

$\mathbb{C}^{n+1}$ の non-degenerate な超曲面に対する $\bar{\partial}$ -Neumann 問題と $\square_b$ の real analytic hypoellipticity について.

京大数研 室政和

$\mathbb{C}^{n+1}$ を $n+1$ 次元の Complex vector space とし. Ω をその relatively compact な領域とする. Ω の境界 $b\Omega$ は real analytic であるとする. Ω 上の Dolbeault Complex,

$$0 \rightarrow \Lambda^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,n+1} \rightarrow 0$$

を考える. ψ は $\bar{\partial}$ の formal adjoint operator とする.

r は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の real analytic な函数で $\Omega = \{r < 0\}$ であるものとする. このとき $u \in A^{p,q}(\Omega)$ に対する次の微分方程式を考える. $b\Omega$ は Ω の境界 $\{r=0\}$ として,

$$\begin{cases} \square u (= \psi \bar{\partial} + \bar{\partial} \psi u) = 0 & f \in A^{p,q}(\Omega) \\ \sigma(\psi, dr) u|_{b\Omega} = 0 & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \sigma(\psi, dr) \bar{\partial} u|_{b\Omega} = 0 & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

ここで $\sigma(\psi, dr)$ は ψ の principal symbol に dr を代入して $b\Omega$ 上の multiplication operator として作用する.

のである。このとき、 f が Ω 上の real analytic な section であるとき、 u もそうであるか? というのが $\bar{\partial}$ -Neumann 問題の real analytic hypoellipticity である。

また、 b Ω 上の boundary complex,

$$0 \rightarrow A_b^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} A_b^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}_b} A_b^{p,n} \rightarrow 0$$

に対して、 $\bar{\partial}_b \in$, その formal adjoint operator とするとき,

$$\square_b u = (\bar{\partial}_b \bar{\partial}_b^* + \bar{\partial}_b^* \bar{\partial}_b) u = f \quad u, f \in A_b^{p,q}$$

という方程式に対して、 f が real analytic ならば、 u もそうであるというのが、 $\square_b$ の real analytic hypoellipticity である。

この二つの問題は、密接な関係があるが、ここでは、我々は、 $\bar{\partial}$ -Neumann 問題と、境界値の問題の関係をあらわす、microdifferential operator が $\square_b$ に帰着されることを示し、その $\square_b$ が、左右両逆の microlocal operator であるということとを調べることに帰着して解くことを試みる。

以下、議論を平行して行えるので、 $P=0$ と仮定する。また、local な話なので、 r は、原点の近傍で定義された、real analytic な函数で、 $r(0)=0$, $|dr|=1$ であるとする。座標変換は、特にこゝろからぬかきり Hermite 計量を変えないものとする。

1. 局所座標による境界条件の表示.

原点の近傍 U において, 局所座標 $(z_0, \dots, z_n)$ ($z_i = x_i + iy_i$)
 とし, $r(0) = 0$, $dr(0) = dx_0$ であるとする。 $\mathbb{C} \otimes TU$, $\mathbb{C} \otimes T^*U$ $\in$. U は real $2(n+1)$ manifold とし, n とき, n
 tangent bundle TU , cotangent bundle の complexification
 とする。また, $\bar{T}^* \subset \mathbb{C} \otimes T^*U$ は, $d\bar{z}_0, \dots, d\bar{z}_n$ によって生成
 される $\mathbb{C} \otimes T^*U$ の subbundle とし, T^* は $\bar{T}^*$ の conjugate
 space であるとする。すると $\Lambda^{p,q} = (\Lambda^p T^*) \otimes (\Lambda^q \bar{T}^*)$ であ
 る。同様に $T, \bar{T} \subset \mathbb{C} \otimes TU$ $\in$ その dual space とし定義する。

U 上で定義される $\bar{T}^*$ の frame $(\bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_n)$ を次のよう
 に定める。 $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_0$ とし, $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$ とは直交している。
 さらに, $(\bar{L}_0, \dots, \bar{L}_n)$ は $\bar{T}^*$ の dual frame (i.e. $\langle \bar{\omega}_i, \bar{L}_j \rangle = \delta_{ij}$)
 とする。このとき, $\Lambda^{0,q}(U)$ の frame とし,

$$\bar{\omega}_I = \bar{\omega}_{i_1} \wedge \dots \wedge \bar{\omega}_{i_q} \quad I = (i_1, \dots, i_q) \\ i_1 < \dots < i_q$$

とったとき, その添字に 0 が含まれているものと, 含まれ
 ていないものとは直交する。

$\psi \in \Lambda^{0,q-1}$ の C_0^∞ -section とし, $\psi = \sum_I \psi_I \bar{\omega}_I$ とするとき,

$$\bar{\partial}\psi = \sum_{j=1}^n \bar{L}_j \psi_I \omega_j \wedge \bar{\omega}_I + (\text{0階以上の作用素})$$

$$= \sum_H \sum_{\{j, I\}=H} \varepsilon_{jI}^H (\bar{L}_j \psi_I) \bar{\omega}_H + (0 \text{ 階 } \psi \times \bar{\psi})$$

$$\text{今, } u = \sum_H u_H \bar{\omega}_H \in C^\infty(\Lambda^{0,0}(U)) \text{ に対し,}$$

$$(\sigma(\bar{\partial}, \eta) \psi, u) = \int \sum_{H\bar{H}} \sum_{\{j, I\}=H} \varepsilon_{jI}^H \sigma(\bar{L}_j, \eta) \psi_I \cdot \bar{u}_{\bar{H}} a_{H\bar{H}} dV$$

である。ここで $(a_{H\bar{H}})$ は Hermitian matrix である。 $dV = \prod_{i=0}^n dx_i \wedge dy_i$ である。これより、

$$(\sigma(\bar{\partial}, \eta) \psi, u) = (\psi, \sigma(\psi, \eta) u)$$

$$= \int \sum_{H\bar{H}} \sum_{\{j, I\}=H} \psi_I \overline{\varepsilon_{jI}^H \sigma(\bar{L}_j, \eta) u_{\bar{H}}} a_{H\bar{H}} dV$$

ここで $\eta = dr$ とすると、 $j=0$ であるならば $\sigma(\bar{L}_j, dr) = 0$ 。

$j=0$ ならば $\sigma(\bar{L}_j, dr) = 1$ であるので、 $(a_{H\bar{H}})$ の成分が、 $H\bar{H}$ の一方が 0 を含み、他方がそうでないとき、 0 になることを考えると、

$$= \int \sum_{H\bar{H}} \sum_{\{j, I\}=H} \psi_I \cdot \overline{\varepsilon_{0I}^H \sigma(\bar{L}_0, dr) u_{\bar{H}}} a_{H\bar{H}} dV$$

