum_{j=1}^n p_j\right) \widetilde{W}^{(n)}(p_1, p_1+p_2, \dots, p_1+\dots+p_{n-1}). \end{aligned}$$

ここで、 $\widetilde{W}^{(n)}(q_1, \dots, q_{n-1})$ は緩増加な distribution であって、

$\overline{V_+^{n-1}} = \{(q_1, \dots, q_{n-1}) ; (q_j)^2 \geq 0, q_j^0 \geq 0\}$ の外では 0 となるものである。

(c) エルミット性

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \overline{W^{(n)}(x_n, \dots, x_1)}$$

(d) 局所可換性.

$$(x_j - x_{j+1})^2 < 0 \text{ のとき}$$

$$W^{(n)}(x_1, \dots, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = W^{(n)}(x_1, \dots, x_{j+1}, x_j, \dots, x_n)$$

(e) 正定値性

$$\sum \int \dots \int dx_1 \dots dx_j dy_1 \dots dy_k \overline{f_j(x_1, \dots, x_j)}$$

$$\times W^{(j+k)}(x_j, \dots, x_j; y_1, \dots, y_k) f_k(y_1, \dots, y_k) \geq 0$$

ここで、 $f_0, f_1, f_2, \dots$ は $f_n \in \mathcal{S}((M^d)^n)$ なる有限列とする。

この定理の証明の詳細については Nelson [3] を見ていただく。

くことにして、ここでは大体的考えを示す。(c)と(e)は $W^{(n)}$ が真空期待値で定義されていることより明らか。(a)については、 θ が ϕ の t を it で置き換えたものと考えられ、 ϕ が Euclidean covariance をもつことから示される。(d)は、 $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$ なる x_j, x_{j+1} が (a) によって R^{d-1} の2点に移され、そこでは $\theta = \phi$ であって、 ϕ は確率変数だから可換であることよりわかる。(b)は Idamilton が正値であることと、相対論的変換性より示される。

真空の一意的性に関しては次の定理がある。

定理 6

ϕ を $\text{Id}^{-1}(R^d)$ 上の Hermitian Euclidean field で、仮定 (A) を満足するものとする。 R^d の平行移動の群が ϕ の確率空間にエルゴード的に作用していれば、真空は一意的である。

証明

u を真空とし、 ξ_j を x_j 方向の平行移動とすれば、 $T_{\xi_j} u = u$ 、 $1 \leq j \leq d-1$ 、 $e^{itH} u = u$ が成立する。これから、 $P^t u = u$ 、つまり $E_0 T_{2(t)} u = u$ がいえる。 $T_{2(t)}$ が unitary であることと、 E_0 が Id への正射影であることより、 $T_{2(t)} u = u$ がわかり、平行移動がエルゴード的であることより、 u は1つ定数倍であることがわかる。

参考文献

- [1] E. Nelson, Quantum fields and Markoff fields, Amer. Math. Soc. Summer Institute on Partial Differential Equations held at Berkeley, 1971.
- [2] E. Nelson, The free Markoff field, J. Funct. Anal. 12 (1973), 211-227.
- [3] E. Nelson, Construction of quantum fields from Markoff fields, J. Funct. Anal. 12 (1973), 97-112.
- [4] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie, Acta Math. 82 (1950), 107-150.
- [5] E. Nelson, Time-ordered operator products of sharp-time quadratic forms, J. Funct. Anal. 11 (1972), 211-219.
- [6] J. Glimm and A. Jaffe, Boson quantum field models, Mathematics of Contemporary Physics, ed. R. F. Streater (Academic Press, 1972), pp. 77-143.
- [7] N. N. Bogoliubov, A. A. Logunov and I. T. Todorov, 場の量子論の数学的方法 (東京図書、1972)

附記

この考えは、self-coupled Bose fields の場合へ拡張され、それに基づいて、Simon 達は $P(\phi)_2$ 理論について、場の量子論と統計力学の結び付きを確立した：

F. Guerra, L. Rosen and B. Simon, The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory as classical statistical mechanics, Princeton preprint, May 1973.