

MR-theory の問題点

大阪市大・理 荒木健朗

MR-theory について, 二つの問題点を指摘したい.

$MR^{*,*}(pt)$ を決定する過程において, $MR^{*,*}(pt)$ に associate された Forgetful spectral sequence を計算することの問題になる. ここで Forgetful spectral sequence γ は, τ -cohomology $h^{*,*}[2]$ において, τ -cofibration $S_+^{1,0} \rightarrow B_+^{1,0} \rightarrow \Sigma^{1,0}$ は任意の finite τ -complex X に対して natural な完全列

$$\cdots \rightarrow h^{p-1,q}(X) \xrightarrow{\alpha} h^{p,q}(X) \xrightarrow{\beta} h^{p,q}(S^{1,0} \times X) \xrightarrow{\gamma} h^{p-1,q+1}(X) \rightarrow \cdots$$

が定まり, 一方, 自然な同型 $\beta: h^{p,q}(S^{1,0} \times X) \cong \gamma h^{p,q}(X)$ があり, $\beta \circ \alpha = \gamma: h^{p,q}(X) \rightarrow \gamma h^{p,q}(X)$ は忘却準同型になる.

そこで上の完全列は忘却完全列と呼ばれるが, ここで

$$D_1^{p,q}(X) = h^{p,q}(X), \quad E_1^{p,q}(X) = h^{p,q}(S^{1,0} \times X)$$

と置けば, 上の完全列は完全対 (bigraded) を与え, 従って

スペクトル系列 $E_r^{p,q}(X)$ が定まる. したがって $h^{*,*}(X)$ に associ-

ate された forgetful spectral sequence と呼ばれる。

すなわち, 一般の forgetful spectral sequence の E_r -項は次のような periodicity を持つ。今, $E_r^{p,q}$ は乗法的であるとする。

$$u_r \in E_r^{a_r, -a_r}(pt)$$

で u_r は乗法逆元である。そして同型

$$\omega_r: E_r^{p,q}(X) \cong E_r^{p+a_r, q-a_r}(X), \quad \omega_r(x) = u_r \cdot x,$$

が成立つ。これは $E_r^{p,q}(X)$ の periodicity 同型という。ここで,

$$a_r = 2^{\varphi(r-1)},$$

$$\varphi(k) = \# \{ s \in \mathbb{Z}; 0 < s \leq k, s \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{8} \}$$

である。実際 u_r は既約な Clifford 加群を用いて作られる。

一般に、全射

$$\lambda_r: E_r^{p,q}(S^{r,0} \times X) \rightarrow E_r^{p,q}(X)$$

が存在し [1], 一方既約な Clifford 加群を用いて r -同相

$$S^{r,0} \times (B^{a_r,0}, S^{a_r,0}) \cong S^{r,0} \times (B^{0,a_r}, S^{0,a_r})$$

が得られ、これは懸垂同型による。元

$$\bar{u}_r \in E_r^{a_r, -a_r}(S^{r,0})$$

が得られ, $\lambda_r(\bar{u}_r) = u_r$ とおく。 u_r の可逆性は $\bar{u}_r$ のそれから従い, $\bar{u}_r$ の逆元はその定義と逆向きに 1 を考へれば得られる。

一般には $(a_r, -a_r)$ が最小周期のように思われる (証明は否

い), この一般の周期性は $R^{*,*}(S^{r,0})$ の乗法的可逆元 $\bar{w}_r$ から得られたことを先づ注意しておく.

所で, $MR^{*,*}(X)$ に associate された forgetful spectral sequence においては, より小さな周期をもつ周期性同型が成立つ. 即ち, 乗法的可逆元

$$w_r \in E_r^{b_r, -b_r}(pt)$$

がある. ここで

$$b_r = 2^s, \quad 2^s \leq r < 2^{s+1} \text{ のとき,}$$

である. 一般には $b_r \leq a_r$ である.

$$a_r = b_r \iff r = 1, 2, 4, 8$$

となることは容易にわかる. 又, この現象は MR-theory に限らず, 一般に real-complex vector bundle (Atiyah の意味での real vector bundle) に対して自然な乗法的な orientations をもつ r -cohomology なるこのような小さな周期をもつ周期性同型が成り立つ. 従って, $S^{r,0}$ 上の real-complex vector bundles の Thom class を用いて w_r が実現出来るように思われるが, このことは一般には明らかでない. ここで

問題 1. MR-理論において, 乗法的可逆元

$$\bar{w}_r \in MR^{b_r, -b_r}(S^{r,0})$$

があるか? (あるいは必然的に $\lambda_r(\bar{w}_r) = \pm w_r$ となる.)