したがって、境界条件 $\sigma(\psi, dr) u|_{\partial\Omega} = 0$ は、

$$\sum_{H\bar{H}} a_{H\bar{H}} \varepsilon_{0I}^H u_{\bar{H}}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{for all } I.$$

ただし、 I は 0 を含まない位数 $(g-1)$ の添字 $H\bar{H}$ は 0 を

位数 $g+1$ の添字である。 $(a_H H)$ はこのとき, non-singular な Hermitian Matrix であるから,

$$u_H|_{\partial\Omega} = 0 \quad (H \text{ は } 0 \text{ を含む, 位数 } g \text{ の添字})$$

と, $\sigma(\nu, dr) u|_{\partial\Omega} = 0$ は同値である。

次に, $\sigma(\nu, dr) \bar{u}|_{\partial\Omega} = 0$ という条件を書き直す。先の計算と同様にして, $\bar{u} = \sum_I \psi_I \bar{\omega}_I$ と書けたとき, これは,

$$\psi_I|_{\partial\Omega} = 0 \quad (I \text{ は } 0 \text{ を含む, 位数 } (g+1) \text{ の添字})$$

という条件である。

$u = \sum_J u_J \bar{\omega}_J$ と書けるとする。このとき, 各 u_J のうち, J が 0 を含んでいない添字ならば, それは real analytic であることがあがる。なぜならばそれは, 二階の elliptic な方程式をみたし, ①の条件より Dirichlet 条件が real analytic であるから。したがって, J が 0 を含んでいないものの H について考えればよい。

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_J (\bar{L}_0 u_J) \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_J + \sum_J u_J \bar{\omega}(\bar{\omega}_J) \\ &\quad + (\bar{\omega}_0 \text{ を含む terms}). \end{aligned}$$

ここで, $\sum$ の J は 0 を含まない, 位数 g の添字である。

$$\bar{\omega}(\bar{\omega}_J) = \sum_{\ell=1}^n a_j^{\ell\bar{\ell}} \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_\ell + (\bar{\omega}_0 \text{ を含む term}).$$

$$[\bar{L}_i, \bar{L}_j] = \sum_{k=0}^n \alpha_k^{ij} \bar{L}_k$$

と書けるから.

$$\begin{aligned} \bar{\partial} u = & \sum_J (\bar{L}_0 u_J) \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_J + \sum_{JJ'} b_{JJ'} u_J \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_{J'} \\ & + (\omega_0 \text{ を含む } n \text{ term}) \end{aligned}$$

と. 適当に $b_{JJ'}$ を ω_0 と表すことによ, と書ける. この $b_{JJ'}$ を計算するために: :で, 次のように座標を置き換える. 境界を定義する函数が,

$$r = 2x_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i z_i \bar{z}_i + O(3). \quad (\varepsilon_i = \pm 1 \text{ or } 0)$$

となるようにする. 実際 r は原点の近傍で Levi form が non-degenerate であることより, これは可能である. 特に以下では, (Hermite 計量は変化するが本質的に差はないので)

$$1 \leq i \leq k \quad \text{ならば}, \quad \varepsilon_i = +1$$

$$k+1 \leq i \leq n \quad \text{ならば}, \quad \varepsilon_i = -1$$

と仮定して, これは k -strongly pseudo-convex な境界と呼ぶ. この場合には, $\bar{L}_j$ ($j=0, 1, \dots, n$) は $\bar{\omega}_0$ を次のようにとる.

$$\bar{L}_0 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \quad \bar{\omega}_0 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \cdot d\bar{z}_i$$

$$\bar{L}_j = \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} - \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \quad j=1, \dots, n$$

これを先に定めに、座標によつて書くと、

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bar{z}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + O(2)$$

$$L_j = \varepsilon_j \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + O(2)$$

ここで $O(2)$ とは、係数が原点で、2次以上の零点を持つ係数による、一階偏微分作用素である。さらに、 $\{\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n\}$ を $\mathbb{C}^n$ の原点の近傍 U における frame で、

$\langle \bar{L}_i, \bar{\omega}_j \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つように、 $\bar{\omega}_1, \dots, \bar{\omega}_n$ を決める。

A_1 を、位数 n の添字のうち、0 を含んでゐるものの全体の集合、 A_2 をそうでないものの集合とするとき、方程式の $\mathcal{O}$ の条件、 $\sigma(\vartheta, dr) u|_{\partial\Omega} = 0$ より、

$$u_I|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{for all } I \in A_1$$

この条件の成立を仮定したうえで、 $\sigma(\vartheta, dr) \bar{\partial} u|_{\partial\Omega} = 0$ の条件を計算してみよう。 $[\bar{L}_0, \bar{L}_j] = \bar{L}_0 \bar{L}_j - \bar{L}_j \bar{L}_0 = \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + O(1)$ であるから、 $\bar{\partial}(\bar{\omega}_j) = \sum_{j \in J} \varepsilon_j \bar{\omega}_j + O(1)$ 。したがって、

$$\begin{aligned} \bar{\partial} u = \sum_J (\bar{L}_0 + \sum_{j \in J} \varepsilon_j) u_J \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_J + O(1) \\ + (\bar{\omega}_0 \text{ を含まない terms}) \end{aligned}$$

これより、 $\sigma(\vartheta, dr) u|_{\partial\Omega} = 0$ の条件は、

$k \in A_2$ に属する添字とすると、

$$\left[\bar{L}_0 u_k + \left(\sum_{j \in k} \varepsilon_j \right) u_k + \sum_{J \in A_2} \varphi_J^k(1) u_J \right]_{\partial \Omega} = 0$$

と書ける。これより、まとめて書けば、

Proposition 1

Λ^0 の原点の近傍における section $u \in \bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_n$ を frame とする。ベクトル値函数、

$$u = \sum_I u_I \bar{\omega}^I \quad \begin{array}{l} I = (i_1, \dots, i_g) \\ 0 \leq i_j \leq n, i_1 < i_2 < \dots < i_g \end{array}$$

とあらわしたとき、boundary condition は次のように書ける。

$$\sigma(\nu, dr) u|_{\partial \Omega} = 0 \quad \text{or} \quad u_I|_{\partial \Omega} = 0 \quad I \in A_1$$

$$\begin{aligned} \sigma(\nu, dr) \bar{\partial} u|_{\partial \Omega} = 0 \quad \text{or} \quad & \left[\left(\bar{L}_0 + \left(\sum_{j \in I} \varepsilon_j \right) \right) u_I + \sum_{J \in A_2} \varphi_J^I(1) u_J \right]_{\partial \Omega} = 0 \\ & I \in A_2 \end{aligned}$$

ここで、 A_1 は Γ の添字より成る集合で、0 を含んでゐるものの集合、 A_2 はそうでないものの集合とする。 $\varphi_J^I(1)$ は原点で、 -1 次の zero を持つ real analytic function である。

