

非平衡状態における緩和・ゆらぎの理論

国士館大工 清 水 敏 寛

System-size 展開の方法¹⁾は、非平衡状態にある系を取り扱う有効な手段の一つである。この方法は、(i) マクロな変数は extensive な性質をもっている。(ii) 平均値のまわりの分散は ϵ (system-size Ω の逆数) のオーダーである、という2つの仮説に基づいている。仮説(ii)は、系の分布関数が Gauss 分布で記述される場合には正しいが、Multi-stable 系では必ずしも成り立つとは限らない。具体的には、1. 不安定点から出発した場合の緩和・ゆらぎ、2. 準安定状態から安定状態への緩和等の問題では、平均値のまわりの分散が ϵ のオーダーでなくなる場合が生ずるので、従来の Ω -展開の方法を拡張する必要がある。研究会では、この拡張についての一つの考え方を提案した。

平均値のまわりの分散等、マクロ変数のモーメントのオーダーの時間的変化を考慮に入れるために、まずモーメントの時間発展についての方程式を Master 方程式より導出し、その後でその時間発展の中の most dominant な部分を取り出すことを考える。

Master 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon^{n-1}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^n C_n(x) p(x, t) \quad (1)$$

から出発する。簡単の為に一変数の場合を考えるが多変数への拡張は容易である。モーメント $y(t) \equiv \int x p(x, t) dx$, $M_n(t) \equiv \int (x - y(t))^n p(x, t) dx$ ($n \geq 2$) を使って定義した $G(\alpha, \vec{\beta}; t)$ を導入する。²⁾

$$G(\alpha, \vec{\beta}; t) \equiv \delta(y(t) - \alpha) \prod_{k=2}^{\infty} \delta(M_k(t) - \beta_k), \quad \vec{\beta} = (\beta_2, \beta_3, \dots) \quad (2)$$

(1) 式より $G(\alpha, \vec{\beta}; t)$ の従う式は、

$$\frac{\partial G(\alpha, \vec{\beta}, t)}{\partial t} = \mathcal{L} G(\alpha, \vec{\beta}, t) \quad (3)$$

ここで演算子 $\mathcal{L}$ は次式で定義される。

$$\mathcal{L} G = -\frac{\partial}{\partial \alpha} (v_1(\alpha, \vec{\beta}) G) - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta_n} (v_n(\alpha, \vec{\beta}) G) \quad (4)$$

$$v_1(\alpha, \vec{\beta}) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} C_1^{(\ell)}(\alpha) \beta_{\ell},$$

$$v_n(\alpha, \vec{\beta}) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{n}{\ell!} C_1^{(\ell)}(\alpha) \beta_{n-1+\ell} + \sum_{k=2}^n \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{k-1}}{k!} \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \frac{C_k^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!} \beta_{n-k+\ell} \\ - n \beta_{n-1} \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{C_1^{(\ell)}(\alpha)}{\ell!} \beta_{\ell},$$

$$(\beta_0 = 1, \beta_1 = 0, C_k^{(\ell)}(\alpha) \equiv \frac{\partial^{\ell} C_k(\alpha)}{\partial \alpha^{\ell}})$$

$G(\alpha, \vec{\beta}; t)$ を用いて書くとモーメントの時間発展は,

$$y(t) = \int d\alpha d\vec{\beta} G(\alpha, \vec{\beta}; t) \alpha = \int d\alpha d\vec{\beta} (e^{\mathcal{L}t} G(\alpha, \vec{\beta}; 0)) \alpha, \quad (5)$$

$$M_n(t) = \int d\alpha d\vec{\beta} G(\alpha, \vec{\beta}; t) \beta_n = \int d\alpha d\vec{\beta} (e^{\mathcal{L}t} G(\alpha, \vec{\beta}; 0)) \beta_n$$

又 $\mathcal{L}$ の共役演算子 $\mathcal{D}$ を導入すれば,

$$M_n(t) = \int d\alpha d\vec{\beta} G(\alpha, \vec{\beta}; 0) e^{\mathcal{D}t} \beta_n \\ = \int d\alpha d\vec{\beta} G(\alpha, \vec{\beta}; t') e^{\mathcal{D}(t-t')} \beta_n \quad (6)$$

($y(t)$ についても同様) ここで $M_n(t)$ の most dominant な部分を議論する時に, 小さなパラメータ ϵ は, 演算子 $\mathcal{D}$ 及び $G(\alpha, \vec{\beta}; t)$ の中のモーメントを通して入ってくことに注意しなければならない。理論の本質的な点は, 時刻 t' でのモーメントのオーダーがわかった時, $\alpha, \vec{\beta}$ をスケール変換することによって (2), (6) 式より演算子 $\mathcal{D}$ の effective part を取り出すことである。

