

Einstein structure の deformation

阪大 数学

小磯憲史

問題 Einstein structure を smooth に変形することは、どの程度可能か？

Einstein deformation. 即ち Einstein structure の変形は、flat torus を “歪める” ことなど、自然な例しか知られていない。そこで、逆に「自然な deformation 以外はない」という予想のもとに、その部分的な結果を紹介する。具体的な例は、次の定理の応用として示す。

定理 Einstein manifold (M, g) について、curvature operator の最小固有値を α_0 とする。Ricci tensor ρ が $\rho = \varepsilon g$ を満たすとする。 $\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ ならば、 g は infinitesimally non-deformable である。

§0 準備

まず、 C^∞ -manifold M は orientable, connected, compact,

$\dim M = m \geq 3$ であるとする。Riemannian manifold (M, g) に対して、以下の記号を使用する。type $(0, 2)$ の symmetric tensor bundle S^2 , M 上の tensor bundle T に対して、 S^2 の cross section 全体 $C^\infty(S^2)$, 一点における内積 $(\cdot, \cdot)$, global な内積 $\langle, \rangle$, 共変微分 ∇ , curvature tensor R , Ricci tensor ρ , S^2 として $\{f \in S^2 : \nabla f = 0\} \in S^2_0$ であるとする。又、 ∇ の $\langle, \rangle$ に関する formal adjoint を δ とし、 $\delta|C^\infty(S^2)$ の formal adjoint を δ^* であるとし、更に関数に対する Laplacian Δ と tensor bundle に対する rough Laplacian $\bar{\Delta}$ をそれぞれ $\Delta = \delta \circ \delta^*$, $\bar{\Delta} = \delta \circ \nabla$ により定義する。

又、 ∇, R などは metric に関するもので、 $g(t)$ により定義されるものが $\nabla(t), R(t)$ などのある。又、tensor の添数の上付下付は可なり $g(t)$ によるものとし、' は上付下付の差と $\frac{d}{dt}$ による微分をあるとする。

以上で導入した記号によりたゞ式を記す。

$$R_{ij}^k = \nabla_i \nabla_j \xi^k - \nabla_j \nabla_i \xi^k, \quad R_{ijkl} = R_{ij}^m g_{mk} g_{ml}, \quad \rho_{ij} = -R_{ij}^k g_{kl}$$

$$(\delta S)_{j_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = -\nabla^l S_{lj_2 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}, \quad (\delta^* \xi)_{ij} = \frac{1}{2}(\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i)$$

$$\Delta f = -\nabla^l \nabla_l f, \quad (\bar{\Delta} S)_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = -\nabla^l \nabla_l S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$$

1. 体積一定の 1-parameter の metric $g(t)$ が $g(0) = g$ を満たすとき、 $g(t)$ を g の deformation と呼ぶ。これにより、次の定理が有効である。

定理 (D. Ebin) $g(t) \in \mathcal{G}$ a deformation とあるとき, g a deformation $\tilde{g}(t)$ と 1 径数変換群 $r(t)$ が存在して, 十分小さい t に対して次の式を満たす。

$$r(t)^* \tilde{g}(t) = g(t), \quad \delta(\tilde{g}'(0)) = 0$$

ここで, $\ker \delta$ は essential i-deformation といふ。又,

1 径数変換群 $\tilde{r}(t)$ により, $\frac{d}{dt}|_0 \tilde{r}(t)^* g = 2\delta^* \xi$ (ξ は $\tilde{r}'(0)$ の dual 1-form) とあるから, $\text{Im } \delta^*$ は trivial i-deformation といふ。

§1 Einstein i-deformation

以下, (M, g) は Einstein manifold とし, $g(t)$ も Einstein deformation, 即ち $g(t)$ がすべて Einstein metric である deformation を意味するものとする。更に, $\rho(t) = \varepsilon(t) * g(t)$ とし $\varepsilon(t)$ を定める。

まず, $g'(0)$ が満たすべき式を求めてみる。一般に,

$$\rho' = \frac{1}{2}(\Delta g' + 2\Theta g' + 2Lg' - 2\delta^* \delta g' - \text{Hess } \ln g')$$

