

ここで考えると、

$$N(r) \propto L^{-\psi} r^d \propto r^{d-\psi} \quad (13)$$

が成り立つはずなので、フラクタル次元 D は

$$D = d - \psi \quad (14)$$

によって与えられることになる。

幾つかの L と η について数値シミュレーションによって $N(r)$ を調べてみた結果、 A の L 依存性は、実際にべき乗になっていることが確かめられた。そのべきの指数から見積もった D の値は、 η が 0.5、1、2、4 のとき、それぞれ 1.88、1.70、1.58、1.35 となった。これらの値は、これまでに知られている数値シミュレーション、次元解析、繰り込み群などによる結果と比べてもほぼ妥当な値となっている。このことから、CAM の考え方が η -モデルのような成長モデルに対しても有効であることが確認されたと言える。

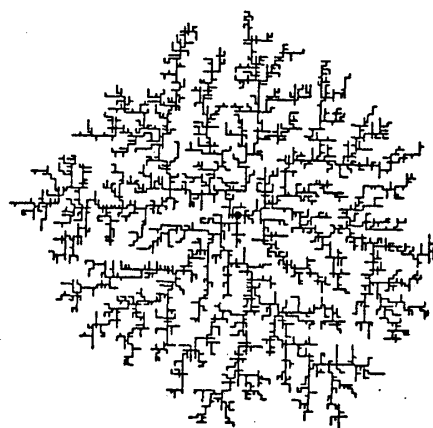


図 1. $\eta = 1$, $L = 6$ の場合のパターンの例。

8. カオティック・ダイナミクスの multifractal 構造

静岡大・教養 佐藤 信一

1. はじめに

フラクタル次元という尺度により自然界に見られる様々なランダム・パターンを定

量的に議論できる。パターン形成に限らず、散逸力学系のストレンジ・アトラクターに対してもフラクタル次元はその乱雑さを特徴づける重要な尺度である。しかし、従来フラクタル次元によって特徴づけていたフラクタル集合は、マルチ・フラクタルという概念を導入することにより、実は我々が考えていた以上に複雑で豊かな構造を持つことを明かにすることができる。マルチ・フラクタルとは、フラクタル集合上に与えられた確率測度を考えた時に、局所的な確率測度のスケーリング指数にゆらぎが存在するということである。パターン成長の問題に関して言えば、パターン自体のフラクタル次元という尺度とは別にパターン界面上の成長確率という確率測度を考えた時に、種々の成長確率を持つ点がパターン界面上に異なるフラクタル次元で分布するといえる。この小論では力学系におけるマルチ・フラクタル構造の紹介、及び筆者が最近得た力学系の測度論的エントロピー・スペクトラムの結果を報告するが、ストレンジ・アトラクターと成長界面、アトラクター上の不変測度と成長確率という対応を考えた時、共通の枠組の中で議論できる部分も多いと思われる。

2. $f(\alpha)$ スペクトラム¹⁾

最初にマルチ・フラクタル構造を表わす $f(\alpha)$ スペクトラムを簡単に紹介しよう。あるフラクタル集合 M と M 上の確率測度が与えられているとする。 M をサイズ l の $b \times b$ の $b \times b$ で分割し、各 $b \times b$ に番号を付ける。 i 番目の $b \times b$ の確率測度を p_i とする。第1のスケーリング仮定として

$$p_i \sim l^{d_i} \quad (1)$$

を置く。第2のスケーリング仮定として α_i が α' と $\alpha' + d\alpha'$ の間に存在する $b \times b$ の数を $N(\alpha') d\alpha'$ とする

$$N(\alpha') d\alpha' \sim l^{-f(\alpha')} d\alpha' \quad (2)$$

を置く。 α' は singularity と呼ばれ、確率のスケーリング指数を表わし、 $f(\alpha')$ が M 上の α' という指数の $b \times b$ の分布を表わす。これらの f, α は一般化次元 D_q ²⁾ とルジャンドル変換で結ばれることは文献 1) に詳しく書かれている。Mandelbrot のフラクタル次元の定義は全ての $b \times b$ について α_i が等しい時にのみ成り立つ。全ての α_i が等しい時 (2) 式はまさにフラクタル次元の定義と一致し、 f が M のフラクタル次元に対応する。(より厳密に言うならば、マルチ・フラクタル構造を持つ集合に対してはフラクタル次元の代わりにハウスドルフ次元を用いなければならないが、ここでは重大な混乱を引き起こす恐れがないと思われるのでフラクタル次元という言葉を用いた。)

以上で $f(\alpha)$ スペクトラムの概念を簡単に紹介したわけであるが、次に実際の散逸力学系のストレンジ・アトラクターの例としてエノン写像のアトラクターを見てみ

