

有向曲面, 非有向曲面のレベルつき写像類群のアーベル化について

岐阜大学教育学部 佐藤 正寿

Masatoshi Sato

Faculty of Education,

Gifu university

1 はじめに

本稿ではレベルつき写像類群のアーベル化について得られた結果 [6], [16] の要約を述べる. また, 有向曲面のレベル 4 写像類群のアーベル化はまだ決定されていないが, これに関連して, 最近調べたことについて述べる.

第 2 節では [6] において得られた非有向曲面のレベル 2 写像類群のアーベル化の結果について述べる. 第 3 節では, [16] において得られた, 有向曲面のレベルつき写像類群のアーベル化の結果について述べる. また, [16] において, アーベル化の構造を調べる上で, 曲面の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 1 次ホモロジー群を基底とする自由加群からレベル 2 写像類群のアーベル化への全射準同型を構成した. 他のレベルの場合についても, 全射とは限らないが同様の準同型を構成できる. 本稿の第 4 節ではこの準同型に関連して, 最近得られた結果について述べる.

有向曲面と非有向曲面のレベル 2 写像類群のアーベル化には大きな違いがある. 非有向曲面の場合には, レベル 2 写像類群上に代数的に構成された, mod 2 Johnson 準同型 ([3], [8], [13] 参照) という加群への準同型によって, そのアーベル化が完全に記述される. これに対し, 有向曲面の場合にも mod 2 Johnson 準同型は構成できるが, これはレベル 2 写像類群のアーベル化に単射を誘導せず, アーベル化を記述するには不十分である. その理由は, 有向曲面の Torelli 群のアーベル化には幾何的な位数 2 の元が多く存在し, それらの mod 2 Johnson 準同型による値が 0 になるためである.

コホモロジー類の言葉では, この位数 2 の元は Birman-Craggs 準同型 ([2]) (もしくは, Torelli 群の元による 2 つのハンドル体の貼り合わせにより得られる整ホモロジー 3 球面の Rochlin 不変量) に対応するものである. 上で幾何的と述べたのはそのためである. 筆者は, Heap [5] により構成された有向曲面の Torelli 群上の加群への準同型と類似した準同型をレベル 2 写像類群上に構成することにより, これらの元が 1 つを除いて, レベル 2 写像類群のアーベル化において非自明であることを示し, アーベル化を完全に決定した.

現在筆者が興味をもっていることとして, d が 4 の倍数のときの有向曲面のレベル d 写像類群のアーベル化がある. これは完全には決定されておらず, 原因は, 上で述べた Torelli 群のアーベル化にすむ位数 2 の元のうちの 1 つが, レベル d 写像類群において消

えるかどうかはわかっていないためである。レベル 2 写像類群については、第 3 節で述べる、曲面の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 係数 1 次ホモロジー群の生成する自由加群からアーベル化への準同型を調べることで、この Torelli 群のアーベル化にすむ位数 2 の元が消えることが偶然示せたため、アーベル化が完全に決定できた。

なお、もしこの元がレベル d 写像類群で生きているとすると、つまり、Torelli 群のアーベル化のレベル d 写像類群による coinvariant (定義は 3 節で後述する) から、レベル d 写像類群のアーベル化への準同型が単射だとすると、Torelli 群上で構成された Birman-Craggs 準同型を、レベル d 写像類群上の準同型に拡張することができる。これに関連して、レベル d 写像類群により 2 つのハンドル体を貼り合わせて得られる $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3 球面の Rochlin 不変量をレベル d 写像類群上の関数として表すことにも筆者は興味をもっている。

2 非有向曲面のレベル 2 写像類群のアーベル化

廣瀬進氏との共同研究 [6] において得られた、非有向曲面のレベル 2 写像類群のアーベル化と生成系に関する結果について述べる。曲面 N_g を $\mathbb{R}P^2$ の g 個の連結和として定める。曲面 N_g の写像類群を、 $\mathcal{M}(N_g) = \text{Diff } N_g / (\text{isotopy})$ として定める。以下では位数 d の巡回群を $\mathbb{Z}_d$ と表すことにする。写像類群 $\mathcal{M}(N_g)$ は曲面の $\mathbb{Z}_2$ 係数 1 次ホモロジー群に作用するため、準同型 $\mathcal{M}(N_g) \rightarrow \text{Aut } H_1(N_g; \mathbb{Z}_2)$ が定まる。この準同型の核を $\Gamma_2(N_g)$ と表し、レベル 2 写像類群とよぶ。