ここに, Θ は Ricci operator, L は curvature operator,

$$\text{i.e. } (\Theta R)_{ij} = \frac{1}{2}(\rho_i^k R_{kj} + \rho_j^k R_{ki}), \quad (LR)_{ij} = R_i^k R_{kj}^l,$$

$$\text{-- 尚 } \rho' = \varepsilon' g + \varepsilon g'$$

又, $R \in C^\infty(S^2)$, $\xi \in C^\infty(A^1)$, $f \in C^\infty(M)$ に対して,

$$\Delta R = -\nabla^i \nabla_i R = \Delta \ln R, \quad \Delta \text{Hess } f = g^{ij} \nabla_i \nabla_j f = -\Delta f$$

$tLR = g^{ij} R_{ij} \ell^{\text{E}} = -tQR$, $t\delta^* \xi = \frac{1}{2} g^{ij} (\nabla_i \xi_j + \nabla_j \xi_i) = -\delta^* \xi$
 であるから、両式の右辺に t を作用させれば、

$$m\varepsilon' + \varepsilon tg' = \Delta tg' + \delta\delta g'$$

積分して、 $m\varepsilon' \langle 1, 1 \rangle + \varepsilon \langle g', g \rangle = 0$

体積一定だから $\langle g', g \rangle = 0$ 従って $\varepsilon' = 0$ (*)

更に、 $g'(0)$ が essential であることも仮定すれば、

$$\varepsilon tg' = \Delta tg'$$

$t=0$ が、 ε なる Δ の 0 でない固有値は存在しないから、

$\varepsilon \neq 0$ なら $tg' = 0$ 。 $\varepsilon = 0$ でも、 tg' は定数となり、積分すれば体積一定の条件から $tg' = 0$ を得る。そこで、次の定義をしよう。

定義 essential i-deformation ℓ が $\Delta \ell + 2L\ell = 0$,

$t\ell = 0$ を満たすとき、 ℓ は Einstein i-deformation といふ。

定義 Einstein i-deformation が 0 のみであるとき、

infinitesimally non-deformable であるといふ。

補題 1-1 (M. Berger)

$\varepsilon(t)$ は定数である。

(証明) 性質 (*) $\varepsilon' = 0$ は t に depend しない。 Q.E.D.

系

(M.g) が flat ならば、 $g(t)$ も flat である。

(証明) (M.g) に対して、 flat torus T^n を riemannian

covering にとる。この covering map π に対して、 $g(t)$ は π^*g の Einstein deformation $\pi^*g(t)$ を引き起こす。補題 1-11 によつて、 $\rho\pi^*g(t) = 0$ となる。従つて Bochner の定理によつて $(T^n, \pi^*g(t))$ の n 個の独立な harmonic vector field $\{X_i\}$ は parallel であり、よつて $\pi^*g(t)$ は flat。従つて $g(t)$ も flat である。 Q.E.D.

§ 2 基本定理

定理 2-1

curvature operator $L: S_0^2 \rightarrow S_0^2$ の M における最小固有値を α_0 とおくと、 $\alpha_0 > \min\{\varepsilon, -\frac{1}{2}\varepsilon\}$ を満たす Einstein 多様体は infinitesimally non-deformable である。

(証明) $C^\infty(S_0^2)$ の元 L に対して、

$$(\nabla \nabla L)_{ij\ell} = x \nabla_i L_{j\ell} + y \nabla_j L_{\ell i} + z \nabla_\ell L_{ij}$$

(x, y, z は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ を満たす実数) とおく。

$xy + yz + zx = u$ とおけば、 u は $[-\frac{1}{2}, 1]$ の中を動く。

$$\langle \nabla \nabla L, \nabla \nabla L \rangle = \langle \nabla L, \nabla L \rangle + 2u \langle \nabla_i L_{j\ell}, \nabla_\ell L_{ij} \rangle$$

$$= \langle \Delta L, L \rangle - 2u \langle \nabla^\ell \nabla_i L_{j\ell}, L_{ij} \rangle$$

$$\begin{aligned} \therefore \nabla^\ell \nabla_i L_{j\ell} &= -g^{\ell m} R_{mij}^\ell L_{\ell\ell} - g^{\ell m} R_{m\ell i}^\ell L_{j\ell} + \nabla_i \nabla^\ell L_{j\ell} \\ &= (L L)_{ij} + \rho_i^\ell L_{j\ell} - (\nabla \delta L)_{ij} \end{aligned}$$