上の $\bar{w}_r$ を探す問題は, $MR^{+,*}(S^{r,0})$ を計算するために必要である. 次は $MR^{+,*}(S^{r,0})$ を計算することと, それがどんな意味をえつかを考えていく.

$r > 0, s > 0$ に対して, 自然な包含

$$S^{r,0} \subset S^{r+s,0}$$

を考える. 簡単な考察で, τ -同相

$$S^{r+s,0}/S^{r,0} \approx \Sigma^{r,0}(S_+^{s,0})$$

が得られる. 従って, τ -cofibration

$$S_+^{r,0} \xrightarrow{\eta_{r,r+s}} S_+^{r+s,0} \xrightarrow{\xi_{r+s,s}} S^{r+s,0}/S^{r,0}$$

は, X について自然な完全列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow MR^{p-r,q}(S^{s,0} \times X) &\xrightarrow{\xi_{r+s,s}^+} MR^{p,q}(S^{r+s,0} \times X) \\ &\xrightarrow{\eta_{r,r+s}^+} MR^{p,q}(S^{r,0} \times X) \xrightarrow{\delta_{s,r}} MR^{p-r,q+1}(S^{s,0} \times X) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

が得られる. 特に $X = pt$ のとき, この完全列を利用して $MR^{+,*}(S^{r,0})$ を計算することとを考える. $r=1, 2, \dots$ と次々に計算して行くのである.

$a_1 = b_1, a_2 = b_2$ があったから, $\bar{w}_1 = \bar{u}_1, \bar{w}_2 = \bar{u}_2$ といいことに気づく注意する.

殆んど自明な同型

$$MR^{p,q}(S^{1,0} \times X) \approx MU^{p+q}(X)$$

(このことは $\psi MR^* = MU^*$ であることを示している) より,

$$MR^{*,*}(S^{1,0}) = MR^*(pt)[\bar{w}_1, \bar{w}_1^{-1}]$$

であることがわかる。但し

$$MR^*(pt) = \sum_n MR^{n,n}(pt) \approx MU^{ev}(pt).$$

次に $MR^{*,*}(S^{2,0})$ を計算するのには, 前の完全列と $r=s=1$ といて用いる. $MR^{*,*}(pt)$ の forgetful spectral sequence の計算(の生発集)より,

$$\delta_{1,1} \bar{w}_1 = \pm 2, \quad \delta_{1,1} \bar{w}_1^2 = 0$$

がわかる. 又 $\eta_{1,2}^{\pm} \bar{w}_2 = \pm \bar{w}_1^2$ である(この種の操作は同型性元については常に成立する)とこの完全列が計算され, 次の定理を得る

定理 1. $MR^{*,*}(S^{2,0}) = MR^*(pt)[\bar{w}_2, \bar{w}_2^{-1}][\xi_{2,1}^{\pm} \bar{w}_1, \alpha]/I$,
但し, $I = ((\xi_{2,1}^{\pm} \bar{w}_1)^2, 2\alpha, \alpha^2, (\xi_{2,1}^{\pm} \bar{w}_1)\alpha)$, $\xi_{2,1}^{\pm} \bar{w}_1 \in MR^{2,1}(S^{2,0})$, $\alpha = \chi(1) \cdot 1 \in MR^{1,0}(S^{2,0})$.

次に $MR^{*,*}(S^{3,0})$ を計算するのがあるが, $\bar{w}_3$ がまだ作られていない. 先づ $\bar{w}_3$ を作る.

$CP_1 = S^2$ 上の Hopf bundle を考えるのには, その principal $\mathbb{C}^*$ -bundle は

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 - \{0\} & \longrightarrow & CP_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (z_1, z_2) & \longmapsto & [z_1, z_2] \end{array}$$

で与える, この $\mathbb{C}^2 = \mathbb{H}$, 4元数体, と同一視するときは,

$\mathbb{C}^2 - \{0\} = \mathbb{H}^1 \times \mathbb{C}^*$, Hopf principal $\mathbb{C}^*$ -bundle is

$$h: \mathbb{H}^1 \xrightarrow{\pi} \mathbb{CP}_1$$

と π , right $\mathbb{C}^*$ -action is " $q \mapsto qz$ " π ζ z is h ,

$$\eta^+ = \mathbb{H}^1 \times_{\mathbb{C}^*} \mathbb{C}$$

is Hopf line bundle π is.