さて、今まで、 $u \in \Lambda^0$ と、 $\bar{\omega}_0, \dots, \bar{\omega}_n$ 及び、その外積を frame とする、ベクトル値函数として、境界条件を計算して来た。以下、これら $\bar{\omega}_i$ たち及び、その外積を frame とする、ベクトル値函数に対する境界条件として書き直して見る。

例として $g=1$ の場合をやってみる。

L_0 に直交する $\bar{T}^*$ の basis として、

$$\bar{\omega}_i = d\bar{x}_i - \varepsilon_i \bar{x}_i d\bar{x}_0 + O(2) \quad i=1, \dots, n$$

と書くことができる。ここで、 $O(2)$ は、2次以上の零点を持ち、 $\bar{T}^*$ の section である。このとき、

$$\bar{\omega}_0 = d\bar{x}_0 + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \bar{x}_i d\bar{x}_i + O(2)$$

これより、frame の変換は、次の matrix により与えられる。

$$\begin{bmatrix} \bar{\omega}_0 \\ \bar{\omega}_1 \\ \vdots \\ \bar{\omega}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}_{n+1} + A(x) + O(2) \begin{bmatrix} d\bar{x}_0 \\ d\bar{x}_1 \\ \vdots \\ d\bar{x}_n \end{bmatrix}$$

と書くことができる。ここで、 $A(x)$ は、 $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ による一次同次式を成分とする $(n+1) \times (n+1)$ matrix, $O(2)$ は、各係数が、2次以上の零を持つ matrix である。この変換

行列を K と書くことにしよう。このとき, Λ^0 の section
 $u = \sum_{i=0}^n u_i \bar{\omega}_i \in (u_0, u_1, \dots, u_n)$ のベクトル値函数
 とみるとき,

$$(u_0, u_1, \dots, u_n) K = (v_0, v_1, \dots, v_n).$$

となる。したがって, 境界条件は,

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \begin{array}{c} \bar{L}_0 + d_1 \\ \vdots \\ \bar{L}_0 + d_n \end{array} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \mathcal{O}(1) \end{array} \right) \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \Big|_{\partial \Omega}$$

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \begin{array}{c} \bar{L}_0 + d_1 \\ \vdots \\ \bar{L}_0 + d_n \end{array} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \mathcal{O}(1) \end{array} \right) \right\} \{ I_{n+1} {}^t A(z) + {}^t \mathcal{O}(z) \} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$::: \mathcal{C}: \quad A(z) = \begin{pmatrix} \overbrace{A_1}^1 & \overbrace{A_2}^n \\ \hline A_3 & A_4 \end{pmatrix} \quad \mathcal{O}(z) = \begin{pmatrix} \overbrace{\mathcal{O}_1(z)}^1 & \overbrace{\mathcal{O}_2(z)}^n \\ \hline \mathcal{O}_3(z) & \mathcal{O}_4(z) \end{pmatrix}$$

と block 分けすると,

$$= \left\{ \left(\begin{array}{c|c} 1 - {}^t A_1 + {}^t \mathcal{O}_1(z) & -{}^t A_3 + {}^t \mathcal{O}_3(z) \\ \hline {}^t A_2 \bar{L}_0 + {}^t \mathcal{O}_2(z) \bar{L}_0 & I_n + {}^t A_4 + \mathcal{O}_4(z) \bar{L}_0 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \alpha_1 \vdots \alpha_n \end{array} \right) \right\}$$

$$+ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline O(1) & O(1) \end{array} \right) \left\{ \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\} \Big|_{b\Omega} = 0$$

∴ n によ, ζ ,

$$\begin{aligned} v_0|_{b\Omega} &= (1 + {}^tA_1 + O(2)) \left\{ ({}^tA_3 + {}^tO_3(2)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right\} \Big|_{b\Omega} \\ &= O(1) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big|_{b\Omega}, \end{aligned}$$

と書ける。 - $\bar{A}$.

$$\begin{aligned} &({}^tA_2 \bar{L}_0 + {}^tO_2(2) \bar{L}_0 + O(1)) v_0 \Big|_{b\Omega} + (I_n + {}^tA_4 + {}^tO_4(2) \bar{L}_0 + (\alpha_1 \dots \alpha_n) + O(n)) \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big|_{b\Omega} \\ &= 0 \end{aligned}$$

上の条件と、下の条件に代入することによ, ζ .

$$\{(I_n + O(1)) \bar{L}_0 + (\alpha_1 \dots \alpha_n) + O(1)\} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big|_{b\Omega} = 0$$

よ, ζ $(I_n + O(1))^{-1}$ を左からかけることによ, ζ .

$$\{\bar{L}_0 + (\alpha_1 \dots \alpha_n) + O(1)\} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Big|_{b\Omega} = 0$$

という境界条件が得られた。この条件により、 $(v_1, \dots, v_n)$ の Dirichlet data が "real analytic" であることが示されれば、先の条件により v_0 の Dirichlet data もまた "real analytic" である。ここで、問題は次のようになる。
($\delta > 1$ でも同様の計算ができる)

Proposition 2

$v = \sum v_I d\bar{z}_I \in \Lambda^0$ の原点の近傍での section とすると、

$$(1) \begin{cases} \square v = f \\ \sigma(v, dr) v|_{\partial\Omega} = 0 \\ \sigma(v, dr) \bar{\partial} v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

は

$$(2) \begin{cases} \square v_{I_j} = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} v_{I_j} = f_{I_j} \text{ for all } I_j \in A_2 \\ \left\{ \begin{bmatrix} \bar{L}_0 + \alpha_{I_1} \\ \vdots \\ \bar{L}_0 + \alpha_{I_m} \end{bmatrix} + O(1) \right\} \begin{pmatrix} v_{I_1} \\ \vdots \\ v_{I_m} \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad m = \binom{n}{\delta} \end{cases}$$

という方程式の Dirichlet data $v_I|_{\partial\Omega}$ が "real analytic" であれば、(1) のすべての Dirichlet data が "real analytic" であることが導かれる。ここで、 $\alpha_I = \sum_{j \in I} \varepsilon_j$ である。

したがって、我々は (2) の方程式を考えればよい。 v_{I_j} は

らは、すべて、 $\square \psi_{I_j} = f_{I_j}$ という二階の線型楕円型微分方程式とみなすのであるから、 f_{I_j} が real analytic であるとき、 ψ_{I_j} の $\partial\Omega$ への Dirichlet data が real analytic であれば、 ψ_{I_j} は real analytic である。ゆえに、我々は、 $I_j \in A_2$ であるような ψ_{I_j} について、その Dirichlet data は real analytic であることを示せばよい。