従つて、 $\langle \Delta L - 2u L - 2u \varepsilon L + 2u \nabla \delta L, L \rangle \geq 0$

ここで、 L も 0 でない Einstein i -deformation とすれば、
 $\delta L = 0$, $\Delta L = -2L$ を満たすから、

$$u \in \langle L, L \rangle \leq -(1+u) \langle L, L \rangle$$

従って、 $\alpha_0 \leq \min \{ \varepsilon, -\frac{1}{2} \varepsilon \}$

よって逆に $\alpha_0 > \min \{ \varepsilon, -\frac{1}{2} \varepsilon \}$ であれば、このように L は存在しない。Q.E.D.

この定理が基本定理であり、以下の命題はすべてこの定理の適用である。

§3 断面曲率に関する評価

まず、断面曲率が 0 になる次元 $\text{td}(N)$ を次のように定義する。多様体 N の点 p における正規直交系 $O_p = \{x_i\}$ に対して、 $\lambda_{ij} = -R_{ijij}$ は $i \neq j$ のとき断面曲率を、 $i=j$ のとき 0 を与える。 i_0 に対して、 λ_{ij} の j の個数を数え、 p, O_p, i_0 を動かしてその最大値を得る。その数を $\text{td}(N)$ とおこう。

命題 3-1

Einstein manifold (M, g) が非正断面曲率でしかも universal riemannian covering $(\tilde{M}, \tilde{g})$ の既約分解 $\tilde{M} = \prod_{a=1}^k M_a$ に対して $2\text{td}(\tilde{M}_a) < \dim \tilde{M}_a$ が成り立つとき、 g は infinitesimally non-deformable である。

(証明) (I) まず $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が既約なところを考える。 $\tilde{M}$ の一点

m について. 0 でない $L \in S_0^2$ について $LR = \alpha L$ と可なり. L は対称だから. 適当な正規直交系で対角化して $L^{ii} = x^i$ と可なり.

$$\text{すなわち. } R_{ijkl} L^{ik} L^{jl} = \sum_{i,j} R_{ijij} x^i x^j = - \sum_{i,j} A_{ij} x^i x^j$$

ここで. A_{ij} も対称であることに注意して. $\sum A_{ij} y_i = \lambda y_j$ なる数ベクトル (y_i) を考える. 可なり. $y_r = \max |y_i|$, $A_{ri} < 0$ ($i > r$); $r = \text{fd}(\tilde{M})$ とし可なり. 可なり. $\lambda > 0$ に対し.

$$\begin{aligned} -\lambda y_r &= -\sum A_{ir} y_i \geq \sum A_{ir} y_r = -\sum R_{irir} y_r = \rho_{rr} \cdot y_r \\ &= \varepsilon y_r \end{aligned}$$

従って. $-\lambda \geq \varepsilon$ であり. 特に等号は $y_i = -y_r$ ($i > r$) なる可なりに限る可なり. 可なり.

$$\sum y_i = \sum_{i \leq r} y_i + \sum_{i > r} y_i \leq -(m-r)y_r + r y_r = -(m-2r)y_r < 0$$

従って. $\sum x^i = 0$ なる条件のもとでは. $-\sum A_{ij} x^i x^j > \varepsilon \sum (x^i)^2$

$$\text{すなわち. } \alpha(L, L) = -\sum A_{ij} x^i x^j > \varepsilon \sum (x^i)^2 = \varepsilon(L, L)$$

$$\text{すなわち. } \alpha > \varepsilon$$

(iv) 一般に考えよう. 既約成分 $\wedge$ の分解に於て. curvature tensor も分解可なり. 従って. $\tilde{M}$ の metric $\tilde{g}$ と Ricci tensor $\tilde{\rho}$ は. $\tilde{g} = \sum g_a$, $\tilde{\rho} = \sum \rho_a$

(g_a, ρ_a は $\tilde{M}_a$ の metric tensor, Ricci tensor)