写像類群 $\mathcal{M}(N_g)$ の有限生成系は Chillingworth [4], Birman-Chillingworth [1] において与えられており、レベル 2 写像類群 $\Gamma_2(N_g)$ の有限生成系は Szepietowski [18] により求められている。Szepietowski はまず、 Y -homeomorphism と呼ばれる pushing map の一種により、レベル 2 写像類群が正規生成されることを示した ([17])。

まず、 Y -homeomorphism (もしくは、crosscap slide と呼ばれる) について説明する。非有向曲面の単純閉曲線は 1 次 Stiefel-Whitney 類の値によって、その管状近傍がアニュラスになるか、メビウスの帯になるか、の 2 種類のものがある。これらをそれぞれ A -circle, M -circle と呼ぶことにする。曲面 N_g 内の A -circle a と M -circle m が図 1 のように 1 点で交わっているとする。このとき M -circle の近傍 T から、内部 (メビウスの帯) を取り除くと境界は円周である。 A -circle と、この M -circle の近傍 T の境界は 2 点であり、 A -circle と $N_g - \text{Int } T$ の共通部分は、上の 2 点を端点にもつ弧であることを注意する。 Y -homeomorphism $Y_{m,a}$ とは、右側の図にあるように、この弧に沿って T を 1 周させる写像として定義される。なお、中央の図では、 a の近傍を m の近傍に沿ってハンドルスライドしている。

Szepietowski はさらに、有限個の Y -homeomorphism と Dehn ツイストの 2 乗の生成する部分群が正規であることを示し、 Y -homeomorphism で正規生成される部分群、つまり、レベル 2 写像類群に一致することを示した ([18])。これにより、有限個の生成系を与

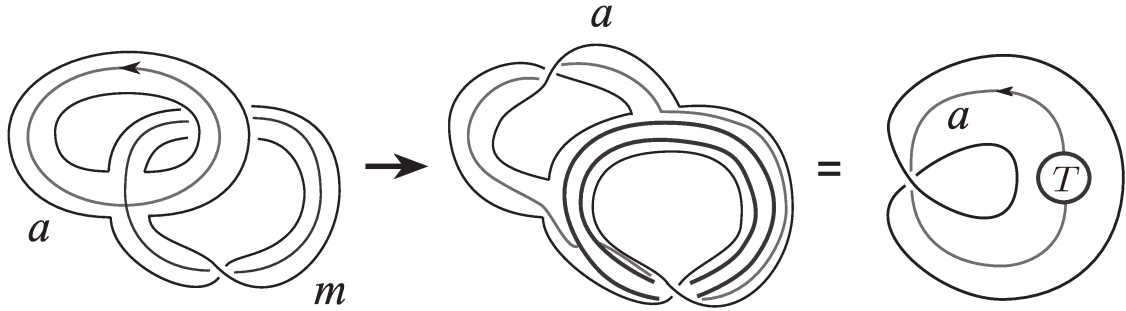


図 1: A-circle a and M-circle m

えた. 廣瀬氏との研究では, Szepietowski によるこの有限生成系の位数を小さくし, 位数 $\binom{g}{3} + \binom{g}{2}$ の生成系を構成した.

この生成系を説明する. 曲面 N_g は S^2 から g 枚の開円板を取り除き, 境界のそれぞれの連結成分において, その対蹠点を同一視することにより得られる. これによって, 図 2 のように曲面 N_g を描くことにする. 曲面 N_g 内の単純閉曲線として, 図のように $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ をとる. 閉曲線 $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ は k が偶数のとき A-curve, k が奇数のとき m-curve となるこ

