

# 連続時間酔歩理論を用いた on-off 拡散の統計解析

原田智洋, 宮崎修次 京大・情報

Agung Budiyo, 大阪市立大・工

Analysis of On-off Diffusion on the Basis of Continuous Time Random Walk Theory

T. Harada, S. Miyazaki, Graduate School of Informatics, Kyoto Univ.,

A. Budiyo, Department of Applied Physics, Osaka City Univ.

## 概要

On-off 拡散の統計性とスケーリング則を連続時間酔歩理論を基に導出した。また, on-off 拡散のエネルギー散逸率の揺らぎの特性からエネルギーの損失が時間に比例しない領域が存在することを見出した。数値計算と比較し, 理論的結果とよく一致していることを確認した。

## 1 On-off 間欠性と on-off 拡散

始めにオンオフ間欠性について簡単に説明する。具体的なモデルとして, 垂直に支点の位置が振動するパラメトリック振動子系を考える。

$$\dot{\theta} = \omega, \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = -\gamma\omega - \omega_0^2(1 - G(t)) \sin \theta. \quad (2)$$

$\theta$  は重力方向からの変位角, また  $\gamma$  は摩擦係数,  $\omega_0$  は振動子の固有振動数を表す。この系には  $\theta = \omega = 0$  の特解 (不変多様体) が存在する。ただしこの特解は静止状態を意味しているわけではなく, 重力方向に固定されたまま  $G(t)$  に従って垂直に振動することを意味している。 $G(t) = A \sin(\omega t)$  であるときには, 線形領域ではよく知られた Mathieu 方程式である。

次に  $G(t)$  がカオス的, 確率的である場合について考察する。始めに特解の安定性について調べる。 $\theta = \omega = 0$  からのずれを  $\delta\theta, \delta\omega$  で表すと, 特解からのずれの大きさは  $r(t) \equiv \sqrt{\delta\theta^2 + \delta\omega^2}$  で定義される。このとき, ある時間のずれの成長率は  $\Lambda(t) \equiv \dot{r}(t)/r(t)$  である。その長時間平均は横断 Liapunov 指数と呼ばれ, 次のように定義される。

$$\lambda_{\perp} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \Lambda(t) dt, \quad (3)$$

また, その時間的揺らぎの強度は

$$D_{\perp} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle (\Lambda(t) - \lambda_{\perp})(\Lambda(0) - \lambda_{\perp}) \rangle. \quad (4)$$

で表される。横断 Liapunov 指数は特解の安定性を表す指数で, その符号によって負値のときは安定, 正値は不安定であることを表す。横断 Liapunov 指数は正値を取るが, 十分小さい値であるときには揺らぎの強度が重要な役割を果たし, 時間的に正と負をランダムに取るために間欠的な運動が観測される。周期運動が不安定化し観測される Pomeau-Manneville の間欠性とは異なり, この間欠性はカオス特解の不安定化によって観測される。これは藤坂, 山田によるカオス結合写像系で *Intermittency caused by chaotic modulation* として初めて発見され [1], 最近では on-off 間欠性と呼ばれている。

累積回転数は以下のように与えられる.

$$y(t) \equiv \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \omega(t') dt' \right] \quad (5)$$

$[y]$  は  $y$  に最も近い整数を表し, 正, 負はそれぞれ反時計回り, 時計回りを表す. 振り子のモデルでは角速度は on-off 間欠性を示し, この時, 振り子の回転が間欠的に起きる.  $y(t)$  の時系列, および平均二乗変位 MSD を図 1, 図 2 に示す. 短い時間領域では遅い拡散的振る舞い  $\langle y^2 \rangle(t) \propto \sqrt{t}$ , 長時間領域で通常の拡散的振る舞い  $\langle y^2 \rangle(t) \propto t$  が観測される. on-off 間欠的な速度成分をもつ, このような統計特性を示す拡散を on-off 拡散と呼ぶ [2].