2. 境界値のみに関する関係。

以下では、Proposition 2 にあたる、(2) の方程式に限って論じ、境界値は、hyperfunction solution に対応する、小松-河合の境界値と解する。(distribution あるいは、 C^∞ -函数の solution を考えても、これは、小松-河合の境界値と一致する。) Prop. 2 の (2) の方程式の境界値と $(\psi_{I_1}, \dots, \psi_{I_m})$ の Dirichlet 境界値の間には、real analytic function on $\partial\Omega$ を法として、ひとりの関係式が存在している。(柏原-河合 [3][5], 片岡 [6]) すなわち、各々の境界値 $\psi_{I_j} \in \mathcal{F}S^* \partial\Omega$ ($\partial\Omega$ の cosphere bundle) 上の microfunction とみえるとき、境界値の間関係は、micro-differential operator で書ける。これが invertible であるなら

Prop. 2 の (2) の境界値が: micro function として 0 (hyperfunction として real analytic) であれば, Dirichlet data もそうであることがわかる。

以下、それを説明しよう。

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 = \bar{L}_0 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \\ b_0 = 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} c_0 = 1 \\ c_1 = \sum_{i=0}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i \partial \bar{z}_i} \end{array} \right.$$

とおく。このとき $\{b_0, b_1\}$ に対して, $\{c_0, c_1\}$ は $\square$ の相対境界作用素系である。(i.e., $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対して,

$$\square (\phi(r) \cdot u) = \phi(r) \square u + c_0 \delta(r) (b_1 u) + c_1 (\delta(r) b_0 u). \quad \text{ここ}$$

$$\text{で } \square = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}.)$$

今 u は $\square u = f$ をみたす Ω 上の hyperfunction f は $\bar{\Omega}$ 上の analytic function とする。 $v_1 = \bar{L}_0 u|_{\partial\Omega}$ とし, $v_0 = u|_{\partial\Omega}$ とし、小松-河合の意味の u の境界値とする。このとき, $r < 0$ で u に等しく, $r > 0$ で 0 となる hyperfunction F on $\mathcal{U}$ が $\gamma = -\gamma$ に存在して,

$$(3) \quad \square F = h = \phi(r) f + c_1 (v_0 \delta(r)) + c_0 (v_1 \delta(r))$$

となる。

$X \in U$ の complexification $N = \{r=0\} \subset V$ とするとき,
 $(r, x_1, \dots, x_{2n+1})$ を V 上の U と V の (real manifold と呼ぶ
 ときの) 局所座標 σ があるとするとき,

$$S_N^* X = G_+ \sqcup G_- \sqcup \sqrt{r} S^* U \times_V N.$$

これは $S_N^* X$ の座標系 $(\sqrt{r}\lambda_1 + \lambda_2, \sqrt{r}\xi_1, \dots, \sqrt{r}\xi_{2n+1})$ で書くと
 き, $\lambda_1 = 0$ だと $\sqrt{r} S^* U \times_V N$ をあらわし, $\lambda_2 > 0$ が G_+
 $\lambda_2 < 0$ が G_- をあらわしている。 $S_N^* X$ 上の holomorphic
 parameter $\sqrt{r}\lambda_1 + \lambda_2$ を持つ microfunction の sheaf.

$C_{N/X} = \mathcal{I}C_{S_N^* X}^n (\pi_{N/X}^{-1} \mathcal{O}_X)^n$ を考える。(柏原-河合 [3][5])
 このとき, $h = C_1(\psi_0 \delta(r)) + C_0(\psi_1 \delta(r))$ は, $C_{N/X}$ の section
 として埋め込むことができる。一方 F は, Ω 上 real
 analytic で, support は $\overline{\Omega}$ に含まれるので, $C_{N/X}$ の G_+
 上の section と同一視できる。(片岡 [6]) ψ_0, ψ_1 が
 $F \in C_{N/X}$ をもって, $\square F = h$ と書けるということは, (3)
 が, G_+ 上の $C_{N/X}$ に対する方程式として解くことができる
 ということに、ほかならない。

今, $\square$ は $\{r=0\}$ について non-characteristic である。
 しに, ψ_0, ψ_1 が real analytic であるならば,
 Cauchy-Kowalevski の定理によ, $\square$ が保証されている。言
 いかねると $C_1(\psi_0 \delta(r)) + C_0(\psi_1 \delta(r))$ の singular support

が, $G_+ \cap \{\xi_1 = \dots = \xi_{2n+1} = 0\}$ に含まれているならば, 常に解ける。これを我々の立場で言えば, $\square$ が $\{r=0\}$ 上では, 非特异的であるから $G_+ \cap \{\xi=0\}$ 上では, ($\square$ の symbol は消えず, $\square$ に代わって) $\square$ は, invertible であるから, ということである。 $G_+ \cap \{\xi \neq 0\}$ 上, (すなわち, $\psi_0, \psi_1 \in \text{micro function}$ と考えたとき) ψ_0, ψ_1 は任意に与えることはできない。ここにあらわれるのが境界値のみに関する関係式である。

$$\square = (D_r - \alpha)(D_r - \beta)A$$

という, micro differential operator の分解が, $\sqrt{15^2 + \Omega^2}$ の原点, の fiber 上の各点, の近傍でできる。ただし, A は, 0 階の elliptic, α, β は, 1 階の micro differential operators で, $[r, \alpha] = 0, [r, \beta] = 0$ を満たし, さらに, $(D_r - \alpha), (D_r - \beta)$ は各々 G_-, G_+ において, elliptic である。(S-k-k[4]) 一方 C_1 は, 1 階の微分作用素で,

$$C_1 = (D_r + \delta)B$$

と書ける。ここで, B は, non-zero function δ は 1 階の微分作用素で, $[r, \delta] = 0$ を満たす。すると,

$$\begin{aligned}
h &= (D_r + \delta) B(v_0 \delta(r)) + C_0(v_1 \delta(r)) \\
&= (D_r - \alpha + (\alpha + \delta)) B(v_0 \delta(r)) + C_0(v_1 \delta(r)) \\
&= (D_r - \alpha) \underbrace{B(v_0 \delta(r))}_{\text{}} + \{(\alpha + \delta) B \cdot v_0 + C_0 v_1\} \delta(r)
\end{aligned}$$

これより,

$$\begin{aligned}
\Box^{-1} h &= A^{-1} (D_r - \beta)^{-1} B(v_0 \delta(r)) \\
&\quad + A^{-1} (D_r - \beta)^{-1} (D_r - \alpha)^{-1} \{(\alpha + \delta) B \cdot v_0 + C_0 v_1\} \delta(r)
\end{aligned}$$