よう。Fig. 1 a は文献 3) より転載したアトラクター上の不変測度の立体的描写、Fig. 1 b は文献 4) より転載した $f(\alpha)$ スペクトラムである。位相空間が 2 次元以上の力学系のカオスでは、位相空間中の微小な体積要素はある方向には引き伸ばされ、ある方向には縮められて写像される。従って位相空間を局所的に不安定部分空間（拡大方向）と安定部分空間（縮小方向）の直和として表わすことができる。ストレンジ・アトラクター上の全ての点でそのような直和分解が可能な時、アトラクターは双曲的であると言い、そうでない場合を非双曲的と言う。我々が目にするアトラクターの多くが非双曲的なアトラクターであり、エノン・アトラクターもまた非双曲的なアトラクターである。アトラクターが非双曲的な場合、不安定方向に沿って不変測度を眺めると Fig. 1a のように無数の singularity が存在する。アトラクター全体を眺めるとカントール集合的な singularity と不安定方向の singularity が組み合わさって非常に複雑な構造となっている。現在の所、高次元アトラクターのマルチフラクタル構造には未知の部分がまだまだ残されているように思われる。

3. $h(\gamma)$ スペクトラム^{5), 6)}

散逸力学系 $x_{n+1} = F(x_n)$ に対する尺度としてはアトラクターの次元の他に、測度論的エントロピーも重要である。次元の場合と同様にしてエントロピーもスペクトラムとして定式化できる。力学系のエントロピーの場合一般化次元 D_q に対応するものとして Renyi エントロピー K_q が存在する。 K_q の定義は漸近的に次のように与えられる。前節と同様にアトラクターを $b \times x$ に分割し、番号を付ける。長さ n の写像 F による軌道 $x_1, x_2, \dots, x_n$ を考えて、 x_1 が $b \times x_{i_1}$ に、 x_2 が $b \times x_{i_2}$ に、 $\dots$ 、 x_n が $b \times x_{i_n}$ に存在する結合確率を $p(i_1, \dots, i_n)$ と表わす。その時、 K_q は、

$$K_q = \frac{-1}{q-1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i_1 \dots i_n} P(i_1 \dots i_n)^q \quad (3)$$

で与えられる。 Σ は全ての可能な長さ n の軌道に関して和を取る。ここで $f(\alpha)$ と同様に 2 つのスケーリング仮定を置く。

$$P(i_1, \dots, i_n) \sim e^{-r(i_1 \dots i_n)n} \quad (4)$$

$$N(r') dr' \sim e^{h(r')n} dr' \quad (5)$$

$N(r') dr'$ は r が $r' \sim r' + dr'$ に存在する軌道の数である。

$f(\alpha)$ スペクトラムとの間には、 D_q と K_q 、 α と r 、 f と h という完全な対応が存

在する。h (r) スペクトラムによって軌道の拡大率のゆらぎを表わすことができ、過渡的なカオスやストレンジ・リベラの構造をも見ることもできる。

最後に、h (r) スペクトラムに対して f (α) スペクトラムで用いられた転送行列⁷⁾の手法を導入できることが判明したので、その結果を報告する。まず、与えられた力学系に対して記号力学系を定義する。簡単のために 0, 1 から成る記号力学系としよう。位相空間を M₀, M₁ の 2 つに分割し、軌道点が M₀ に属する時に 0、M₁ に属する時に 1 を与える。この操作から各軌道に対して 0, 1 から成る記号列が得られる。長さ n の記号列を ε₁, ε₂, ..., ε_n (ただし、ε_i = 0, or 1 である) として、その結合確率を p (ε_n, ..., ε₁) とする。その時、

$$\Gamma(q, n) = \sum_{\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1} P(\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1)^q \quad (6)$$

$$(q-1) K_q = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \Gamma(q, n) \quad (7)$$

と書くことができる。(7) 式から十分大きい n に対して

$$\Gamma(q, n+1) = e^{-\psi(q)} \Gamma(q, n) \quad (8)$$

である。ただし、ψ (q) = (q-1) K_q と置いた。ここでスケリーング関数 ρ を次のように定義する。

$$\frac{P(\varepsilon_{n+1}, \cdots, \varepsilon_1)}{P(\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_1)} = \rho(\varepsilon_{n+1}, \cdots, \varepsilon_1) \quad (9)$$

(6)、(9) 式を (8) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\varepsilon_{n+1} \cdots \varepsilon_1 \\ \varepsilon'_n \cdots \varepsilon'_2}} \delta_{\varepsilon_n \varepsilon'_n} \cdots \delta_{\varepsilon_2 \varepsilon'_2} \rho^q(\varepsilon_{n+1}, \cdots, \varepsilon_1) P^q(\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_1) \\ = e^{-\psi(q)} \sum_{\varepsilon_n \cdots \varepsilon_1} P^q(\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (10)$$

従って、次の成分を持つ転送行列 T を定義できる。

$$\langle \varepsilon_{n+1}, \cdots, \varepsilon_2 | T | \varepsilon'_n, \cdots, \varepsilon'_2, \varepsilon_1 \rangle = \rho^q(\varepsilon_{n+1} \cdots \varepsilon_1) \delta_{\varepsilon_n \varepsilon'_n} \cdots \delta_{\varepsilon_2 \varepsilon'_2} \quad (11)$$

