

Weyl 列 と Van der Corput 列 について On Weyl sequences and Van der Corput sequences

日本アイビーエム 東京基礎研究所 手塚 集 (Shu Tezuka)

1. はじめに

今日使われている low-discrepancy sequences は、2つのタイプに分類される。一つは Weyl 列 $\{n\alpha\}$, $n=0,1,2,\dots$, から派生したもので、その系統として、Richtmyer 列がある。ここで、 α は無理数であるとし、記号 $\{ \}$ は小数部分のみをとることを意味している。もうひとつは Van der Corput 列 $\phi(n)$, $n=0,1,2,\dots$, の一般化である。ここで、 ϕ は基底 2 の radical inverse function を意味する。この系統では、Halton 列をはじめ (t,s)-列 (これは Sobol, Faure, および 一般化 Niederreiter 列を含む非常に広いクラス) が属している。

ここでは、この2つの異なる 1 次元 low-discrepancy sequences の類似点について2つの観点から論じたい。1つは GF $\{2, z\}$ (GF (2) 上の形式的ローラン展開により構成される体) での Van der Corput 列及び Weyl 列のアナロジーという観点である。ここでは、2つの数列の違いは生成行列の違いとして現れてくる。もう一つの観点は、Weyl 列の連分数近似に基づくものである。 α として、黄金分割比を用いた場合について解析する。この場合はフィボナッチ数体系における Van der Corput 列との著しい共通点が存在することが示される。

2. 定義

まず、discrepancy の定義は次のように与えられる (文献 2、3 参照)。

(定義)

k 次元単位立方体内の N 個の点 $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}$ に対して、 $k \geq 1$ かつ部分区間 $J = \prod_{i=1}^k [0, u_i)$ (ここで $0 < u_i \leq 1, 1 \leq i \leq k$) としたとき、次のように discrepancy を定義する。

$$D_N^{(k)} = \sup_J \left| \frac{A(J; N)}{N} - \text{Vol}(J) \right|$$

ここで、 $A(J; N)$ は $X_n \in J$ となる $n, 0 \leq n < N$, の数で、 $\text{Vol}(J)$ は部分区間 J の体積、また supremum はすべての J についてとることにする。□

k 次元単位立方体内の 無限点列 $X_0, X_1, \dots, X_{N-1}, \dots$ はもしすべての $N > 1$ に対して、先頭の N 点の discrepancy が

$$D_N^{(k)} \leq C_k \frac{(\log N)^k}{N}$$

を満たすならば、low-discrepancy sequence と呼ばれる。ここで、 C_k は次元 k のみに依る定数である。

また、フィボナッチ数体系 (文献 1 参照) とは次のようなものである：

$F_i, i = 0, 1, 2, \dots$, をフィボナッチ数とする。つまり、 $F_0 = 0, F_1 = 1$ で、 $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ を満足する数列である。すると、非負整数 n は次のような形に一意に表現できる。

$$n = a_0 F_2 + a_1 F_3 + \dots + a_{k-3} F_{k-1}$$

ここで、 a_{k-3} は 0 ではないとする。

すると、Van der Corput 列、 $\phi(n), n = 0, 1, 2, \dots$, は次のように一般化できる。非負整数 $n = a_0 F_2 + a_1 F_3 + \dots + a_{k-3} F_{k-1}$ とすると、

$$\psi(n) = \frac{a_0 F_{k-1} + a_1 F_{k-2} + \dots + a_{k-3} F_2}{F_k}$$

となる。

ここで、 $F_i = 2^{i-2}$ とすれば、 $\psi(n)$ が基底 2 の radical inverse function $\phi(n)$ と一致していることは容易にわかる。

3. GF {2, z} におけるアナロジーという観点

非負整数 n の 2 進展開を $n = n_0 + n_1 2 + n_2 2^2 + \dots$ とする。その時、GF (2) 上の多項式 $n(z)$ を $n_0 + n_1 z + n_2 z^2 + \dots$ と定義する。また、GF {2, z} 内の元で $\deg(a) < 0$ となるようなものを選び $a(z) = a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots$ とおく。Weyl 列のアナロジーから、次のような数列が定義できる。

$$W_n(z) = \{ n(z)a(z) \}.$$

ここで $\{ \}$ は小数部分 (次数が負の部分) のみを残す操作を意味している。 $W_n(z) = w_{n1} z^{-1} + w_{n2} z^{-2} + w_{n3} z^{-3} + \dots$ とすると、行列表現により、

$$\begin{pmatrix} w_{n1} \\ w_{n2} \\ w_{n3} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_3 & a_4 & a_5 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0 \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