ここに $(\alpha + \delta)$, B , C_0 など $r=0$ に制限して考える。
 (これらは D_r を含む $\mathcal{D}'$ 的な $\mathcal{D}'$ の $\mathcal{D}'$ が可能) このとき
 $A^{-1} (D_r - \beta)^{-1} B$ は G_+ 上 micro differential operator
 として定義されるので $\Box^{-1} h = \dots$ の右辺の第一項は
 $C_{N/x}$ の section に λ を与える。ところが、その次の項は
 $(D_r - \alpha)^{-1}$ が G_+ 上 micro differential operator にならない
 ので、もし (micro function とし)

$$(\alpha + \delta) B \Big|_{r=0} v_0 + C_0 \Big|_{r=0} v_1 \neq 0.$$

であれば、 $\Box^{-1} h$ は $C_{N/x}$ の section に λ にならない。ゆ
 えに、

$$(\alpha + \delta) v_0 + C_0 v_1 = 0$$

が、求める。 G_+ における境界値のみに関する関係式である。

これは、実際に、Prop. 2. の (2) の方程式に適用する。

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{I_1} \\ \vdots \\ \psi_{I_m} \end{pmatrix} \text{ に対して, } \bar{L}_0 \psi|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \vdots \\ \psi'_m \end{pmatrix} = \psi' \quad \psi|_{\partial\Omega} = \begin{pmatrix} \psi^0_1 \\ \vdots \\ \psi^0_m \end{pmatrix} \\ = \psi^0 \quad \text{と境界値を書くとする。このとき,}$$

$$\psi' = C_0^{-1}(\alpha + \delta) B \psi^0$$

と書ける。一方で、Prop. 2 の (2) の境界条件は、

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{L}_0 + \alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{L}_0 + \alpha_{I_m} \end{bmatrix} + O(1) \right\} \begin{pmatrix} \psi_{I_1} \\ \vdots \\ \psi_{I_m} \end{pmatrix} \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

であらうから、先の式を代入することにより、

$$\left\{ C_0^{-1}(\alpha + \delta) B \cdot I_m + \begin{bmatrix} \alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{I_m} \end{bmatrix} + O(1) \right\} \begin{pmatrix} \psi^0_1 \\ \vdots \\ \psi^0_m \end{pmatrix} = 0$$

という、 ψ^0 に対する条件が導き出された。(ここで、 α と α_{I_j} には全く別のものである。) 我々は、この operator に

に対する hypoellipticity を調べればよい。

Proposition 3

$(\alpha + \delta)|_{r=0}$ は $b\Omega$ 上の micro differential operator τ , -1 階, 原点, の fiber 上 τ は, $(0, +\infty dy_0)$ $\in \sqrt{1} S^* b\Omega$ を除いて, 各点, の近傍 τ elliptic operator τ である。

U 上の局所座標 $(z_0, \dots, z_n)$ ($z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$) を実座標と見て, $\sqrt{1} S^* U$ の座標を, $(x_0, y_0, \dots, x_n, y_n)$
 $(\sqrt{1}\xi_0, \sqrt{1}\eta_0, \dots, \sqrt{1}\xi_n, \sqrt{1}\eta_n)$ ととる。

原点, の fiber 上 τ は, $\square$ の principal symbol は $\sum_{i=0}^n \xi_i^2 + \eta_i^2$, D_n のそれは, ξ_0 , $1 \neq 0$, τ α のそれは, $\sqrt{1} \sqrt{\eta_0^2 + \sum_{i=1}^n (\xi_i^2 + \eta_i^2)}$, また δ のそれは, $-\sqrt{1} \eta_0$ 。したがって, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \eta_i^2 \neq 0$ であるなら $\alpha + \delta$ の principal symbol は, 消えず, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2 + \eta_i^2 = 0$ であって, τ も, $\eta_0 = -dy_0$ の点, τ は principal symbol は消える。消えるのは $\eta_0 = dy_0$ のみ。

したがって, τ ,

$$C_0^{-1}(\alpha + \delta) B + \begin{bmatrix} \alpha I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha I_m \end{bmatrix} + O(1)$$

としよう. $m \times m$ matrix の -1 階の micro differential operator は, $(0, +\infty dy_0, \infty)$ を除くに, 原点の fiber の各点の近傍で, elliptic operator である。

今度は実際に, $(0, \sqrt{1} dy_0, \infty)$ においても, この operator が, (micro function に作用する operator) として, invertible であることを見たい。

$C_0, B,$ は, 原点において, 1 の値をとる函数であるのだから,

$$(4) \quad (\alpha + \delta)|_{r=0} + \begin{bmatrix} \alpha I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha I_m \end{bmatrix} + O(1)$$

の hypoellipticity と, $(0, \sqrt{1} dy_0, \infty)$ の近傍で調べればよい。以下。

$$\tilde{\delta} = \delta|_{r=0} + \begin{bmatrix} \alpha I_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha I_m \end{bmatrix} + O(1)$$

とおく。 (4) の作用素そのままを調べるのは困難であるので, これに適当な elliptic な operator をかけて考える。

$\square$ は、二階の微分作用素であつたから、

$$\square = (D_r - \alpha)(D_r - \beta)A \quad \dots\dots\dots [1]$$

と分解されたとことと思ひ出そう。 $(D_r - \alpha)$, $(D_r - \beta)$ は、各々 G_- , G_+ で、elliptic な、一階の micro differential operator である。この場合、 D_r の係数を比較することによつて、 A は、non-zero function である。

この表示式 [1] において、 $D_r = \tilde{\delta}$ を代入して、 $r=0$ に制限して得られる micro differential operator

$$\square|_{D_r \rightarrow \tilde{\delta}} = (-\tilde{\delta} - \alpha)(-\tilde{\delta} - \beta)A|_{r=0} \quad \dots\dots [2]$$

を考えると、 $(-\tilde{\delta} - \beta)|_{r=0}$ は、 $(0, +\sqrt{1}dy_0, \infty)$ において elliptic な作用素であることは、 $(-\tilde{\delta} - \alpha)|_{r=0}$ が $(0, -\sqrt{1}dy_0, \infty)$ において elliptic であることと同様にして示される。したがつて、[2] の作用素の $(0, +\sqrt{1}dy_0, \infty)$ における invertibility は、 $(-\tilde{\delta} - \alpha)$ 、すなわち、(4) の作用素の invertibility と全く同じことである。よつて [2] を考察すればよい。

$$\begin{aligned} [2] &= (-\tilde{\delta} - \alpha)(-\tilde{\delta} - \beta)A|_{r=0} \\ &= (\tilde{\delta}^2 + \alpha\tilde{\delta} + \tilde{\delta}\beta + \alpha\beta)A|_{r=0} \\ &= (\tilde{\delta}^2 + \tilde{\delta}(\alpha + \beta) + \alpha\beta + [\alpha, \tilde{\delta}])A|_{r=0} \end{aligned}$$

— $\bar{\alpha}$

$$\begin{aligned}\square &= (D_r - \alpha)(D_r - \beta)A \\ &= (D_r^2 - D_r(\alpha + \beta) + \alpha\beta + [D_r\alpha])A \quad \text{--- [3]}\end{aligned}$$

