

(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	山口 貢輝
論文題目	On the 3-loop polynomial of genus 1 knots with trivial Alexander polynomial (アレクサンダー多項式が自明な種数 1 の結び目の3ループ多項式について)		
(論文内容の要旨)			
結び目のすべての量子不変量を統一する非常に強力な不変量としてKontsevich不変量という不変量が知られており、Kontsevich不変量はヤコビ図（ある種の1, 3価グラフ）がはる巨大なベクトル空間に値をとるが、その具体的な値の計算は容易ではないことが知られている。ヤコビ図のグラフのループ数（グラフの1次ベッチ数）ごとに、Kontsevich不変量の値の部分和をとると、各部分和は適切に変数変換をすると多項式の形に表示することができ、これをループ展開と言う。1ループのヤコビ図は、円周に有限個の線分を貼り付けて表示することができ、1ループのヤコビ図の空間は1変数多項式環と自然に同一視され、Kontsevich 不変量の1ループの部分は Alexander 多項式というよく知られている不変量で記述されることが知られている。2ループのヤコビ図は、テータグラフに有限個の線分を貼り付けて表示することができ、2ループのヤコビ図の空間は2変数多項式環と自然に同一視され、Kontsevich 不変量の2ループの部分は2ループ多項式という2変数多項式で記述されることが知られている。2ループ多項式について、計算方法や計算例などの先行研究が知られている。同様に、3ループの部分は「3ループ多項式」という3変数多項式で表示される。3ループ多項式は、トーラス結び目に対する計算例は知られているが、それ以外の計算例や性質はほとんど知られていなかった。 本論文では、自明な Alexander 多項式をもつ種数 1 の結び目Kの3ループ多項式を計算している。種数 1 の結び目Kは、長方形に2つのバンドを適切に貼り付けることによって表示することができるが、2つのバンドのつくるタングルTの5次以下の有限型不変量を用いてKの3ループ多項式が定まることが知られている。しかし、その具体的な表示を求めることは容易ではない。本論文では、自明な Alexander 多項式をもつ種数 1 の結び目Kの3ループ多項式は、ある具体的な11次元ベクトル空間に属すること、とくに、Kの11個のある有限型不変量（Vassiliev 不変量）を用いて表示することができることを示している（定理3.1）。証明には Aarhus 積分を用いる。Aarhus 積分は、リー環版の同様の操作がガウス積分で記述されるので「積分」と称しているが、ヤコビ図版の Aarhus 積分はヤコビ図に対する組合せ的操作で定められる。自明な Alexander 多項式をもつ種数1の結び目 K は、上述のタングル T を用いて構成されるある種の絡み目にそって（S³, 自明結び目）を手術することによって得られるが、手術によって Kontsevich 不変量の各ループ数の部分が変化する様子を Aarhus 積分によって記述することができるので、これを計算することによって上述の定理3.1が得られる。さらに、本論文では、2ループ多項式も自明な場合、すなわち、自明な Alexander 多項式と2ループ多項式をもつ種数 1 の結び目Kの3ループ多項式を、Kの5つの具体的な Vassiliev 不変量を用いて表示する公式を具体的に与えている（定理3.3）。このことより、2ループ多項式が自明な場合は、定理3.1の11個の Vassiliev 不変量の間には、それらの自由度が5次元分になるような関係式はいることがわかる。			

(続紙 2)

(論文審査の結果の要旨)

1980年代に、量子論的手法が3次元トポロジーに導入され、結び目と3次元多様体の大量の不変量(量子不変量)が発見された。**Kontsevich**不変量は、結び目のすべての量子不変量を統一する不変量であり、結び目を分類することが期待されている非常に強力な不変量である。結び目の分類問題の観点から、**Kontsevich**不変量の像を特定することは重要な問題である。

Kontsevich不変量の値の形に強い制限をいれているのが「ループ展開」をいう性質である。「**Kontsevich**不変量の値の形にはいる制限」という観点では、「ループ展開」は強い制限である。すなわち、各ループ数に制限した場合でも、**Kontsevich**不変量の値は無限個のヤコビ図の線型和であり、そのような線型和の全体は非可算無限個あるが、一方、ループ展開の n ループの部分は n 変数多項式を用いて記述され、そのような多項式の全体は可算無限個なので、「ループ展開」が強い制限であることがわかる。よって、結び目の分類問題の観点から、ループ展開について調べることが重要である。前述のように、ループ展開の1ループの部分と2ループの部分については先行研究があり、計算方法や計算例が知られているが、3ループの部分の記述する3ループ多項式については従来の研究では計算方法や計算例はほとんど知られていなかった。本論文では、自明な **Alexander** 多項式をもつ種数1の結び目の3ループ多項式を具体的に計算しており、未知の研究領域に新たな知見をもたらしたものであり、価値のある研究である。とくに、2ループ多項式が自明である場合には、5つの具体的な **Vassiliev** 不変量を用いて3ループ多項式を具体的に表示する公式を与えており、3ループ公式の定義等をよく知らない研究者でも3ループ多項式の計算ができるようにしており、有用な成果である。

種数が1で**Alexander**多項式が自明であるという仮定は、もしその仮定をおかないと、本研究の計算量は爆発的に増大していたとおもわれ、その仮定は本研究では必要な仮定であった。計算量が増大する原因は**Aarhus**積分にある。**Aarhus**積分が計算しているのは、ガウス積分の摂動展開である。ガウス積分の被積分関数の指数は2次の項と3次以上の項からなるが、2次の項の係数を逆数にしたものと3次以上の項を結合することにより、ガウス積分の摂動展開が計算される。上述の仮定がないと、その結合の計算量が爆発的に増大するため、この仮定が必要である。

ループ展開を sl_2 簡約したものは「色付き**Jones**多項式のループ展開」であり、さらにそれは**Melvin-Morton**予想の高次化であり、歴史的にはそれらが先にあって、それらの発展形として**Kontsevich**不変量のループ展開が発見された。それらの歴史的経緯もふまえると、量子トポロジーで知られている他の不変量と本論文の研究とに関連があることも期待される。

よって、本論文は博士(理学)の学位論文として価値あるものと認める。また、令和7年12月23日に、論文内容とそれに関連した事項について諮問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日： 年 月 日以降