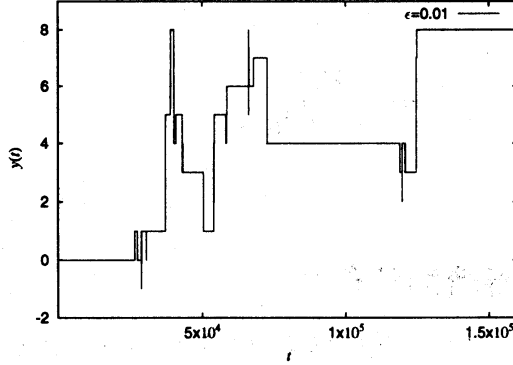


図 1

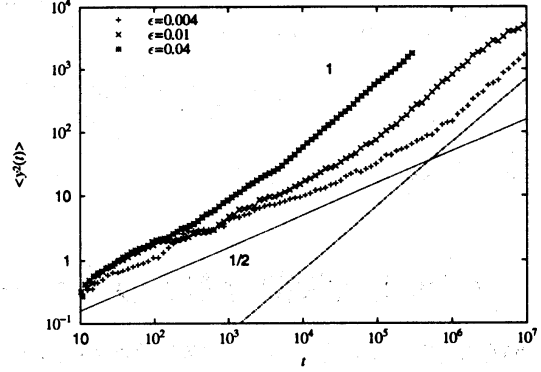


図 2

## 2 連続時間酔歩 (CTRW) 理論

確率的に変動する軌道の特徴付ける一つの方法として, 連続時間酔歩 *Continuous-Time-Random-Walk* 理論を紹介する [3, 4]. これは軌道を静止状態と移動状態などに分離し, その状態の継続時間やジャンプ幅の分布を与え, そこから分散を求める方法である. 連続時間酔歩理論にはいくつかのモデルが提案されているが, 後に示すように on-off 拡散との対応が可能なジャンプモデルについて述べる.  $\psi(t)$  を待ち時間分布としよう. これは時間  $t$  だけ継続する静止状態の確率密度関数を表している. したがって, ある時間  $t$  で静止状態である確率は

$$\phi(t) = \int_t^\infty \psi(t') dt' \quad (6)$$

で与えられる. ジャンプ幅の分布  $\lambda(r)$  と待ち時間に相関がないと仮定すると, 時刻  $t$  で座標  $y$  に到達する確率密度関数は

$$Q(y, t) = \int dy' \int_0^t dt' Q(y - y', t - t') \lambda(y') \psi(t') + \delta(y) \delta(t) \quad (7)$$

で与えられる. 第二項は初期条件が時刻  $t$  で  $y = 0$  に到達したことを意味している.  $y$  について Fourier 変換,  $t$  について Laplace 変換すると,

$$Q(k, s) = \frac{1}{1 - \lambda(k) \psi(s)} \quad (8)$$

と書ける. また, 時刻  $t$  で座標  $y$  に存在する確率密度関数は

$$P(y, t) = \int_0^t dt' Q(y, t - t') \phi(t') \quad (9)$$

と表される。再び, Fourier 変換によって

$$P(k, s) = Q(k, s)\phi(s) \quad (10)$$

と書けるので, 式 (6), (8) を代入すると

$$P(k, s) = \frac{1 - \psi(s)}{s(1 - \lambda(k)\psi(s))} \quad (11)$$

となる。よって平均ドリフト速度は

$$\langle y \rangle(s) = \left. \frac{\partial P(k, s)}{\partial(ik)} \right|_{k=0} = \frac{\psi(s)}{s(1 - \psi(s))} \left. \frac{d\lambda(k)}{d(ik)} \right|_{k=0} \quad (12)$$

で与えられ, 平均二乗変位は

$$\langle y^2 \rangle(s) = \left. \frac{\partial^2 P(k, s)}{\partial(ik)^2} \right|_{k=0} = \frac{\psi(s)}{s(1 - \psi(s))} \left. \frac{d^2\lambda(k)}{d(ik)^2} \right|_{k=0} \quad (13)$$