であるので、

$$\begin{aligned}[2] &= ([3] \text{ の表示式に, } D_r = -\tilde{\sigma} \text{ を代入したものを})|_{r=0} \\ &\quad + ([\alpha, \tilde{\sigma}] - [D_r\alpha])A|_{r=0} \quad \text{--- [4]}\end{aligned}$$

とあらわされる：ことがわかる。我々は、[4] の operator の invertibility を調べればよい。

[4] の operator の principal symbol は、[3] の principal symbol

$$\sigma(\square) = (\sigma(D_r)^2 - \sigma(P)\sigma(D_r) + \sigma(Q))A.$$

(ここで、 $P = \alpha + \beta$, $Q = \alpha\beta$) の $\sigma(D_r) = -\tilde{\sigma}$ の principal symbol $-\sigma(\tilde{\sigma})$ を代入して得られるものの対角成分に並べたものである。これについて次のような定理が得られる。

Theorem 4

[4] の operator の principal symbol は $(0, \sqrt{1} dy_0 \omega)$ の近傍において, 適当な fiber preserving な quantized contact transformation Φ により,

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Z_i \bar{Z}_i + \bar{Z}_i Z_i + \sum_{ij} A_{ij} Z_i \bar{Z}_j$$

の principal symbol に変換される。ここで,

$$\begin{cases} Z_i = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i'} + \sqrt{1} \bar{z}_i' \frac{\partial}{\partial y_0'} \\ \bar{Z}_i = \frac{\partial}{\partial z_i'} - \sqrt{1} z_i' \frac{\partial}{\partial y_0'} \end{cases} \quad \Phi(0, dy_0 \omega) = (0, dy_0' \omega)$$

であり, A_{ij} は原点の fiber 上で principal symbol が消える。0 階の micro differential operators τ , $\sigma(A_{ij}) = \sigma(A_{ji})$ とおけるものである。

これは、次のようにして示される。まず、

$$\square = \sum_{i=0}^n \frac{\partial}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \dots, \frac{\partial}{\partial z_n} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}$$

す: $\tau \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix} \in \text{Hermitian 行列}$ 上で変換しなくてはならない。

$$H\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\right) = \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = P \quad \text{と書く。このとき, } P_1 \cdots P_n \text{ は } D_n \text{ と}$$

直交しているようにとる。このとき, Π の principal symbol は $\sum_{i=0}^n \alpha(\bar{P}_i) \wedge (P_i)$ である。

Π 上の Cauchy-Riemann 系の $\mathcal{C}\Omega$ 上への接方程式系 (すなわち, Π の section のうち $d\pi$ と直交する section $\in \mathcal{C}\Omega$ に制限することによ, て得られる方程式系) を Π^* と書くことにしよう。このとき, 各 P_i ($i=1, \dots, n$) は Π^* の section である。なぜならば, $P_1 \cdots P_n$ は D_n と直交しているから $d\pi$ と直交している。したが, てその $\mathcal{C}\Omega$ への制限は Π^* に入る。しかも Π^* は n 次元であるので $P_1, \dots, P_n$ によ, て生成される。

次に P_0 を考えよう。 $\bar{P}_0 = C(D_n + \lambda)$ と書ける。ここで C は non zero function λ は D_n を含まる (λ は $d\pi$ と直交する) 一階斉次の微分作用素である。これは Π における $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ の Hermite 内積による直交補空間であるので, $\bar{P}_0$ の生成する subbundle は C_1 の principal part の生成する subbundle と同じである。

したが, て, $\sigma(C_1) = (\sigma(D_n) + \sigma(\lambda))B$, $\sigma(\bar{P}_0) = C(\sigma(D_n) + \sigma(\lambda))$ より, $\sigma(\bar{P}_0)$ の $\sigma(D_n)$ は $\sigma(\lambda)$ を代入すると消える。

したが, て

[4] の作用素の principal symbol は, $\sum_{i=1}^n \sigma(P_i) \sigma(\bar{P}_i)$ と書ける。

一方, S-K-K [4] によれば, $(0, \sqrt{-1} dy_0 \wedge \omega)$ の近傍で, 適当な fiber preserving な quantized contact transformation を行うことにより, π^* の生成元は, $\bar{Z}_i = \frac{\partial \bar{z}_i}{\partial \bar{x}_i} - \sqrt{-1} Z_i \frac{\partial}{\partial y_0}$, $i=1, \dots, n$ とすることが出来る。したがって, 示される。

Theorem 5

Theorem 4 の変換をほどきしとき, [4] の作用素の一階の symbol を K としたとき,

$$K|_{(0, \sqrt{-1} dy_0 \wedge \omega)} = \sqrt{-1} \begin{bmatrix} \beta_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_{I_m} \end{bmatrix}$$

と書ける。ここで, $\beta_{I_k} = \sum_{j \in I_k} \varepsilon_j - \sum_{j \in I_k^c} \varepsilon_j$, $I_k \cup I_k^c = \{1, \dots, n\}$, $I_k \cap I_k^c = \emptyset$.

これは, fiber preserving な quantized contact transformation により, subprincipal symbol は不変な: とを利用して, 実際に計算してやることにより得られるが

くわしく書く必要と長くなるので省略する。

3. Ω 上の Heisenberg group の構造と不変微分作用素の analytic hypoellipticity.

以下では, Folland - Stein [1] の方法を, 超局所化する. ことによ, $\mathbb{C}$ 上の double characteristic な作用素の左右両逆の micro local operator を作る.

$M = \{(y_0, z_1, \dots, z_n)\}$ 上に, 次の結合によ, $\mathbb{C}$ Heisenberg group の構造を入れる.

$$X = (y_0, z_1, \dots, z_n) \quad X' = (y'_0, z'_1, \dots, z'_n) \quad (z_i = z_i + \sqrt{-1} y_i, \\ z'_i = z'_i + \sqrt{-1} y'_i) \text{ に } \sqrt{-1} \text{ し,}$$

$$X \circ X' = (y_0 + y'_0 + 2 \sum_{i=1}^n (-x_i y'_i + x'_i y_i), z_1 + z'_1, \dots, z_n + z'_n)$$

このとき, M 上の左不変な微分作用素は,

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_j = \frac{\partial}{\partial z_j} + \sqrt{-1} \bar{Z}_j \frac{\partial}{\partial y_0} \\ \bar{Z}_j = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \sqrt{-1} Z_j \frac{\partial}{\partial y_0} \\ T = \frac{\partial}{\partial y_0} \end{array} \right. \quad j=1, \dots, n$$

によつて生成される。このとき、次のような交換関係が成立している。

$$[Z_j, \bar{Z}_k] = -2\sqrt{F} \delta_{jk} T$$

$$[T_j, Z_k] = [\bar{Z}_j, \bar{Z}_k] = [Z_j, T] = [\bar{Z}_j, T] = 0$$

Theorem 6

$$I_\alpha = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (Z_i \bar{Z}_i + \bar{Z}_i Z_i) + F\alpha T \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