$$J: \eta^+ \rightarrow \eta^+$$

$J(q, \zeta) = (-q, j, \bar{\zeta})$, $q \in \mathbb{H}^1$, $\zeta \in \mathbb{C}$, J defines J ,

J is η^+ π fibers π fibers is π $\mathbb{CP}_1$ π involution $\tilde{J}$
 π induce π . π -同相 $(\mathbb{CP}_1, \tilde{J}) \approx S^{3,0}$ is 容易 is 得 is

is. J is η^+ π fiber π conjugate linear is 作用

($J^2 = -1$) π is. π is symplectic-complex line bundle

$$(\eta^+, J) \rightarrow S^{3,0}$$

is 得 is π . π is bundle is, π is Dupont [3] π
 KR -theory π 研究 is 用 is π .

$(\eta^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, J \otimes j)$ π 考 is π . π j is $\mathbb{H} \wedge$ π left multiplication
 π π , $(J \otimes j)^2 = 1$ π is π is,

$$(\eta^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}, J \otimes j) \rightarrow S^{3,0}$$

is $S^{3,0}$ π π real-complex 2-vector bundle is π . π is
 MR -Thom class π

$$t_{MR}(\eta^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}) \in \widetilde{MR}^{2,2}(M(\eta^+ \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{H}))$$

とある。

$$\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H = (H^+ \times_{\mathbb{C}^+} \mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} H = H^+ \times_{\mathbb{C}^+} H$$

とある。これに注意して、

$$\chi: H^+ \times_{\mathbb{C}^+} H \longrightarrow S^{3,0} \times H$$

で $\chi(q, q') = (\pi(q), qq')$ とする。 χ は実 vector bundle の同型で、 $S^{3,0} \times H$ の H には自明な involution とする。 χ は τ -map とある。 P_T

$$\chi: (\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H, J \otimes j) \approx S^{3,0} \times \mathbb{R}^{0,4},$$

involution と χ の real vector bundles の同型。 q_3 は

$$\tilde{\chi}: M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H) \approx S_+^{3,0} \wedge \Sigma^{0,4},$$

τ -同相、が導かれる。 χ と $\tilde{\chi}$

$$\begin{aligned} \widetilde{MR}^{2,2}(M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H)) &\stackrel{\tilde{\chi}^+}{\approx} \widetilde{MR}^{2,2}(S_+^{3,0} \wedge \Sigma^{0,4}) \\ &\stackrel{0,4}{\approx} \widetilde{MR}^{2,-2}(S_+^{3,0}) = MR^{2,-2}(S^{3,0}). \end{aligned}$$

と η の同型合成による $t_{MR}(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H)$ の像 τ

$$\bar{w}_3 \in MR^{2,-2}(S^{3,0})$$

とある。

次の η の同型合成

$$\begin{aligned} MR^{p,q}(S^{3,0} \times X) &\approx \widetilde{MR}^{p+2,q+2}(M(\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H) \wedge X_+) \\ &\stackrel{\tilde{\chi}^+}{\approx} \widetilde{MR}^{p+2,q+2}(S_+^{3,0} \wedge \Sigma^{0,4} \wedge X_+) \\ &\stackrel{0,4}{\approx} \widetilde{MR}^{p+2,q-2}(S^{3,0} \times X) \end{aligned}$$

(但し η の同型合成は $\eta^* \otimes_{\mathbb{C}} H \times 1$ の Thom 同型) により、 η

型

$$MR^{p,q}(S^{3,0} \times X) \approx MR^{p+2, q-2}(S^{3,0} \times X)$$

が常に成立つか、この同型は $\bar{w}_3$ と α に関する $\mathbb{Z}$ -線形関係に由来する。よって $\bar{w}_3$ は乗法可逆元であることが示される。

$\eta = \eta^+$, 前にも述べた完全列 $\gamma = 2, s = 1$ の η が η^+ である。
 $\eta_{2,2}^+ \bar{w}_3 = \pm \bar{w}_2$, η となり。又、forgetful spectral sequence
 より $\delta_{1,2}^+ \xi_{2,1}^+ \bar{w}_1 = \pm 2$ となる。よって $MR^{*,*}(S^{3,0})$ が η^+ である。

定理 2. $MR^{*,*}(S^{3,0}) = MR^*(\mathbb{H})[\bar{w}_1, \bar{w}_1^{-1}][\xi_{3,1}^+ \bar{w}_1, \beta]/J$,
 但し $J = ((\xi_{3,1}^+ \bar{w}_1)^2, 2\beta, \beta^3, (\xi_{3,1}^+ \bar{w}_1)\beta)$, $\beta = \chi(1) \cdot 1 \in MR^{1,0}(S^{3,0})$, $\xi_{3,1}^+ \bar{w}_1 \in MR^{3,-1}(S^{3,0})$.