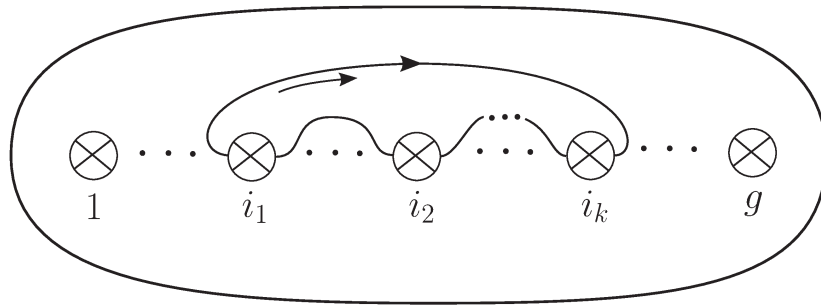


図 2: simple closed curve $\alpha_{i_1, i_2, \dots, i_k}$

とに注意する. 我々の生成系は以下のものである. また, これは mod 2 Johnson 準同型の像の $\mathbb{Z}_2$ -rank に一致することがわかり, この生成系が最小位数のものであることを示した.

定理 2.1 ([6]). $g \geq 4$ とする. レベル 2 写像類群 $\Gamma_2(N_g)$ は以下の元で生成される. また, これは最小位数の生成系である.

- (i) $Y_{\alpha_i, \alpha_{i,j}}$ for $i \in \{1, \dots, g-1\}$, $j \in \{1, \dots, g\}$, and $i \neq j$,
- (ii) $T_{\alpha_{1,j,k,l}}^2$ for $1 < j < k < l$.

特に mod 2 Johnson 準同型がアーベル化に単射を誘導することもわかり, アーベル化が決定できた. 以下では, ホモロジー群は係数を明記しない場合, 整数係数とする.

定理 2.2 ([6]). $g \geq 4$ のとき,

$$H_1(\Gamma_2(N_g)) \cong \mathbb{Z}_2^{\binom{g}{3} + \binom{g}{2}}.$$

3 有向曲面のレベル d 写像類群のアーベル化

次に, [16] において得られた, 有向曲面のレベル d 写像類群のアーベル化の結果を述べる. 説明を簡単にするため, 連結な境界をもつ種数 g の有向コンパクト曲面 $\Sigma_{g,1}$ の写像類群

$$\mathcal{M}_{g,1} = \text{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}) / (\text{isotopy rel } \partial\Sigma_g)$$

の場合に述べる. 筆者が決定したのは, $d = 2$ と d が奇数の場合におけるレベル d 写像類群のアーベル化である. d が奇数のときのアーベル化は, Perron [13], Putman [14] においても独立に決定されている. また, $d = 2$ の結果を拡張して, Putman [15] は $d \equiv 2 \pmod{4}$ のときのレベル d 写像類群のアーベル化を決定している. d が 4 の倍数のときには, Torelli 群のアーベル化にすむ 1 つの位数 2 の元が, レベル d 写像類群のアーベル化において自明かどうかはわかっていないため, 未解決である.

有向曲面のレベル d 写像類群のアーベル化を決定する上で, 完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{I}_{g,1} \longrightarrow \Gamma_d(\Sigma_{g,1}) \longrightarrow \text{Sp}[d] \longrightarrow 1.$$

が重要である. ここで, $\text{Sp}[d]$ は symplectic 群のレベル d 主合同部分群である.

一般に群 G が加群 M に左から作用しているとき, coinvariant M_G とは

$$M_G = \frac{M}{\{gm - m \in M \mid g \in G, m \in M\}}$$

で定義される加群である. 上で述べた群の完全列はアーベル化の間に完全列

$$H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[d]} \longrightarrow H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})) \longrightarrow H_1(\text{Sp}[d]) \longrightarrow 0 \quad (1)$$

を誘導する. ここで, $H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[d]}$ は群 $\Gamma_d(\Sigma_{g,1})$ の共役作用が誘導する, $H_1(\mathcal{I}_{g,1})$ への $\text{Sp}[d]$ 作用の coinvariant である. 以下では, $H_d = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_d)$ とおく. $H_1(\mathcal{I}_{g,1})$ の構造は Johnson [7] において求められており, 特に coinvariant は以下ようになる.

$$H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[d]} \cong \begin{cases} \Lambda^3 H_d \oplus \mathbb{Z}_2^{\binom{2g}{2} + \binom{2g}{1} + \binom{2g}{0}}, & \text{if } d \text{ is even,} \\ \Lambda^3 H_d, & \text{if } d \text{ is odd.} \end{cases}$$

ここで, d が偶数のときに現れる位数 2 の元が, Birman-Craggs 準同型, もしくは, 整ホモロジー 3 球面の Rochlin 不変量に由来する幾何的なものである.