とする。これに $\bar{A} \mid \mathcal{C}$,

$$\psi_\alpha(y_0, z) = \frac{\Gamma(\frac{n+\alpha}{2}) \Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{2^{2-2n} \pi^{n-1}} (|z|^2 - \sqrt{F} y_0)^{-\frac{n+\alpha}{2}} (|z|^2 + \sqrt{F} y_0)^{-\frac{n-\alpha}{2}}$$

は、 $(0, +\sqrt{F} dy_0, \infty)$ (resp. $(0, -\sqrt{F} dy_0, \infty)$) の 近傍にあり、
 $\alpha \neq -n, -(n+2), \dots$ (resp. $\alpha \neq n, n+2, \dots$)

で“ある” holomorphic parameter $\alpha \in \mathbb{C}$ かつ microfunction とし $\mathcal{C}$ well defined である。

$$I_\alpha - \psi_\alpha(y_0, z) = f(y_0, z)$$

である。

証明は、次のようにして行う。すなわち、まず、 $\alpha \neq \pm n, \pm(n+2), \dots$ であるならば、直接計算することにより、 $\mathcal{L}_\alpha \varphi_\alpha(y, z)$ は、 $\mathcal{L}_\alpha$ により $\mathcal{L}_\alpha \cdot \varphi_\alpha = \delta(y, z)$ という関係式をみたす。(Folland-Stein [1]) 次に、 φ_α の singular support を考える。 $(|x|^2 - y_0)^{\mu}$, $\pm i^{\mu} (|x|^2 + y_0)^{\lambda}$ という hyperfunction は、 $\mu \neq 0, 1, 2, \dots$ あるいは、 $\lambda \neq 0, 1, 2, \dots$ のとき、 $(0, +\sqrt{y_0}, \infty)$ 及び、 $(0, -\sqrt{y_0}, \infty)$ により、singular support を持つ hyperfunction であり、また、その他の場合には、全く singular support を持たない。したがって、 $\mathcal{L}_\alpha \varphi_\alpha$ は、 $\alpha \neq \pm n, \pm(n+2), \dots$ のとき、holomorphic parameter を持つ microfunction として well defined であるが、 $\alpha = n, (n+2), \dots$ へは、 $(0, +\sqrt{y_0}, \infty)$ の近傍でしか、また、 $\alpha = -n, -(n+2), \dots$ へは、 $(0, -\sqrt{y_0}, \infty)$ の近傍でしか、(microfunction として) α によって解析接続できない。また、解析接続できれば、それが再び $\mathcal{L}_\alpha \cdot \varphi_\alpha = \delta$ をみたすことは明らかである。

以下、同じことを、 $\alpha \neq -n, -(n+2), \dots$ として、 $(0, -\sqrt{y_0}, \infty)$ の近傍で考えることにする。

$$K_\alpha f = \int \varphi_\alpha((y', z') \rightarrow (y_0, z)) f(y_0, z') dV(y_0, z')$$

と定義する。ここで、 $dV(y_0, z)$ は M 上の不変測度で
 $= dy_0 \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dy_n$ で与えられる。 f は $(0, \sqrt{t} dy_0, \infty)$
 の近傍で定義された microfunction の section である。すると
 これは、 M 上の左不変な microlocal operator である。
 しかも、

$$I_\alpha \cdot K_\alpha f = f \quad f \in \mathcal{C}_{(0, \sqrt{t} dy_0, \infty)}$$

($\mathcal{C}_{(0, \sqrt{t} dy_0, \infty)}$ は $(0, \sqrt{t} dy_0, \infty)$ の近傍で定義された microfunction
 の section の集合である) であるので、 K_α は I_α の右逆
 作用素、同様にして、

$$K_\alpha \cdot I_\alpha \cdot f = f \quad f \in \mathcal{C}_{(0, \sqrt{t} dy_0, \infty)}$$

であることも容易に確かめることができる。ゆえに、

Proposition 7.

Theorem 6 の I_α は、 $\alpha \neq -n, -(n+2), \dots$ (resp.
 $\alpha \neq +n, +(n+2), \dots$) であるならば、 $(0, \sqrt{t} dy_0, \infty)$
 (resp. $(0, -\sqrt{t} dy_0, \infty)$) の近傍で、左右両逆の microlocal
 operator を持つ。

ここで、Theorem 4, 及び 5, によって我々の得た作用

素[4]がどのようなものであるか、を思い出そう。すなわち、それは、 $(0, \sqrt{dy_0} \infty)$ の近傍で定義され、

$$(5) \left[\begin{array}{c} -\mathcal{L}_{-\beta_{I_1}} \\ \vdots \\ -\mathcal{L}_{-\beta_{I_m}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \sum_{ij} A_{ij}^1 Z_i \bar{Z}_j \\ \vdots \\ \sum_{ij} A_{ij}^k Z_i \bar{Z}_j \end{array} \right] + \mathcal{O}_{ij}$$

であった。ここで、 A_{ij}^k は 0 階微分の micro differential operator で、 $(0, \sqrt{dy_0} \infty)$ において symbol へ消えるもの、 $\mathcal{O}_{ij}$ は -1 階の micro differential operator で、その principal symbol は、 $(0, \sqrt{dy_0} \infty)$ で消えるものである。さらに、 $\beta_{I_1}, \dots, \beta_{I_m}$ の値はそれぞれ、

$$\beta_{I_k} = \sum_{j \in I_k} \varepsilon_j - \sum_{j \in I_k^c} \varepsilon_j$$

であらわされた。(C は、 $\{1, \dots, n\}$ の中で C の補集合をあらわす。) $J = \{1, \dots, k\}$, $J^c = \{k+1, \dots, n\}$ とおくと、 $j \in J$ ならば、 $\varepsilon_j = +1$, $j \in J^c$ ならば、 $\varepsilon_j = -1$ である。これより

$$\beta_{I_k} = \# \{J \cap I_k\} - \# \{J^c \cap I_k\} - \# \{J \cap I_k^c\} + \# \{J^c \cap I_k^c\}.$$

($\#$ は、集合の位数をあらわす) $1 = 0$, $\subset$, $-n \leq \beta_{I_k} \leq n$.
 $\subset$.

$$\beta_{I_k} = -n \iff J = I_k^c$$

$$\beta_{I_k} = n \iff J = I_k \quad \circ$$

今の場合, $\# \{I_k\} = 8$ であるので, もし $\beta_{I_k} = -n$ であるときは, $\# \{J^c\} = 8$ であり, $\beta_{I_k} = n$ のときは $\# \{J\} = 8$ である。

これより,

Proposition 8

(5) の作用素の "top" の項 $\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\beta_{I_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}_{\beta_{I_m}} \end{bmatrix}$ は, $8 \neq n-k$

