

確率オートマトンの代数的性質

鳥取大 教育 山田和美

代数的オートマトンの分野では与えられたオートマトンの入力系列全体を合同関係で類別して半群を定義し、それをキとして Semigroup machine を考える。これによってオートマトンを一般的でしかも代数的に扱うことができるようになる。その例として Krohn-Rhodes の分解定理がある。この種の研究は主として有限決定的オートマトンの場合について論じられてきたようであるが、本稿では確率オートマトンの場合についてキ入力系列全体を合同関係で類別して類似のことを考える。そして、この合同関係が finite rank を持つ条件について考察する。

1. 有限決定的オートマトンと Semigroup Machine.

定義 1. 有限決定的オートマトン A とは次のものである。

$A = (X, Y, Q, \delta, \beta)$ X は入力集合, Y は出力集合, Q は状態集合, $\delta: Q \times X \rightarrow Q$ next state function, $\beta: Q \rightarrow Y$ output function, $|X|, |Y|, |Q| < \infty$ とする。(==では Moore 型オートマトンに限定する。)

定義 2. X^* を X 上の有限列に空語 Λ を加えたものとする。
 $= a$ と x とき X^* 上の関係 R_i , R を次のように定義する。

$$(1) \quad x_1 R_i x_2 \iff \delta(q_i, x_1) = \delta(q_i, x_2) \quad q_i \in Q.$$

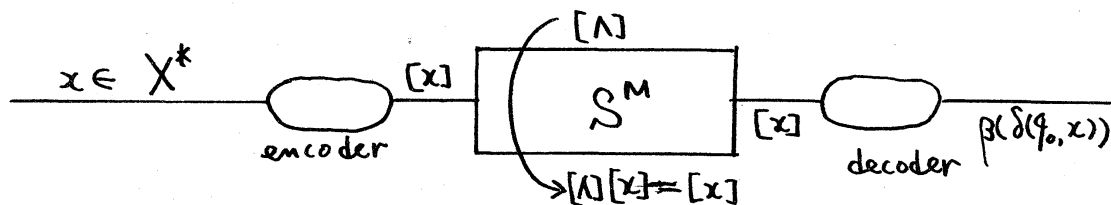
$$(2) \quad x_1 R x_2 \iff \forall i = 1, 2, \dots, |Q| \text{ に対し } x_1 R_i x_2.$$

$= a$ と x とき R_i は X^* 上の right-congruence で R は X^* 上の congruence である。故に X^*/R は半群になる。

定義 3. 半群 S の semigroup machine とは

$S^M = (S, S, S, \delta, i)$ $\delta(a_1, a_2) = a_1 a_2, i(a) = a$
 で定義されるオートマトンである。

Fact 1. $S = X^*/R$ の semigroup machine はオートマトン A を simulate する。これは次のように semigroup machine S^M に encoder, decoder を接続し S^M の initial state を $[\Lambda]$ とすればよい。(q_0 は A の initial state とする。)



2. 確率オートマトンによる Congruence.

定義4. 有限確率オートマトン A とは次のものである.

$A = (X, Y, Q, \{A(x)\}, \beta)$ $\Rightarrow$ X は入力集合, Y は出力集合, $A(x)$ は input x に対する状態遷移行列, $\beta: Q \rightarrow Y, |X|, |Y|, |Q| < \infty$ とする.

定義5. X^* 上の関係 $\bar{R}_i, \bar{R}$ を次のように定義する.

$$(1) x_1 \bar{R}_i x_2 \iff \forall j \models \text{対し } P(x_1)_{ij} = P(x_2)_{ij}.$$

$$(2) x_1 \bar{R} x_2 \iff \forall i \models \text{対し } x_1 \bar{R}_i x_2.$$

($\Rightarrow$ x input $x \in X^*$ により state q_i から q_j へ推移する確率を $P(x)_{ij}$ と書くことにする。)

Fact 2. (1) $\bar{R}_i$ は X^* 上の right-congruence である。

(2) $\bar{R}$ は X^* 上の congruence である。

(3) $X^*/\bar{R}$ は半群である。

(証明)