で与えられる。

### 3 初期通過時間分布とラミナー継続時間分布

前節で待ち時間とジャンプ幅の分布が与えられると平均二乗変位が計算できることがわかった。それでは on-off 拡散に対応する待ち時間はどのようにして与えるのが自然であろうか。

on-off 間欠的な変数 (ここでは速度  $v$  とする) は不変多様体近傍に軌道が近づいた時 (ラミナー状態) に  $v \simeq 0$  になるので, このラミナー継続時間分布を待ち時間分布に対応させるのが適当であろう。on-off 間欠性を示す変数  $v$  の不変多様体近傍の線形領域 (ラミナー領域) の時間発展方程式は

$$|\dot{v}| = \Lambda(t)|v| \quad (14)$$

で与えられる。  $\Lambda(t)$  が Gauss 型白色雑音であるとき,  $|v(t)|$  は対数スケールでみると, ランダムウォーク  $\frac{d}{dt} \log(|v(t)|) = \Lambda(t)$  である。従って  $c = \log(|v_0|) - \log(\langle |v| \rangle)$  領域の ( $v_0$  はラミナー領域とバースト領域の境界) 初期通過時間分布を考えると, 一般的なランダムウォークの平均ドリフト速度に対応するものが, 横断 Liapunov 指数  $\lambda_\perp$  であり, また駆動雑音の強度が  $2D_\perp$  に対応するので, 結局ラミナー継続時間分布は, よく知られた初期通過時間分布

$$\psi(t) = \frac{c}{\sqrt{4\pi D_\perp}} t^{-3/2} \exp\left[-\frac{(\lambda_\perp t - c)^2}{4D_\perp t}\right] \quad (15)$$

で与えられる。平均ラミナー時間は

$$\bar{t} = \int_0^\infty t \psi(t) dt = \frac{c}{\lambda_\perp}. \quad (16)$$

となる。また,  $\psi(t)$  に逆 Laplace 変換を施すと,

$$\tilde{\psi}(s) = \exp(\alpha(1 - \sqrt{1 + 4\tau s})), \quad (17)$$

と書ける。

$$\tau = \frac{D_\perp}{\lambda_\perp^2}, \quad \alpha = \frac{\lambda_\perp c}{2D_\perp} = \frac{\bar{t}}{2\tau}, \quad (18)$$

であり,  $\alpha$  は2つの特徴時間スケールの比を表す。独立なパラメータは  $\lambda_\perp, D_\perp, c$  であるが, 初期通過時間分布はスケール変換  $c \rightarrow uc, \lambda_\perp \rightarrow u\lambda_\perp, D_\perp \rightarrow u^2 D_\perp$  によって分布が変わらないことを考えると, 実際に有効なパラメータは  $\tau$  と  $\alpha$  である。

## 4 On-off 拡散のスケーリング則

On-off 拡散の CTRW のジャンプモデルではバーストの発生がジャンプと対応付けられる. 対称なジャンプを仮定すると  $\lambda(r) = \lambda(-r)$  である. 以下, 任意の対称な分布に対して, CTRW 理論の手法に従って on-off 拡散の統計特性を導出する.

### 4.1 平均二乗変位 MSD

$\tau s \ll 1$  また  $1 \ll \tau s \ll 1/\alpha^2$  について  $\tilde{\psi}(s)$  は次のように近似できる.

$$\tilde{\psi}(s) \sim 1 + \alpha(1 - \sqrt{1 + 4\tau s}) \quad (19)$$

従って

$$\frac{\langle y^2 \rangle(s)}{\Sigma^2} = \frac{\tilde{\psi}(s)}{s(1 - \tilde{\psi}(s))} \sim \frac{1}{4\alpha\tau s^2} + \frac{\sqrt{1 + 4\tau s}}{4\alpha\tau s^2} \quad (20)$$

ここで

$$\Sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} r^2 dr = \left. \frac{d^2 \tilde{\lambda}(k)}{d(k)^2} \right|_{k=0} \quad (21)$$