と分解可なり. $\rho_a = \varepsilon g_a$ と可なり. すなわち. $S_0^2(\tilde{M})$ の分解

$$S_0^2(\tilde{M}) = (\bigotimes S_0^2(\tilde{M}_a)) \oplus ((\bigotimes (\mathbb{R} \cdot g_a)) \cap S_0^2(\tilde{M})) \oplus \sum_{a \neq b} S^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b)$$

$$\begin{aligned} \text{すなわち、} \quad \mathcal{S}^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b) &= \{L \in \mathcal{S}^2(\tilde{M}_a \times \tilde{M}_b) : L(T(\tilde{M}_a), T(\tilde{M}_a)) = 0, \\ &\quad L(T(\tilde{M}_b), T(\tilde{M}_b)) = 0\} \end{aligned}$$

に於いて $\tilde{M}_a$ a curvature operator $\tilde{L}_a$ も分解して、

$$\tilde{L}|_{\mathcal{S}_0^2(\tilde{M}_a)} = \tilde{L}_a \quad (= \tilde{M}_a \text{ a curvature operator})$$

$$\tilde{L}|_{(\bigoplus_{\alpha} (R \cdot g_{\alpha})) \wedge \mathcal{S}_0^2(\tilde{M})} = -\varepsilon$$

$$\tilde{L}|_{\mathcal{S}^2(\tilde{M}_a, \tilde{M}_b)} = 0 \quad (a \neq b)$$

となる。 $\varepsilon < 0$ であるから $\alpha_0 > \varepsilon$ を得る。 Q.E.D.

系

負断面曲率の Einstein manifold (M, g) は infinitesimally non-deformable である。

(証明) $fd(M) = 1$ Q.E.D.

命題 3-2

次の条件 i) iii) のいずれかを満たす Einstein manifold (M, g) は infinitesimally non-deformable である。

i) M の $2n$ での断面曲率が $[k, 1]$ に含まれ、

$$(1 + (n-1)^{-1})(1-k) - \varepsilon(n-1)^{-1} < 2(n-1)^{-1}$$

ii) M の $2n$ での断面曲率が $[-1, -k]$ に含まれ、

$$(1 - (n-1)^{-1})(1-k) + 2\varepsilon(n-1)^{-1} < 2(n-1)^{-1}$$

(証明) i) は $\alpha_0 + \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ を、 ii) は $\alpha_0 - \varepsilon > 0$ を証明する。

すなわち同様の計算であるから、i) のみを示そう。命題 3-1

の証明と同じく、 L を対角化して $L^{ii} = \chi^i$ とおく。更に、

$y^i = x^i \geq 0$ ($i \leq c$), $z^i = -x^i > 0$ ($i > c$) とし て お く。 $\sum x^i = 0$ かつ $\sum y^i = \sum z^i = A$ とおく。 条件式は $\varepsilon > n(1-k) - 2$ と同値であり、従って $1 + \frac{1}{2}\varepsilon > 0$ であることに注意する。

$$\begin{aligned}
 (L.R.) + \frac{1}{2}(\varepsilon R.R.) &= -\sum_{i,j} \lambda_{ij} x^i x^j + \frac{1}{2} \varepsilon \sum (x^i)^2 + \sum x^i \sum_j x^j \\
 &= (1 + \frac{1}{2}\varepsilon) \left\{ \sum (y^i)^2 + \sum (z^i)^2 \right\} + \sum_{i,j} (1 - \lambda_{ij}) y^i y^j \\
 &\quad + \sum_{i,j} (1 - \lambda_{ij}) z^i z^j - 2 \sum (1 - \lambda_{ij}) y^i z^j \\
 &\geq (1 + \frac{1}{2}\varepsilon) \left(\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{n-c} A^2 \right) - 2(1-k) A^2 \\
 &\geq \left\{ \frac{4}{n} (1 + \frac{1}{2}\varepsilon) - 2(1-k) \right\} A^2 > 0 \quad \text{Q.E.D.}
 \end{aligned}$$

系

Einstein manifold (M, g) が $\mathbb{R}^n$ の断面曲率 $\left(\frac{n-2}{2n-1}, 1 \right)$ に含まれるば、 g は infinitesimally non-deformable である。