(1) は省略す。 (2) $x_1 \bar{R} x_2$, $\forall y, z \in X^*$ とする

$$\begin{aligned}
 P(yx_1z)_{ij} &= \sum_{k=1}^m P(yx_1)_{ik} P(z)_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^m P(y)_{i\ell} P(x_1)_{\ell k} \right) P(z)_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{\ell=1}^m P(y)_{i\ell} P(x_2)_{\ell k} \right) P(z)_{kj} \\
 &= \sum_{k=1}^m P(yx_2)_{ik} P(z)_{kj} \\
 &= P(yx_2z)_{ij}
 \end{aligned}$$

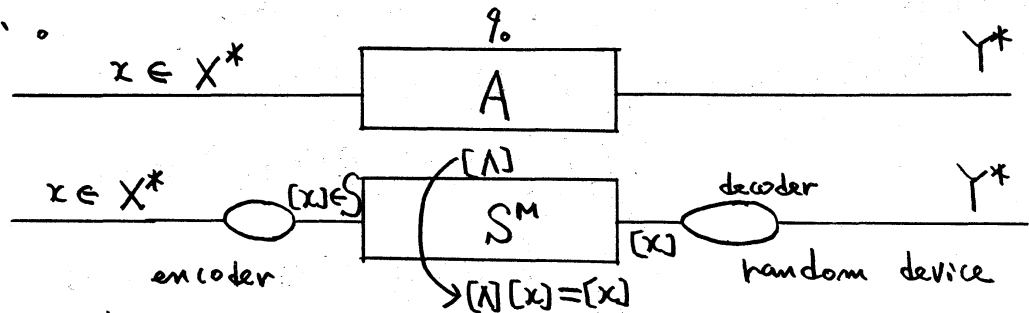
故に $yx_1z \bar{R} yx_2z$, よって $\bar{R}$ は congruence である。(3) は $\bar{R}$ が congruence であるから $[x_1][x_2] \equiv [x_1x_2]$ により $X^*/\bar{R}$ は半群になる。 Q.E.D.

3. 確率オートマトンの Semigroup Machine

定理1. $A = (X, Y, Q, \{A(w)\}, \beta)$ を確率オートマトン,
 その半群を S (即ち $S = X^*/\bar{R}$) とすると S の semigroup
 machine S^M は A を simulate する。(即ち A の initial
 state に対し S^M の initial state を適当に set し,
 S^M に encoder, decoder を接続すると A と同じ確率で同
 一の入出力動作をする。)

(証明)

次図の如く encoder, decoder を S^M に接続すればよい。



A の initial state q_0 に対し S^M の initial state を $[1]$ とし, decoder と 1 次の random device を接続する。 X^*/R の代表系を $\{x_\alpha\}_\alpha$ とするとき $\{A(x_\alpha)\}_\alpha$ と A の initial state q_0 に対する initial distribution I とを組み込み random device への入力 q (ie S^M の output) が $[x]$ のとき $IA(x_\alpha)$ で state の分布をとり (ただし $x_\alpha \in [x]$ 各 state q' の確率分布に応じて $\beta(q')$ を random device から出力することにする。(実は $\{IA(x_\alpha)\}_\alpha$ と output function β を組み込むばよい。)) Q.E.D.

一般的には $|S| = |X^*/R|$ は有限とは限らないが特に $\bar{R}$ が finite rank を持つ (ie $|S| = |X^*/R| < \infty$) ときには上の semigroup machine は有限決定的オートマトンになる。このことは $\bar{R}$ が finite rank を持つときには確率オートマトンが有限決定的オートマトンで構成できることを示している。そして decoder には代表系 $\{x_\alpha\}_\alpha$ が有限集合で

あるから、有限個の $A(x_i)$ に対応するものを組み込んでおけばよいことになる。

4. finite rank を持つ $\bar{R}$

定理2. 確率オートマトン $A = (X, Y, Q, \{A_{ij}\}, \beta)$ において、 $\bar{R}$ が finite rank を持つ $\iff A$ は有限決定的オートマトン B に decoder として random device を接続して simulate 出来る。

(証明)