また, $H_1(\text{Sp}[d])$ は [16] において決定されている. d が奇数のときは, [13], [14] においても計算されている. $\mathbb{Z}_d$ を係数にもつ $2g$ 次正方行列であって, ${}^tAJ + JA = 0$ を満たすものの全体を $\mathfrak{sp}(2g; \mathbb{Z}_d)$ をと表す.

補題 3.1 ([16]). $g \geq 2$ とする. d が奇数のとき,

$$H_1(\mathrm{Sp}[d]) = \mathfrak{sp}(2g; \mathbb{Z}_d).$$

また, d が偶数のとき,

$$0 \longrightarrow H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_1(\mathrm{Sp}[d]) \longrightarrow \mathfrak{sp}(2g; \mathbb{Z}_d) \longrightarrow 0 \quad (2)$$

は完全であり, 加群としては $H_1(\mathrm{Sp}[d]) = \mathbb{Z}_d^{\binom{2g}{2}} \oplus \mathbb{Z}_{2d}^{\binom{2g}{1}}$.

3.1 d が奇数のとき

完全列 (1) と以上で述べてきたことから, d が奇数のとき次の完全列が得られる

$$\Lambda^3 H_d \longrightarrow H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})) \longrightarrow \mathfrak{sp}(2g; \mathbb{Z}_d) \longrightarrow 0.$$

河澄 [8] において, mod d Johnson 準同型

$$\tau_1 : \Gamma_d(\Sigma_{g,1}) \rightarrow H_d^{\otimes 3}$$

が構成されており, 特に d が奇数のとき, 上の完全列の分裂を与えることがわかった. なお, Broadus-Farb-Putman [3], Perron [13] も同種の準同型を独立に構成している.

これにより, レベル d 写像類群のアーベル化は以下のように表される.

定理 3.2 ([13], [14], [16]). $g \geq 4$, d が奇数のとき,

$$H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})) = \Lambda^3 H_d \oplus \mathfrak{sp}(2g; \mathbb{Z}_d).$$

3.2 $d = 2$ のとき

次に, $d = 2$ のときを考える. d が奇数のときと同様に, mod 2 Johnson 準同型がレベル 2 写像類群上に構成できるが, $H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\mathrm{Sp}[d]}$ には Birman-Craggs 準同型に由来する $\mathbb{Z}_2$ 加群があるため, これは完全列の分裂を与えるわけではなく, アーベル化を決定するのに不十分である. 代わりに, Heap[5] により構成された Torelli 群上の準同型の mod 2 版とよぶべきものを, レベル 2 写像類群上に構成することで, これが解決できた. これについて説明する.

写像類 $[f] \in \Gamma_2(\Sigma_g)$ について, 有向閉 3 次元多様体 $M_{[f]}$ を

$$M_{[f]} = ((\Sigma_{g,1} \times [0, 1]) / (f(x), 0) \sim (x, 1)) \cup (\partial \Sigma_{g,1} \times D^2)$$

により定める. このとき, $H_1(M_{[f]}; \mathbb{Z}_2) \cong H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_2)$ となる. また, 多様体 M の spin 構造全体を $\mathrm{spin} M$ と表すとき, fiber への制限を通して, 自然な全単射写像 $\mathrm{spin} \Sigma_{g,1} \rightarrow$

$\text{spin } M_{[f]}$ が存在する. したがって, 以下では $M_{[f]}$ の 1 次コホモロジー群, および, spin 構造は $\Sigma_{g,1}$ のものと同一視する.

以上の準備の下, レベル 2 写像類群から 3 次ボルディズム群 $\Omega_3^{\text{spin}}(\mathbb{Z}_2)$ への準同型写像を構成することができる. ここで, $\Omega_3^{\text{spin}}(\mathbb{Z}_2)$ とは, 3 次元有向閉多様体 M , その spin 構造 σ , $\mathbb{Z}_2$ 係数 1 次コホモロジー類 c の組のボルディズム類であり, あるコンパクト有向 4 次元多様体 V とその spin 構造 τ が存在して,

$$\partial V = M_1 \amalg (-M_2), \quad \tau|_{M_i} = \sigma_i,$$

さらに $H^1(V; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(M_i; \mathbb{Z}_2)$ による c の像が c_i であるとき, $[M_1, \sigma_1, c_1] = [M_2, \sigma_2, c_2] \in \Omega_3^{\text{spin}}(\mathbb{Z}_2)$ とみなすものである. なお, Brown 不変量と呼ばれる, 曲面の pin^- 構造の不変量を通して, $\Omega_3^{\text{spin}}(\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_8$ となることが知られている.