である. 従って逆 Laplace 変換を行うと MSD は

$$\frac{\langle y^2 \rangle(t)}{\Sigma^2} = L^{-1} \left[ \frac{1}{4\alpha\tau s^2} + \frac{\sqrt{1 + 4\tau s}}{4\alpha\tau s^2} \right] \quad (22)$$

$$= \frac{t}{4\alpha\tau} + \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{t}}{4\tau} e^{-t/4\tau} M\left(2, \frac{3}{2}, \frac{t}{4\tau}\right) \quad (23)$$

$$\simeq \begin{cases} \sqrt{\frac{t}{\pi t^*}} & (t \ll t \ll \tau), \\ \frac{t}{t} & (t \gg \tau) \end{cases} \quad (24)$$

となる.  $M$  は Kummer 関数であり,

$$M\left(2, \frac{3}{2}, z\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{z}} \frac{1 + 2z}{4} e^z \operatorname{erf}(\sqrt{z}) \quad (25)$$

の関係がある.  $\operatorname{erf}(x)$  は誤差関数を表す.  $t \rightarrow \infty$  で  $\langle y^2 \rangle(t) \rightarrow 2Dt$  であることを考えると,  $D = \frac{\Sigma^2}{2t}$  であり, 従って

$$\frac{\langle y^2 \rangle(t)}{2Dt} = \phi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (26)$$

のスケーリング則が存在する. スケーリング関数は

$$\phi(z) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{4}{\pi z}} e^{-z/4} M\left(2, \frac{3}{2}, \frac{z}{4}\right) \quad (27)$$

$$\begin{cases} \propto z^{-1/2} & (0 \simeq \alpha^2 < z < 1), \\ \simeq 1 & (z > 1) \end{cases} \quad (28)$$

である.  $t^* \ll t \ll \tau$  ( $\alpha^2 < z < 1$ ) 領域の遅い拡散領域は on-off 間欠性の自己相似性を反映して

## 4.2 確率密度関数 PDF

Fourier 空間におけるジャンプ幅の確率密度関数  $\tilde{\lambda}(k)$  を  $k=0$  のまわりで展開し高次の項を無視すると

$$\tilde{\lambda}(k) = 1 - \frac{\Sigma^2}{2} k^2 \quad (29)$$

と書ける。また、式 (19) をより簡単に

$$\tilde{\psi}(s) = 1 - q(s), \quad q(s) = \begin{cases} 1 - 2\sqrt{t^*s} & (1 \ll \tau s \ll 1/\alpha^2) \\ 1 - \bar{t}s & (\tau s \ll 1) \end{cases} \quad (30)$$

と近似する。式 (29) と (30) を式 (11) に代入し、 $\tau s \ll 1$  または  $1 \ll \tau s \ll 1/\alpha^2$  で  $|q(s)| \ll 1$  となるので、 $k^2 q(s)$  の項を無視すると、

$$P(k, s) = \frac{1}{\Sigma s} \sqrt{\frac{q(s)}{2}} \frac{2\sqrt{\frac{2q(s)}{\Sigma}}}{k^2 + \frac{2q(s)}{\Sigma^2}}, \quad (31)$$

と書ける。逆 Fourier 変換によって

$$P(y, s) = \frac{1}{\Sigma s} \sqrt{\frac{\delta(s)}{2}} e^{-\frac{|y|}{\Sigma} \sqrt{2\delta(s)}}. \quad (32)$$

となるので  $u = y/\Sigma$  のスケール変換によって

$$P(u, s) = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{q(s)}{2}} e^{-|u| \sqrt{2q(s)}}, \quad (33)$$

と書ける。これは規格化条件を満足している。

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(u, t) du = \mathcal{L}^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} P(u, s) du = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] = 1. \quad (34)$$

式 (29) は粗い近似であるが、ここから得られる結果は、ジャンプが隣接セルのみに制限された Zumofen らの解析結果 [4] を含んだ、より一般的な結果である。