であれば, invertible な micro local operator であり, $8 = n-k$ であれば, そうではない。(実際 $\mathcal{L}_{+n}$ は $(0, \sqrt{1} dy_0, \infty)$ に singular support を持つ micro function $(|z|^2 - \sqrt{1} y_0)^{-n}$ を消す。)

4. 境界作用素と $\square_k$ の逆作用素の構成。

以下では, Heisenberg group の構造を利用して, 前節で求めた (5) の作用素の逆作用素を作ることを考える。しか

し、この方法では、まだ、その収束が示されない。

その前に、(5)の作用素と、 $\square_\theta$ の関係にふれておく。すでに Folland-Stein [1] で扱われているように、(彼らは、 $\mathbb{C}^n$ の中の境界ではなく、一般の non-degenerate な Levi form を持つ CR manifold を扱っているが)、 $\square_\theta$ も、このような fiber preserving な Contact transformation によつて (5)の形の作用素に reduce できることは、容易に示すことができる。したがって、(5)の形の作用素の invertibility のみが問題である。

以下、 Ω と M と同一視して、同じ座標 $(y, z, \dots, z_n)$ を使う。

φ と $\psi \in M$ 上の hyperfunction であるとする。

$$\varphi(\alpha y_0, \alpha^{\frac{1}{2}} z) = \alpha^\lambda \varphi(y_0, z) \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

となるとき、 $\varphi \in \lambda$ -homogeneous であるという。 φ と ψ を、それぞれ λ_1, λ_2 homogeneous であるとするとき、

$$1) \quad \varphi * \psi = \int \varphi((y'_0, z') \circ (y_0, z)) \psi(y'_0, z') dV(y'_0, z')$$

は、 $\lambda_1 + \lambda_2 + (n+1)$ homogeneous である。

2). $T\varphi$ は $\lambda, -1$ 次 homogeneous $T^{-1}\varphi = \int_0^x \varphi(x', z) dx'$
 は $\lambda, +1$ 次 homogeneous, $Z_i \varphi, \bar{Z}_i \varphi$ は $\lambda, -\frac{1}{2}$
 homogeneous である。

$$P_\alpha u = a_\alpha(y_0, z) \int u_\alpha((y'_0, z')^{-1} \circ (y_0, z)) u(y'_0, z') dV(y'_0, z')$$

という microlocal operator P_α を考えよう。 $a_\alpha(y_0, z)$ は
 (y_0, x, y) に関する real analytic な 原点, の近傍で定義さ
 れた函数, u_α は M 上の α homogeneous function とす
 る。 P_α と $P_{\alpha'}$ の結合は,

$$P_\alpha \circ P_{\alpha'} = a_\alpha(y_0, z) \int u_\alpha((y'_0, z')^{-1} \circ (y_0, z)) a_{\alpha'}(y'_0, z') \\ \times u_{\alpha'}((y''_0, z'')^{-1} \circ (y'_0, z')) dV(y'_0, z')$$

と書ける。今, $(\tilde{y}_0, \tilde{z}) = (y'_0, z')^{-1} \circ (y_0, z)$ とするとき,

$$\begin{cases} y'_0 = y_0 - \tilde{y}_0 + 2 \sum_{i=1}^n (-\tilde{y}_i x_i + \tilde{x}_i y_i) \\ y'_i = y_i - \tilde{y}_i \\ x'_i = x_i - \tilde{x}_i \end{cases} \quad i=1, \dots, n$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = -y_0 + y'_0 + 2 \sum_{i=1}^n (y'_i x_i - x'_i y_i) \\ \tilde{y}_i = -y'_i + y_i \\ \tilde{x}_i = -x'_i + x_i \end{cases} \quad i=1, \dots, n$$

であるので、これらを利用し書きかえると、ときとうる。

M の原点, τ'' 定義された. real analytic functions. for (y_0, τ) , γ -次 homogeneous functions. $U_\gamma \in \mathcal{E}(\tau)$.

$$P_\alpha \cdot P_{\alpha'} = \sum_Y \psi_Y(y_0, \tau) \cup_Y ((y_0'', \tau'')^{-1} \cdot (y_0, \tau))$$

と書ける。 Y の最低次の項は $\alpha + \alpha' + n + 1$, τ'' 各 Y は $\gamma + \frac{1}{2}m$ (m は整数) の形のものである。

$$\text{今, } U = U_1 + U_2;$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} -I - \beta_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & -I - \beta_{I_m} \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \sum_{ij} A_{ij}^1 Z_i \bar{Z}_j & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{ij} A_{ij}^m Z_i \bar{Z}_j \end{bmatrix} + B + (0\text{階以下})$$

B の各成分 B_{ij} は 一階斉次の micro differential operator

τ'' ,

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n B_k^{ij} Z_k + \sum_{k=1}^n C_k^{ij} \bar{Z}_k + D^{ij} T,$$

B_k^{ij}, C_k^{ij} は 0階の micro diff. op. D^{ij} は 原点, の fiber τ'' symbol の消える. 0階の micro differential operators.

A_{ij}^k は、0 階の micro differential op. で、原点, の fiber 上で、symbol が消えるもの。

こゝう、micro differential operator を考える。(5) の作用素は、実際、このような形になる。

U のうち、 U_1 に対しては、 $k_p = \begin{bmatrix} k_{p_{I_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & k_{p_{I_m}} \end{bmatrix}$ が、左右両

逆作用素として存在している。したがって、

$$(6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-U_2 k_p)^n.$$

が、micro local operator として収束してあげられない。

- $U_2 k_p$ は 先の方法で、 M 上の homogeneous な hyperfunction に kernel とする micro local operator の和としてあらわすことが出来る。その最低次の homogeneous order は、 $(-n-1)$ である。したがって、その結合について、その最低次の term の order は、 $(-n-1)$ である。

(6) の作用素は 実際は、収束するものと思われるが、まだ、

証明に成功していない。

参考文献

- [1] Folland, G.B and E.M, Stein ; Estimates for the $\bar{\partial}_b$ -Complex and Analysis on the Heisenberg Group, Comm. Pure. Appl. Math. Vol.27, 429 - 522 (1974)
- [2] Folland, G.B and Kohn, J.J ; The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex, Ann. of Math. Studies 75.
- [3] Kashiwara, M and T, Kawai ; On the Boundary Value Problem for Elliptic system of Linear Differential Equations I, II . Proc. Japan. Acad. 48, 712-715 (1972) and 146-168 (1973)
- [4] Sato, M , T, Kawai and M Kashiwara (S-K-K) ; Micro functions and Psuedo differential operators, Springer Lecture Note No. 287 .
- [5] 柏原正樹, 河合隆裕 楯田型境界値問題の理論とその応用, 数理研講究録 238, 1 - 59. (1975)
- [6] 片岡清臣, 超函数のラドン変換とその応用.(東大修士論文) (1976)