と表すことができる。つまり、この場合に $[0,1]$ 内の数列を $W_n(2) = w_{n1}2^{-1} + w_{n2}2^{-2} + w_{n3}2^{-3} + \cdots$ と定義すれば、これは (t,k) 列とよばれる数列であることがわかる。さらにここで用いられる生成行列は **Hankel** 行列とよばれる特殊な対称行列になっていることが示せる。また、**Van der Corput** 列の $GF\{2, z\}$ におけるアナロジーについては、すでに文献3で解析されており、この場合も (t,k) 列とよばれる数列になることが知られている。しかし、その時現れる生成行列は対称行列ではあるが、**Hankel** 行列とはならないことがわかっている。つまり、 $GF\{2, z\}$ におけるアナロジーという観点では、どちらの数列も (t,k) 列に分類され、生成行列の性質にのみ違いが生じているということになる。

4. Weyl 列の連分数近似という観点

Weyl 列は $W_n = \{n\alpha\}$, $n = 1, 2, \dots$, において $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ とした時がもっとも一様である事が知られている。ここで、 α は黄金分割比であり、記号 $\{ \}$ は実数の小数部分をとることを意味している。また、その連分数近似を用いて次のような近似数列 $\bar{W}_n, n = 1, 2, \dots$, が考えられる。つまり、 $F_{k-1} \leq n < F_k$ に対して、

$$\bar{W}_n = \left\{ \frac{F_{k-1}(a_0 F_2 + \cdots + a_{k-3} F_{k-1})}{F_k} \right\}, \quad (1)$$

とするのである。ここで、 $n = a_0 F_2 + a_1 F_3 + \cdots + a_{k-3} F_{k-1}$ であり、また a_{k-3} は0ではないとする。その時次の定理が成り立つ。

(定理)

$n = a_0 F_2 + a_1 F_3 + \cdots + a_{k-3} F_{k-1}$ とした時、

$$\bar{W}_n = \frac{(-1)a_0 F_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2} a_{k-3} F_1}{F_k} \pmod{1}$$

である。□

(証明)

まず、 $0 \leq i \leq k-1$ に対して、

$$F_{k-1} F_i = F_{k-1} F_i + F_k F_{i+1} = F_{k+i} \pmod{F_k}$$

である。また、 $1 \leq i$ に対して、

$$F_{k+i} = h_i F_k + (-1)^{i-1} F_{k-i},$$

が成り立つ。ここで、 $h_1 = 1, h_2 = 3$, 及び $h_i = h_{i-1} + h_{i-2}$ である。ゆえに

$$F_{k+i} = (-1)^{i-1} F_{k-i} \pmod{F_k}$$

となり、これを(1)式の右辺分子に代入することにより、証明が完了する。

□

ここで注意することは、

$$-\frac{F_{k-1}}{F_k} \leq \frac{(-1)a_0 F_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2} a_{k-3} F_1}{F_k} \leq \frac{F_{k-2}}{F_k} = 1 - \frac{F_{k-1}}{F_k}$$

である。つまり(mod 1)は大した役割はしておらず、区間 $[0,1]$ が $-F_{k-1}/F_k$ ずれたにすぎない。また分子をよくみると第2節で定義したフィボナッチ数体系における Van der Corput 列の場合と良くにていることがわかる。実際、 (-1) の項がついていることと添え字が $k-2$ から始まることを除けば本質的にはかわらない。つまり、一様性を生み出す構造はどちらも同じになっている。

参考文献

1. D. E. Knuth, The Art of Computer Programming, Vol. 2, Second Edition, Addison-Wesley, 1981.
2. H. Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, SIAM, Philadelphia, Penn., 1992.
3. S. Tezuka, Uniform Random Numbers : Theory and Practice, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1995.