### 4.2.1 時間領域 $t^* \ll t \ll \tau$

Laplace 空間において PDF は

$$P(u, s) = t^* \Theta(u, t^* s) \quad (35)$$

のスケーリング形を示し、スケーリング関数

$$\Theta(u, s) = s^{-3/4} \exp(-2|u|s^{1/4}), \quad (36)$$

を持つ。逆 Laplace 変換によって式 (35) は

$$P(u, t) = \Theta(u, t/t^*). \quad (37)$$

と書ける。Zumofen [4] らの手法に従って  $\Theta$  の具体的な関数形を求めよう。解析的に直接式 (36) を Laplace 変換できないので、近似式によって求めることにする。はじめに、 $|u|s^{1/4} \ll 1$  について式 (36) を二次のオーダーまで展開する

$$\Theta(u, s) \sim s^{-3/4} - 2|u|s^{-1/2} + 2u^2s^{-1/4}. \quad (38)$$

$$\Theta(u, t) = a_0 t^{-1/4} (1 - a_1 |u| t^{-1/4} + a_2 u^2 t^{-1/2}). \quad (39)$$

を得る. スケーリング変数  $\xi \equiv |u|(\frac{t}{t^*})^{-1/4}$  を導入し

$$P(u, t) = a_0 \left(\frac{t}{t^*}\right)^{-1/4} (1 - a_1 \xi + a_2 \xi^2) \quad (40)$$

と書き表す. 二次のキュミュラント近似によって  $P(u, t)$  は次の形で書き表される.

$$P(u, t) \simeq a_0 \left(\frac{t}{t^*}\right)^{-1/4} \exp(-b_1 \xi - b_2 \xi^2) \quad (41)$$

ここで  $a_0 = \frac{1}{\Gamma(3/4)}$ ,  $b_1 = 2 \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/2)}$ ,  $b_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{\pi} \Gamma^2(3/4)$  は定数である. 一方,  $\xi \gg 1$  で鞍点法を使って

$$\Theta(u, t) = \mathcal{L}^{-1}[\Theta(u, s)], \quad (42)$$

$$\simeq \exp(\log \Theta(u, s^*) + s^* t) \left[ 2\pi \frac{\partial^2 \log \Theta(u, s)}{\partial s^2} \Big|_{s=s^*} \right]^{-1/2}, \quad (43)$$

となる. ここで  $s^* = (\frac{2t}{|u|})^{-4/3}$  である. 従って

$$\Theta(u, t) = c_0 t^{1/4} \xi^{-1/3} \exp(-c_1 \xi^{4/3}), \quad (44)$$

と表される.  $c_0 = \frac{2^{5/6}}{\sqrt{3\pi}}$ ,  $c_1 = \frac{3}{2^{4/3}}$  は定数である.  $\xi \rightarrow 0$  と  $\xi \rightarrow \infty$  の両極限では, 以下の漸近形で表され,

$$\left(\frac{t}{t^*}\right)^{1/4} P(u, t) = f(\xi), \quad (45)$$

スケーリング関数

$$f(\xi) = \begin{cases} a_0 \exp(-b_1 \xi - b_2 \xi^2) & (\xi \ll 1), \\ c_0 \xi^{-1/3} \exp(-c_1 \xi^{4/3}) & (\xi \gg 1). \end{cases} \quad (46)$$

を持つ.

#### 4.2.2 時間領域 $t \gg \tau$

長時間領域の PDF は

$$P(u, s) = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{\bar{t}s}{2}} \exp(-2|u| \sqrt{\frac{\bar{t}s}{2}}), \quad (47)$$

で表されるので, 逆 Laplace 変換は

$$P(u, t) = \sqrt{\frac{\bar{t}}{2\pi t}} \exp(-\frac{\bar{t}u^2}{2t}). \quad (48)$$

となる. スケーリング変数  $\zeta \equiv |u| \sqrt{\frac{\bar{t}}{t}}$  を導入すると, 次のスケーリング則

$$\sqrt{\frac{t}{\bar{t}}} P(u, t) = g(\zeta), \quad (49)$$

を満たすことが分かる. スケーリング関数は

$$g(\zeta) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(-\zeta^2/2). \quad (50)$$

である. これは通常の拡散  $\langle u^2 \rangle(t) = \frac{t}{\bar{t}}$  を意味している.