定理 3.3 ([16]). $g \geq 4$ とし, $\sigma \in \text{spin } \Sigma_{g,1}$, $c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_2)$ とおく. 写像

$$\eta_{\sigma,c} : \Gamma_2(\Sigma_{g,1}) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(\mathbb{Z}_2)$$

を $\eta_{\sigma,c}(\varphi) = [M_\varphi, \sigma, c]$ と定めると準同型. また, $\eta_{\sigma,c}$ が誘導する準同型

$$\{(\eta_{\sigma,c})_*\}_{\substack{\sigma \in \text{spin } \Sigma_{g,1}, \\ c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_2)}} : H_1(\Gamma_2(\Sigma_{g,1})) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(\mathbb{Z}_2)^N$$

は単射. ただしここで, N は $\text{spin } \Sigma_{g,1}$ と $H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_2)$ の位数の積である. またさらに,

$$H_1(\Gamma_2(\Sigma_{g,1})) = \mathbb{Z}_8^{\binom{2g}{1}} \oplus \mathbb{Z}_4^{\binom{2g}{2}} \oplus \mathbb{Z}_2^{\binom{2g}{3}}.$$

注意 3.4. 特に完全列 (2) からわかるように,

$$\text{Ker}(H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[2]} \rightarrow H_1(\Gamma_2(\Sigma_{g,1}))) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

したがって, Birman-Craggs 準同型の中には, 準同型としてレベル 2 写像類群上に拡張しないものがあることがわかる. (実は, 任意の 2 つの Birman-Craggs 準同型の差は, 上の準同型を用いてレベル 2 写像類群上に拡張することがわかっている)

4 レベル d 写像類群のアーベル化における Dehn ツイストの d 乗

最後にレベル 4 写像類群のアーベル化を調べるために, 曲面の $\mathbb{Z}_d$ 係数 1 次ホモロジー群を基底とする自由加群からレベル d 写像類群のアーベル化への準同型の性質を調べる. 記号 H_d^{prim} により, $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_d)$ の primitive な元 (言い換えれば, 曲面を分割しない有向単純閉曲線で代表できる元) 全体のなす部分集合を表す.

補題 4.1 ([16]). 準同型 $\Phi_d : \mathbb{Z}[H_d^{\text{prim}}] \rightarrow H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1}))$ を $\Phi_d([x]) = [T_x^d]$ により定めると, *well-defined*. ただし, $[x]$ は有向単純閉曲線 $x \subset \Sigma_{g,1}$ の代表するホモロジー類とし, $T_x \in \mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ は x に沿う Dehn ツイストとする.

証明. 証明の概略を述べる. H_d の元は有向単純閉曲線で代表できる. もし, $\Sigma_{g,1}$ 内の有向閉曲線 x, x' が $[x] = [x'] \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_d)$ を満たすとする. このとき, [16, Lemma 6.2] に書かれているように, ある写像類 $\varphi \in \Gamma_d(\Sigma_{g,1})$ が存在して, $\varphi(x) = x'$. またよく知られているように, 写像類群において関係式 $\varphi T_x \varphi^{-1} = T_{x'}$ が成り立つ. したがって,

$$[T_{x'}^d] = [\varphi T_x^d \varphi^{-1}] = [T_x^d] \in H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})).$$

□

本節では, 上で構成した準同型について次を示すことを目標とする. より精密に調べれば, レベル 2 写像類群のときと同様に $\text{Ker}(H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[d]} \rightarrow H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})))$ が $\mathbb{Z}_2$ であることを示せるかもしれないが, 現状ではわかっていない (なお, $\text{Ker}(H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[d]} \rightarrow H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1}))) = 0$ or $\mathbb{Z}_2$ まではわかっている).

命題 4.2. $x \subset \Sigma_{g,1}$ を曲面を分割しない単純閉曲線とする.