有限 CW 複体 X に対し, 自然な involution τ を

$$L^+(X) = MR^{*,*}(S^{3,0} \times X)/\sim$$

とおく。但し, $\sim$ は周期性同型 ($\bar{w}_3$ と α に関する) $\mathbb{Z}$ -線形関係に由来する。また, $\sim$ は bidegree を変化する α の $\mathbb{Z}$ -線形関係に由来する。よって, L^+ は half-exact functor であり, $\deg(\bar{w}_3) = (2, -2)$ であり, α と $\sim$ は total degree を変化する。よって, L^+ は total degree を $\mathbb{Z}$ -graded, 容易にわかるように, L^+ は (-3) -connected な multiplicative cohomology theory である。

X 上の $\mathbb{H}$ -vector bundle E に対し, 同相 X が拡張定義上

れ, involution を受けた 実 vector bundle の型

$$\chi_E: \eta^* \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} E \approx S^{3,0} \times E$$

を得る。但し, 左側の E には j が左から act し, 右側の E は trivial involution を受ける。すなわち, τ -同相

$$\widehat{\chi}_E: M(\eta^* \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} E) \approx S^{3,0}_+ \wedge ME$$

が得られ, 又

$$(\widehat{\chi}_E^+)^*(t_{MR}(\eta^* \hat{\otimes}_{\mathbb{C}} E)) \in MR^{2n, 2n}(S^{3,0}_+ \wedge ME)$$

は $L^{4n}(ME)$ における $t_{MR} \in E$ の L^+ -Thom class を与える。よって, L^+ は symplectic-oriented. よって, multiplicative, orientation-preserving natural transformation

$$\nu: MSp^+ \rightarrow L^+$$

が得られる。 $KR^{+,+}(S^{3,0} \times X) \simeq KO^+(X)$ を示す。以下, Fujii [4] の natural transformation

$$\gamma: MR^{+,+} \rightarrow KR^{+,+}$$

を用いて次の定理を得る。

定理 3. ν は Conner-Floyd map: $MSp^+ \rightarrow KO^+$ 及び忘却写像 $MSp^+ \rightarrow MU^+$ を factorise する。

よって, L^+ は MSp^+ を示すための有力手段たり得るであろう。

問題 2. $\nu(pt): MSp^+(pt) \rightarrow L^+(pt)$ を示す方法を与えよ。

$L^+(pt)$ は定理 2 からすぐわかることを注意しておく。この形からみて, L^+ は $KO \wedge MU$ にかなり近いように見える。 L^+ からの MSP についての information が $KO \wedge MU$ 以上のものが得られないときは, 更に $MR^{*,*}(S^{p,0})$, $p \geq 4$, を計算してみること, L^+ よりもっと MSP に近いものが得られるだろうか? $a_4 = b_4$ であるから, $\bar{w}_4 = \bar{u}_4$ なら, $MR^{*,*}(S^{4,0})$ の計算はそれほど困難でない筈である。

最後に, L^+ と KO^+ のある種の cobordism analogue をみたい。また, $MR^{*,*}(S^{2,0} \times X)$ の periodicity と関係して得られる cohomology は, KSC^+ のある種の cobordism analogue を与えるであろう。($MR^{*,*}$ と $KR^{*,*}$ の cobordism analogue を与える関係も意味する)。

以上。

文献

[1] S. Araki, Forgetful spectral sequences (to appear in Osaka J. Math.)

[2] S. Araki and M. Murayama, τ -cohomology theories, Japanese J. of Math., N.S., 4 (1978) (to appear).

[3] J. L. Dupont, Symplectic bundles and KR-theory,
Math. Scand. 24 (1969), 27-30.

[4] M. Fujii, On the relation of real cobordism
to KR-theory, Math. J. Okayama Univ., 19 (1977),
147-158.