## 5 Anomalous Production of Heat

on-off 拡散によるエネルギー損失について議論する. 式 (1), (2) で与えられた振り子のモデルにおけるエネルギー散逸率は  $W(t) = \gamma \dot{\theta}^2$  である. 外部から供給されるエネルギーの散逸率  $W(t)$  は時間的揺らぎを示す. on-off 拡散の発生領域では,  $W(t)$  はまさに on-off 間欠的に揺らいでいる. なぜなら, 速度  $\dot{\theta}$  が on-off 間欠性を示しているからである. エネルギー損失

$$J(t) \equiv \int_0^t W(t') dt' \quad (51)$$

のアンサンブル平均は,  $W(t)$  と  $J(t)$  をそれぞれ速度と位置と見なせば, CTRW 理論に適用することができる. ただし, 定義から散逸率  $W(t)$  は負を取らないので, 一方向にしかジャンプしないという条件を加えてやればよい. 式 (12) を用いると,

$$\frac{\langle J \rangle(t)}{2D_J t} = \phi\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (52)$$

のスケーリング則が得られた. ここでスケーリング関数は式 (27), (28) に等しい. また,  $2D_J$  は  $W(t)$  の長時間平均を表す. 従って, 時間領域  $t^* \ll t \ll \tau$  では, エネルギー損失が時間に比例しない *anomalous production of heat* が観測されると期待される.

## 6 数値実験との比較

$G(t)$  をカオス的 Rössler 系の  $y$  成分を用いて表すことにする.

$$\dot{X} = -Y - Z, \quad (53)$$

$$\dot{Y} = X + AY, \quad (54)$$

$$\dot{Z} = B + Z(X - C), \quad (55)$$

ここで  $A = 1/5$ ,  $B = 1/5$  and  $C = 10$  である.

$$G(t) \equiv \sqrt{L} \frac{Y(t) - \langle Y \rangle}{\langle (Y(t) - \langle Y \rangle)^2 \rangle} \quad (56)$$

で定義する. 従って  $G(t)$  は  $\langle G \rangle(t) = 0$ ,  $\langle G^2 \rangle(t) = L$  である. 図 3 と 図 4 は on-off 拡散発生パラメータ領域での平均二乗変位  $\langle y^2 \rangle(t)$  とエネルギー損失  $\langle J \rangle(t)$  を表している.  $\epsilon$  は臨界点からの距離  $\epsilon = \frac{L-L_c}{L_c}$  である.