(i) $d \equiv 0 \pmod{4}$ のとき,

$$2d[T_x^d] = 0 \in H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})).$$

(ii) $d \equiv 2 \pmod{4}$ のとき,

$$4d[T_x^d] = 0 \in H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1})).$$

これを示すために, まず次の補題を示す.

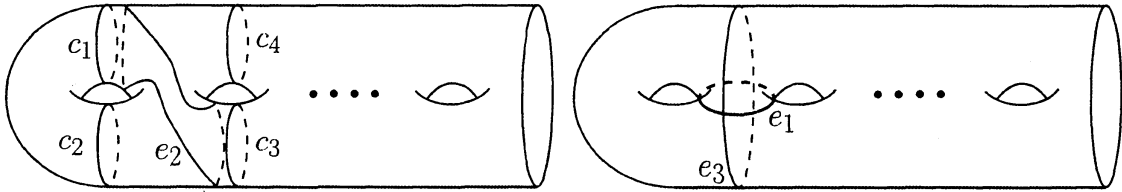


図 3:

補題 4.3. 図のように単純閉曲線 $c_1, c_4, e_1, e_2 \subset \Sigma_{g,1}$ をとる. d を 4 の倍数, かつ, 正の数とする. このとき,

$$2[T_{c_1}^d] + 2[T_{c_4}^d] = [T_{e_1}^d] + [T_{e_2}^d].$$

証明. 簡単のため, 曲線 $c_1, c_2, c_3, c_4, e_1, e_2, e_3$ に沿う Dehn ツイストも $c_1, c_2, c_3, c_4, e_1, e_2, e_3$ と表す. このとき, Lantern 関係式より,

$$c_1 c_2 c_3 c_4 e_2^{-1} = e_3 e_1.$$

e_3, c_1, c_2, c_3, c_4 はすべて可換なので,

$$(c_1 c_2 c_3 c_4 e_2^{-1})^d = c_1^d c_2^d c_3^d c_4^d e_2^{-d}.$$

また,

$$(e_3 e_1)^d = e_3 (e_1 e_3 e_1^{-1}) (e_1^2 e_3 e_1^{-2}) \cdots (e_1^{d-1} e_3 e_1^{-(d-1)}) e_1^d.$$

これより特に,

$$[c_1^d] + [c_2^d] + [c_3^d c_4^d] = \sum_{i=0}^{d-1} [e_1^i e_3 e_1^{-i}] + [e_1^d] + [e_2^d].$$

曲面を分割する単純閉曲線に沿う Dehn ツイスト全体で生成される, 写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ の部分群を $\mathcal{K}_{g,1}$ と表す. Johnson 核と呼ばれる部分群である. $\text{Im}(H_1(\mathcal{K}_{g,1}) \rightarrow H_1(\mathcal{I}_{g,1}))$ はレベル 2 写像類群の共役作用で不変な $\mathbb{Z}_2$ 加群であることが知られている. いま e_3 は曲面を分割する単純閉曲線に沿う Dehn ツイストなので,

$$[e_3] = [e_1^2 e_3 e_1^{-2}] = \cdots [e_3^{d-2} e_1 e_3^{-(d-2)}], [e_3 e_1 e_3^{-1}] = [e_3^3 e_1 e_3^{-3}] = \cdots [e_3^{d-1} e_1 e_3^{-(d-1)}].$$

これより, d が 4 の倍数のとき,

$$\sum_{i=0}^{d-1} [e_1^i e_3 e_1^{-i}] = 0.$$

したがって, $[c_1^d] + [c_2^d] + [c_3^d c_4^d] = [e_1^d] + [e_2^d]$ を得る. $c_3 c_4^{-1} \in \mathcal{I}_{g,1}$ であり, 補題 3.1 の直前で述べたように $H_1(\mathcal{I}_{g,1})_{\text{Sp}[d]}$ の位数は高々 d なので,

$$[c_3^d c_4^d] = d[c_3 c_4^{-1}] + [c_4^{2d}] = 2[c_4^d].$$

また, $c_1 = c_2 \in \mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ より, $2[c_1^d] + 2[c_4^d] = [e_1^d] + [e_2^d]$ を得る. □