(証明) 1) を適用する。 $k > \frac{n-2}{2n-1}$ であるから、

$$1 - k < \frac{n+1}{2n-1} \quad \frac{\varepsilon}{n-1} > \frac{n-2}{2n-1} \quad \text{Q.E.D.}$$

§4 locally symmetric space of non-compact type

§3 で断面曲率による評価を示したが、locally symmetric space の場合は、より詳しい評価が可能である。特に、non-compact type の場合は、次のような結果を得る。

命題 4-1

locally symmetric space of non-compact type の Einstein

manifold M は、 M の universal covering $\tilde{M}$ が 2 次元の symmetric space を既約成分に持たなければ、infinitesimally non-deformable である。

(証明) $\tilde{M} = G/K$ が既約な場合について証すれば、命題 3-1 の証明 II と同じく、一般の場合に拡張される。ここで、 G を実又は複素単純リー群とする。

G/K のリー代数を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ とし、 $\mathfrak{g}$ の Killing form B による直交分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{m}$ を与えれば、 $O = eK$ における tangent space $T_O(\tilde{M})$ が $\mathfrak{m}$ に同一視される。このとき、 O における正規直交系 $\{X_i\}$ に対して、 $A_{ij} = cB([X_i, X_j], [X_i, X_j])$ 。ただし、 $[X_i, X_j] \in \mathfrak{k}$, $B|_{\mathfrak{k} \otimes \mathfrak{k}}$ は負定値で c は正定数。

ここで、 $N = \{1 \leq i \leq m\}$ と取り、行列 $(a_{ij}) = (E^{-1}A_{ij})$ を考え、次の条件をみたす。

- i) $a_{ij} \geq 0$ ($\forall i, j \in N$), $\sum_j a_{ij} = 1$ ($\forall i \in N$)
- ii) N の部分集合 N' が $a_{ij} = 0$ ($\forall i, j \in N'$) を満たせば、 N' の元の個数 $\#N'$ は $\frac{1}{2}m$ よりも小さい。
- iii) 次のように N の分割 $N = A \cup B$ は存在する。

$$a_{ij} = 0 \quad (\forall i \in A, \forall j \in B)$$

i) は明らかである。ii) は N' に対して $\{X_i\}_{i \in N'}$ を考えれば、これは $\mathfrak{m}$ の中の可換代数を生成し、従って $\#N' \leq \text{rank } \tilde{M}$ である。irreducible symmetric space の rank は $\sqrt{n}$ で割る

さしてあり、 $\dim M = 2$ の場合を除いて、 $\text{rank } M < \frac{1}{2} \dim M$ が成りたてい。す、(ii) が成立する。iii) については、

$\{X_i\}_{i \in A}, \{X_j\}_{j \in B}$ で生成される vector space M_A, M_B をとれば $M = M_A + M_B$, $[M_A, M_B] = 0$. ところで、 M_A, M_B で生成される $\mathfrak{L}$ -代数 (束又は複素) をそれぞれ $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ とおけば、 $[M, M] = \mathfrak{L}$ より $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, $[\mathfrak{A}, \mathfrak{B}] = 0$. これは $\mathfrak{A}$ の単純性に反する。

(a_{ij}) に次の補題 4-2 を適用すれば、 L の固有値 α に属する固有形式 L を対角化して $L^{ii} = x^i$ とおいたとき、

$$\begin{aligned} \alpha(L, L) &= (L, L) = R_{ij} L^{ij} L^{ij} = (-\varepsilon) \cdot \sum_j (\varepsilon^{-1} a_{ij}) x^i x^j \\ &= (-\varepsilon) \sum_j a_{ij} x^i x^j > \varepsilon \sum_i (x^i)^2 = \varepsilon(L, L) \end{aligned}$$

即ち $\alpha > \varepsilon$

Q.E.D.