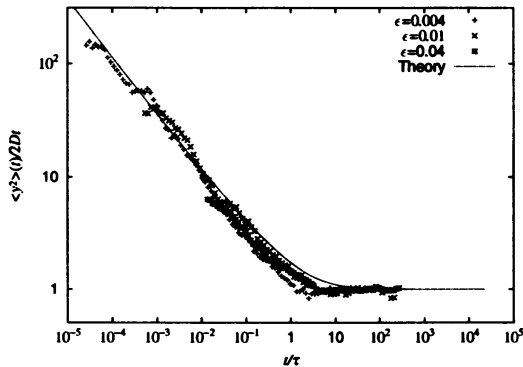


図 3

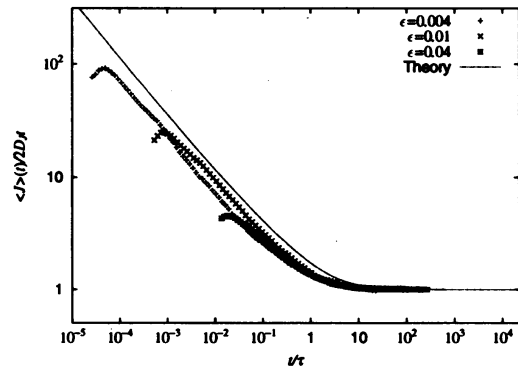


図 4

振り子の回転数についての PDF  $P(y, t)$  のスケーリング形を時間領域  $t^* \ll t \ll \tau$  において  $(\epsilon, t) = (0.04, 204.8), (0.04, 2048.0), (0.01, 2048.0), (0.01, 20480.0), (0.004, 2048.0), (0.004, 20480.0)$  でプロットしている (図 5). 式 (36) は漸近形であるが, 図 5 は式 (46) を直接逆 Laplace 変換したものと比較している. また,  $t \gg \tau$  領域の PDF のスケーリングについては  $(\epsilon, t) = (0.04, 10240.0), (0.04, 102400.0), (0.01, 102400.0), (0.01, 1024000.0)$  でプロットしている (図 6). それぞれ, CTRW 理論で導出した理論値とよく一致していることが分かる.

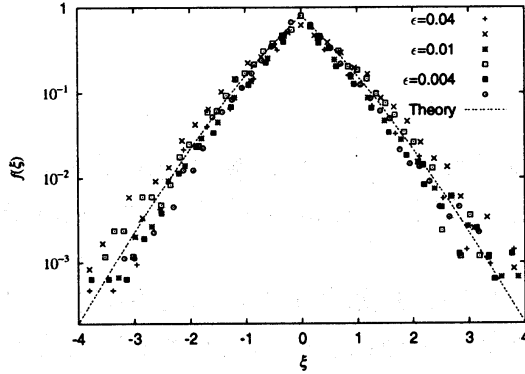


図 5

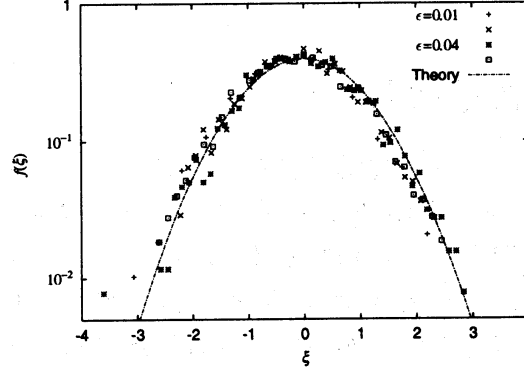


図 6

## 7 まとめ

CTRW の手法を用いて on-off 拡散のモーメント, および PDF を解析的に計算し, 特徴的時間に分けられた 2 つの領域が存在することを見出した. on-off 拡散によるエネルギー散逸にも注目し, MSD と同様のスケーリングに従うことを見出した. この anomalous production of heat は電子回路などで実験的観測が期待される. これら on-off 拡散の統計性の詳細な導出が [5] で行われている.

今回 on-off 拡散の発生モデルとして, カオス的に駆動されるパラメトリック振動子を導入したが, 確率的駆動についても Landa [6] らによって on-off 間欠性の統計特性を示すことが発見されている. このような系は振動子の典型的モデルであり, on-off 間欠性や on-off 拡散は広範囲のシステムで観測されると期待される.

## 参考文献

- [1] H. Fujisaka and T. Yamada, Prog. Theor. Phys. **74**(1985)918, **75**(1986)1087.
- [2] T. Harada, H. Hata and H. Fujisaka, J. Phys **A32**(1999)1557.
- [3] E. W. Montroll and G. H. Weiss, J. Math. Phys **6**(1965)167; E. W. Montroll and M. F. Shlesinger, *Studies in Statistical Mechanics vol. 11, edited by J. L. Lebowitz and E. W. Montroll* (North-Holland, Amsterdam, 1984).
- [4] G. Zumofen and J. Klafer, Phys. Rev. **E47**(1993)851.
- [5] S. Miyazaki, J. Phys. Soc. Jpn. **69**(2000),2719; S. Miyazaki, T. Harada and A. Budyono, Prog. Theor. Phys. (to be published).
- [6] P. S. Landa, A. A. Zaikin, M. G. Rosenblum and J. Kurths, Phys. Rev. **E56**(1997)1465.