($\implies$) 定理1より明らか。($\impliedby$) $\bar{R}$ が finite rank を持たないとする。 $\exists \{x_m\}_m, x_m \in X^*, \exists i, \exists j; \forall x_m, \forall x_{m'},$ に対し $P_{ij}(x_m) \neq P_{ij}(x_{m'})$ とできる。各 input x_m を A に食わせたとき、それぞれ異なる確率 $P_{ij}(x_m)$ で output $\beta(q_i)$ が得られることになる。よって B は有限決定的オートマトンであるから各 input x_m に対し output $\beta(q_i)$ の出る確率は有限種類しかない。これは矛盾する。従って $\bar{R}$ は finite rank を持つ。

Q. E. D. /

Fact 3. $\bar{R}$ が finite rank を持つとき、

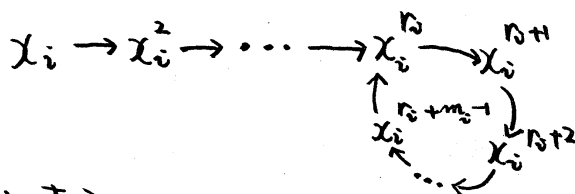
(i) 自然数 N が存在し、任意の $x \in X^*$ に対し $\exists x' \in X^*$

$|x'| \leq N$, $x \bar{R} x'$ と出来る。すなわち X^*/R の代表系の語の長さには上限がある。

(2) $x_i \in X$ に対し、自然数 r_i, m_i が存在して、自然数 n を $n = r_i + p m_i + n_i$ ($0 \leq n_i < m_i$) と書くと
 $x_i^n \bar{R} x_i^{r_i + m_i}$ とできる。 ($x^n \equiv \underbrace{x \cdots x}_n$)

(証明)

(1) は明らかである。(2)



$\{x_i^n\}_n$ で $r_i < r'_i$ を
 最初の $x_i^{r_i} \bar{R} x_i^{r'_i}$ なる系とす。

$m_i \equiv r'_i - r_i$ とおくと $0 \leq m_i < m_i$ なる m_i に対

し $n = r_i + m_i p + n_i$ と書ける

$$\begin{aligned} A(x^n) &= A(x_i^{r_i + p m_i + n_i}) = A(x_i^{r_i + m_i}) A(x_i^{(p-1)m_i}) A(x_i^{n_i}) \\ &= A(x_i^{r'_i}) A(x_i^{(p-1)m_i}) A(x_i^{n_i}) \\ &= A(x_i^{r_i}) A(x_i^{(p-1)m_i}) A(x_i^{n_i}) = \dots = A(x_i^{r_i + m_i}) \end{aligned}$$

$$\therefore x_i^n \bar{R} x_i^{r_i + m_i}$$

Q. E. D. /

5. あと書き.

3節で述べたように $\bar{R}$ が finite rank を持つときは S^M は finite semigroup machine になる。このときには、有限決定的オートマトンに対する以下の Krohn — Rhodes の定

理により [定理1] の semigroup machine は基本的な component まで分解可能であることが分かる。ie
与えられた確率オートマトンは基本的な component を組み合わせたオートマトンに encoder と random device を decoder として接続することによって作られることが分かる。

[Krohn - Rhodes の定理]

$$f \in SP[PRIMS(f^s)^t \cup \{D, U_s^+\}]$$

これは どんな有限決定的 オートマトン A (上では f と書いてある) に対しても、その半群が original automaton A の作る半群に含まれる単純群を作る semigroup machine と two states identity-reset machine を直並列接続で A と同じ入出力動作をさせることができることを示している。

以上のように、確率オートマトンを分解する手法として、決定的オートマトンに対する Hartmanis 流の状態分割によるのではなく、確率オートマトンの semigroup machine を導入して、決定的オートマトンに対する Krohn-Rhodes 流の手法も用いることが出来ることが分かった。

参考文献：

1. Page: "Equivalences between Probabilistic and
Deterministic Sequential Machines", Int-Cont. 9 ⁽¹⁹⁶⁶⁾ 469~520
2. Arbib: "Algebraic Theory of Machines, Languages, and
Semigroups" Academic Press.
3. 藤本信智: "確率オートマタの Partition Pair および
Partition Pair による分解について", 信学論 _(D) '73/1 615~622
4. G.C. Bacon: "The Decomposition of Stochastic
automata", Inform. Contro. 7 p 320 (1964)