補題 4-2

命題 4-1 の証明にあつて、行列 $S = (a_{ij})$ に関する (3) の条件が成りたてば、 S の固有値はすべて -1 より大なり。

(証明) S の固有値 λ に属する固有ベクトル (y_i) をとる。

$\lambda < 0$, $\max |y_i| = 1$, 更に $y_i = 1$ なる i が存在するとしておく。

$$N = \{i \in \mathbb{Z} : 1 \leq i \leq m\} \quad O_i = \{j \in N : a_{ij} = 0\}$$

$$P = \{i \in N : y_i = 1\} \quad Q = \{i \in N : y_i = -1\}$$

とおけば、 $P \neq \emptyset$ であるから、 $i_0 \in P$ が存在して、

$$1 = y_{i_0} = \lambda^{-1} \sum a_{ii_0} y_i \leq -\lambda^{-1} \sum a_{ii_0} = -\lambda^{-1}$$

従、 $\lambda \geq -1$ 。そこで、 $\lambda \neq -1$ を証明すれば十分である。以下、 $\lambda = -1$ を仮定し、矛盾を導出しよう。

下、 $\lambda = -1$ を仮定し、矛盾を導出しよう。

$\lambda = -1$ だから、上の不等式において等号が成立する。従、 $\lambda = -1$ ならば、上の不等式において等号が成立する。従、 $\lambda = -1$ ならば、上の不等式において等号が成立する。

$$(*) \quad i \notin O_{i_0} \text{ なる } i \in Q$$

(*) と条件 i) に基づいて、 $Q \neq \emptyset$ 。そこで、 $j_0 \in Q$ が存在して、

$$1 = -y_{j_0} = \sum a_{ij_0} y_i \leq \sum a_{ij_0} = 1$$

$$\text{よって、} (**) \quad i \notin O_{j_0} \text{ なる } i \in P$$

そこで、 $j \notin P \cup Q$ について、(*) (**) より $j \in O_{i_0} \cap O_{j_0}$ 。

だから、 i_0, j_0 を動かして、

$$i \in P \cup Q, j \notin P \cup Q \text{ なる } a_{ij} = 0$$

を得る。 $A = P \cup Q$, $B = N - P \cup Q$ とおけば、条件 iii) に基づいて

$$B = \emptyset \quad \text{よって} \quad P \cup Q = N$$

一方、 $i, j \in P$ とすれば、 $j \notin Q$ だから (*) より $j \in O_{i_0}$ 即ち $a_{ij} = 0$ 。従、 $\lambda = -1$ ならば、条件 iii) に基づいて $\#P \leq \frac{1}{2} \#N$ であり、同様に $\#Q \leq \frac{1}{2} \#N$ 、これは $P \cup Q = N$ に反する。

Q.E.D.

§5 locally symmetric space of compact type

最後に、定理 2-1 の、直接の計算による適用の例をあげる。

いずれも (M, g) の universal covering $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が irreducible

symmetric space of compact type G/K として定義される。

[Hermitian symmetric space]

この場合は、E. Calabi & E. Vesentini, A. Borel により、固有値が計算されている。 $\alpha_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon$ を満たす α は、次の3種である。

$$A_{III} \quad SU(m+m')/S(U_m \times U_{m'})$$

$$(m=1, m' \geq 4), (m'=1, m \geq 4)$$

$$D_{III} \quad SO(2m)/U(m) \quad (m \geq 6)$$

$$E_{IV} \quad E_7/E_6 \cdot T^1$$

[一般の場合]

一般の場合も、原理的には計算可能であるが、繁雑なので2例をあげるにとどめる。 $\alpha_0 > -\frac{1}{2}\varepsilon$ を満たす α は、 $p \geq q$ なる条件のもとに次の通りである。

$$BDI \quad SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$$

$$(p \geq 4, q=1), (q \geq p-1, p+q \geq 7)$$

$$CII \quad (p=q=1), (p \geq 3, q=1)$$

$$Sp(p+q)/Sp(p) \times Sp(q)$$

参考文献

- M. Berger, Quelques formules de variation pour une structure riemannienne, Ann. scient. Éc. Norm. Sup, 4^e série, t. 3, (1970). 285-294
- M. Berger & D. Ebin, Some decomposition of the space of symmetric tensors on a riemannian manifold, J. Diff. Geom. 3 (1969) 379-392
- A. Borel, On the curvature tensor of the Hermitian symmetric manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) 508-521
- E. Calabi & E. Vesentini, On compact, locally symmetric Kähler manifolds, Ann. of Math. 71 (1960) 472-507
- D. Ebin, The manifold of riemannian metrics, Proc. of the 1968 Summer Institute on Global Analysis, Amer. Math. Soc.