命題 4.2 の証明. まず (i) を示す. c_1, c_4 に適当に向きをいれ, その有向閉曲線が表すホモロジー類をそれぞれ $B_1, B_2 \in H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z}_d)$ と表す. 写像類 $\varphi \in \mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ として, $\varphi_*(B_1) = B_1 + B_2, \varphi_*(B_2) = B_2$ を満たすものをとる. 補題 4.3 で得た式は Φ_d を用いて,

$$2\Phi_d(B_1) + 2\Phi_d(B_2) = \Phi_d(B_1 + B_2) + \Phi_d(B_1 - B_2)$$

と表せる. これに $k = 0, 1, \dots, d-1$ 回 φ を作用させると,

$$2 \sum_{k=0}^{d-1} (\Phi_d(B_1 + k B_2) + \Phi_d(B_2)) = \sum_{k=0}^{d-1} (\Phi_d(B_1 + (k+1) B_2) + \Phi_d(B_1 + (k-1) B_2)).$$

これより, $2d\Phi_d(B_2) = 0$. つまり, $2d[T_{c_4}^d] = 0$ が得られた. 任意の 2 つの曲面を分割しない単純閉曲線は, ある写像類 $\varphi \in \mathcal{M}(\Sigma_{g,1})$ で互いにうつり合うので,

$$2d[T_x^d] = 2d[\varphi T_{c_4}^d \varphi^{-1}] = \varphi_*(2d[T_{c_4}^d]) = 0 \in H_1(\Gamma_d(\Sigma_{g,1}))$$

が得られる.

(ii) については, 補題 4.3 を $d \equiv 2 \pmod{4}$ のときに調べることで, ほぼ同様に示すことができる. $\square$

参考文献

- [1] **J. S. Birman and D. R. J. Chillingworth**, On the homeotopy group of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 71 (1972), 437–448. Erratum: Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 136 (2004), 441–441.
- [2] **J. S. Birman and R. Craggs**, The μ -invariant of 3-manifolds and certain structural properties of the group of homeomorphisms of a closed, oriented 2-manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 237 (1978), 283–309
- [3] **N. Broaddus, B. Farb, and A. Putman**, Irreducible Sp-representations and subgroup distortion in the mapping class group, Comment. Math. Helv. 86 (2011), 537–556.
- [4] **D. R. J. Chillingworth**, A finite set of generators for the homeotopy group of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 65 (1969), 409–430.
- [5] **A. Heap**, Bordism invariants of the mapping class group, Topology 45 (2006), 851–886.
- [6] **S. Hirose and M. Sato**, A minimal generating set of the level 2 mapping class group of a non-orientable surface, arXiv preprint, 1306.5382.
- [7] **D. Johnson**, The structure of the Torelli group III, Topology 24 (1985), 127–144.
- [8] **N. Kawazumi**, Cohomological aspects of Magnus expansions, arXiv preprint, math.GT/0505497.
- [9] **M. Korkmaz**, First homology group of mapping class groups of nonorientable surfaces, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 123 (1998), 487–499.
- [10] **W. B. R. Lickorish**, Homeomorphisms of non-orientable two-manifolds, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 59 (1963), 307–317.

- [11] **W. B. R. Lickorish**, On the homeomorphisms of a non-orientable surface, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 61 (1965), 61–64.
- [12] **J. D. McCarthy and U. Pinkall**, Representing homology automorphisms of nonorientable surfaces, Max Planck Inst. preprint MPI/SFB 85-11, revised version written on 26 Feb 2004 available from <http://www.math.msu.edu/~mccarthy/publications/selected.papers.html>
- [13] **B. Perron**, Filtration de Johnson et groupe de Torelli modulo p , p premier, C.R. Math. Acad. Sci. Paris 346 no. 11-12 (2008), 667–670.
- [14] **A. Putman**, The abelianization of the level L mapping class group, arXiv preprint, 0803.0539.
- [15] **A. Putman**, The Picard group of the moduli space of curves with level structures, Duke Math. J. 161 (2012), no. 4, 623–674.
- [16] **M. Sato**, The abelianization of the level d mapping class group, J. Topology 3 no.4 (2010), 847–882.
- [17] **B. Szepietowski**, Crosscap slides and the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, Geom. Dedicata 160 (2012), 169–183
- [18] **B. Szepietowski**, A finite generating set for the level 2 mapping class group of a nonorientable surface, Kodai Math. J. 36 (2013), 1–14.