簡単な例: $C_1(x) = rx(1-x^2)$, $C_2(x) = C = \text{一定}$, $C_n(x) = 0$ ($n \geq 3$) 初期条件として不安定点 $x=0$ のまわりの Gauss 分布 $p(x, 0) \propto \exp \{-x^2/2(\epsilon \sigma_0)\}$ を仮定する。初期条件と対称性より奇数次のモーメントは常に 0 である。偶数次のモーメントの初期値は $M_{2k}(0) = \epsilon^k m_{2k}$ ($m_{2k} \sim 0(1)$)。この例題では, 演算子 $\mathcal{D}$ は次式で与

清水敏寛

えられる。

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left\{ r(\beta_{2n} - \beta_{2(n+1)}) + \epsilon C(n - \frac{1}{2}) \beta_{2(n+1)} \right\} \frac{\partial}{\partial \beta_{2n}} \quad (7)$$

short time scale でのモーメントの振舞いは,

$$M_{2n}(t) = \int d\vec{\beta} G(\vec{\beta}; 0) e^{\mathcal{D}t} \beta_{2n}, \quad G(\vec{\beta}; 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \delta(M_{2k}(0) - \beta_{2k}) \quad (8)$$

$$\vec{\beta} = (\beta_2, \beta_4, \dots)$$

β_{2n} を $\zeta_{2n} = \beta_{2n} \epsilon^{-n}$ とスケールすると (8) 式及び $\mathcal{D}$ は

$$M_{2n}(t) = \epsilon^n \int d\vec{\zeta} G_I(\vec{\zeta}; 0) e^{\mathcal{D}t} \zeta_{2n}, \quad G_I(\vec{\zeta}; 0) = \prod_{k=1}^{\infty} \delta(m_{2k} - \zeta_{2k}) \quad (9)$$

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left\{ r(\zeta_{2n} - \epsilon \zeta_{2(n+1)}) + C(n - \frac{1}{2}) \zeta_{2(n-1)} \right\} \frac{\partial}{\partial \zeta_{2n}}$$

従って $M_{2n}(t)$ の most dominant 部分 $M_{2n}^I(t)$ は

$$M_{2n}^I(t) = \epsilon^n \int d\vec{\zeta} G_I(\vec{\zeta}; 0) e^{\mathcal{D}_{\text{eff}}^I t} \zeta_{2n} \quad (0 \leq t \leq t_I) \quad (10)$$

ここで $\mathcal{D}$ の effective part $\mathcal{D}_{\text{eff}}^I$ は,

$$\mathcal{D}_{\text{eff}}^I = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left(r\zeta_{2n} + C(n - \frac{1}{2}) \zeta_{2(n-1)} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta_{2n}} \quad (11)$$

モーメント (10) は従来の Ω -展開の方法の結果と一致し, 時間 t が大きいところで,

$M_{2n}^I(t) \propto (\epsilon \sigma e^{2r t})^n$, ($\sigma = \sigma_0 + \frac{C}{2r}$)。次に $M_{2n}^I(t)$ が正しい時間領域を考える。その為にまず時刻 $t_I (> 0)$ まで $M_{2n}^I(t)$ が dominant 部分だとすると, 時刻 $t (\geq t_I)$ のモーメントは (6) 式を使って次の様に表わせる。

$$M_{2n}(t) = \int d\vec{\beta} G(\vec{\beta}; t_I) (e^{\mathcal{D}(t-t_I)} \beta_{2n}) \quad (12)$$

$$G(\vec{\beta}; t_I) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \delta(M_{2k}^I(t_I) - \beta_{2k})$$

この場合には (8) 式の場合と異って、 $M_{2k}^I(t_I)$ は ε のオーダーでないで、スケール変換 $\eta_{2n} = \beta_{2n} \Delta(t_I)^{-n}$, ($\Delta(t_I) = \sigma \varepsilon e^{2\gamma t_I}$) を導入する。その時演算子 $\mathcal{D}$ は次の様に変換され、

$$\mathcal{D} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n \left\{ r(\eta_{2n} - \Delta(t_I) \eta_{2(n+1)}) + \varepsilon \Delta(t_I)^{-1} C(n - \frac{1}{2}) \eta_{2(n+1)} \right\} \frac{\partial}{\partial \eta_{2n}} \quad (13)$$