(10) 式から T の最大固有値 λ が

$$\lambda = \exp(-\psi(q)) \quad (12)$$

となることが分かる。

次に、h (r) スペクトラムが解析的に得られる 1 次元写像の例で転送行列を説

明しよう。x を $[0, 1]$ 区間で定義された変数として

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x + a & (0 \leq x \leq a) \\ (1-x)/b & (a < x \leq 1) \end{cases} \quad (13)$$

という力学系を例とする（ただし、 $a + b = 1$ を満たす）。写像のグラフを Fig. 2 に示す。記号力学系は M_0 を $[0, a]$ 区間、 M_1 を $[a, 1]$ 区間とすることで得られる。 $F(x)$ は区分線形写像なので記号列と軌道の拡大率 r は 1 対 1 に対応する。また、 M_0 は F によって M_1 の一部に写像されるので、記号列中に 00 という組み合わせは存在しない。さらに、記号 1 の次に 0 がくる確率は a 、記号 1 の次に 1 がくる確率は b であることもすぐに分かる。従って、第 1 次近似の転送行列 T は、

$$T = \begin{pmatrix} \rho_{00}^q & \rho_{01}^q \\ \rho_{10}^q & \rho_{11}^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a^q \\ 1 & b^q \end{pmatrix} \quad (14)$$

となる。この例の場合、第 1 近似の転送行列が厳密解を与える。 T の固有方程式から最大固有値をもとめて (12) 式から

$$K_q = -\frac{1}{q-1} \ln \left[\frac{b^q + \sqrt{b^{2q} + 4a^q}}{2} \right] \quad (15)$$

を得ることができる。 $h(r)$ はルジャンドル変換ですぐに計算できる。また、 K_q が与えられれば、行列 T の次数をあらかじめ仮定することにより行列成分 ρ を未知数として T の固有方程式を逆に解いて T を得ることもできる。 $f(\alpha)$ の場合は、文献 7) に従うと、アトラクターに対して等確率分割を行なうことにより転送行列が定義できる。

転送行列 T の次数が有限の場合、あるいは有限の次数の行列で十分にスペクトラムを近似できる場合は有限個の T の成分の中に無限個の D_q 、 K_q の情報が含まれていることになる。文献 7) においても $f(\alpha)$ の転送行列の成分や最大固有値にダイナミクスに関する情報が含まれていることが指摘されている。冒頭でも述べたようにパターン形成の問題と力学系のカオスと同じマルチフラクタルの議論を適用できることを思い起こすならば、パターン界面の成長確率から得られる $f(\alpha)$ スペクトラムに対してもカオスの場合と同様に転送行列 T を計算できることになる。その場合でも T がパターン形成に関する重要な情報を含んでいることは間違いないであろう。そこに含まれている情報の物理的解釈ということも興味ある問題の一つである。

- 1) T.C.Halsay, M.H.Jensen, L.P.Kadanoff, I.Procaccia, and B.I.Shraiman, Phys.Rev.A.33, 1141 (1986)
- 2) H.G.E.Hentschel, and I.Procaccia, Physica 8D, 435 (1983)
- 3) A.Arnedo, G.Grasseau, and E.J.Kostelich, Phys.Lett.A.124, 426 (1987)
- 4) G.H.Gunaratne and I.Procaccia, Phys.Rev.Lett..59, 1377 (1987)
- 5) M.Sano, S.Sato, and Y.Sawada, Prog.Theor.Phys..76, 945 (1986)
- 6) J.P.Eckmann, and I.Procaccia, Phys.Rev.A.34, 659 (1986)
- 7) M.J.Feigenbaum, M.H.Jensen, and I.Procaccia, Phys.Rev.Lett..57, 1503 (1986)

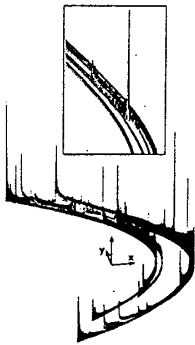


Fig. 1a Arnedo et al.³⁾

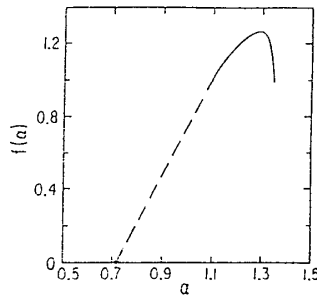


Fig. 1b Gunaratne and Procaccia⁴⁾

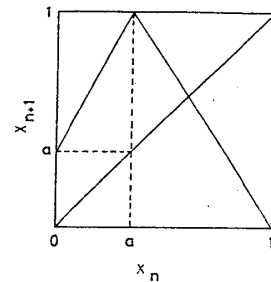


Fig. 2.

9. DLA成長界面の性質

東北大・通研 早川 美徳

DLAクラスターがフラクタル的に成長する上で、枝どうしのスクリーニング効果（すなわちクラスター外部のラプラス場を介した枝の競合）が重要な役割をはたす。枝の先端部での成長確率は非常に大きい一方で、枝に囲まれた入り江での成長確率は極端に小さくなる。DLAクラスター自身のフラクタル構造を反映して、成長確率の Singularity は複雑に分布しており、いわゆる Multifractal 構造を持つことが知られるようになった。

DLAの計算機シミュレーションは通常モンテカルロ法によって行なわれ、ランダムパター