(9) 式との比較から $\Delta(t_I)^{-1} \sim \varepsilon \Delta(t_I)^{-1}$, すなわち $\Delta(t_I) \sim \varepsilon^{\frac{1}{2}}$ を満す時刻 t_I まで $M_{2n}^I(t)$ は正しいと考えられる。それ以後での $\mathcal{D}$ の effective 部分は

$$\mathcal{D}_{\text{eff}}^{\text{II}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n r \eta_{2n} \frac{\partial}{\partial \eta_{2n}} \quad (t_I \leq t \leq t_{\text{II}}) \quad (14)$$

モーメントの dominant 部分は

$$M_{2n}^{\text{II}}(t) = \Delta(t_I)^n \int d\vec{\eta} G_{\text{II}}(\vec{\eta}; t_I) e^{\mathcal{D}_{\text{eff}}^{\text{II}}(t-t_I)} \eta_{2n} \quad (t_I \leq t \leq t_{\text{II}}) \quad (15)$$

$$G_{\text{II}}(\vec{\eta}; t_I) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \delta(M_{2k}^I(t_I) \Delta(t_I)^{-k} - \eta_{2k})$$

同様な議論をくりかえすと、 $M_{2n}^{\text{II}}(t)$ は $\Delta(t_{\text{II}}) \sim 1$ を満す時刻 t_{II} まで正しいことがわかる。 $t \geq t_{\text{II}}$ では $\mathcal{D}$ の effective な部分は、スケール変換 $\xi_{2n} = \beta_{2n} \Delta(t_{\text{II}})^{-n}$ を導入して

$$\mathcal{D}_{\text{eff}}^{\text{III}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n r (\xi_{2n} - \Delta(t_{\text{II}}) \xi_{2(n+1)}) \frac{\partial}{\partial \xi_{2n}} \quad (t > t_{\text{II}}) \quad (16)$$

と求まり、モーメントの dominant 部分は次の様に求まる。

$$M_{2n}^{\text{III}}(t) = \Delta(t_{\text{II}})^n \int d\vec{\xi} G_{\text{III}}(\vec{\xi}; t_{\text{II}}) e^{\mathcal{D}_{\text{eff}}^{\text{III}}(t-t_{\text{II}})} \xi_{2n}, \quad (t > t_{\text{II}}) \quad (17)$$

$$G_{\text{III}}(\vec{\xi}; t_{\text{II}}) \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \delta(M_{2k}^{\text{II}}(t_{\text{II}}) \Delta(t_{\text{II}})^{-k} - \xi_{2k})$$

2 次のモーメントを (17) 式から計算すると $M_2^{\text{III}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n (\varepsilon \sigma e^{2\gamma t})^n$, ($b_n = 1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)$) となり $t \rightarrow \infty$ で正しい定常値 1 に近づく。この結果は

清水敏寛

Suzuki³⁾による計算と一致する。ここでは簡単な例を考えたが、この方法はもっと一般的な問題にも適用可能である。その場合には $M_{2n}^{\text{III}}(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で正しい定常値に近づくとは限らないが、その時には上で述べたのと同様の手続きをモーメントが正しい値に近づくまでくりかえしていけばよい。少し詳しいことは Phys. Letter A に載る予定。

参 考 文 献

- 1) R.Kubo et al., J. Stat. Phys. 9 (1973) 51.
- 2) T.Shimizu, Phys. Letters 57A(1976) 13; Physica 83A(1976) 486.
- 3) M.Suzuki, Prog. Theor. Phys. 56(1976) 77; 研究会での講演.

スピノダル分解の初期過程

京大理 富 田 博 之

(I) クラスター・ダイナミックスにおける相似則について

スピノダル分解の初期過程において、ごく初期の段階を除いてある種の相似則が成立つと考えられ、クラスターの平均的な大きさ $\bar{R}(t)$ (半径)あるいは構造因子のピーク $q_m(t)$ は時間 t のべき函数

$$\bar{R}(t) = q_m(t)^{-1} \sim t^{a'} \quad (1)$$

に従うことが知られている。これは次のようなクラスター・ダイナミックスから現象論的に理解される：濃度（あるいはスピン）の空間的な揺ぎを、クラスターの大きさ ℓ （例えば ℓ ケの上向スピンから成るクラスター）に対する分布 $n_\ell(t)$ で表示し、クラスターはブラウン運動により相互に衝突し合体することより成長する、と考えると、次のような反応速度方程式

$$\frac{d}{dt} n_\ell = -n_\ell \sum_j K_{\ell j} n_j + \frac{1}{2} \sum_{i+j=\ell} K_{ij} n_i n_j \quad (2)$$

を得る。反応係数 K_{ij} は、ほぼ球状のクラスターを仮定すれば、拡散係数 D_ℓ とクラス