

# A Construction of Quandles associated with Quadratic Algebras (カンドルのある構成)

Noriaki Kamiya (神谷徳昭)

Department of Mathematics, University of Aizu, Japan (会津大学)

**Abstract** This note is to give examples of quandles (or rack) in knot theory from quadratic algebras, and to deal with related topics associated with the quandles.

## § Introduction (はじめに)

非結合的代数系を研究している筆者が最近考えた quandle の実例を与えることが、この小論の目的です。浅学の為にもしかしたらこの方面の knot theory においては、知られた事実かも知れませんが、計算機科学と関連する事柄を含め、代数系の立場から新しい idea として述べさせていただきます。

非結合的代数系については [K-O] の文献が 2 次代数, 合成代数そして、それらの一般化について述べてあり,  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$ ,  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  等の内積  $\langle, \rangle$  (又は  $\|x\|$ , ノルム) を考える上で役に立つかも知れませんが、しかし直接、それらの結果を使うわけではないです。特に quandle の応用を研究するのに興味ある人々には、積が standard なものではないので、共役元 (一般に involution をもつ積) で考えるこの小論が役に立つ可能性があると思われるます。計算機科学からの視点も含め、ここに述べさせていただきます。

## §1. Preliminary (準備と定義)

集合  $\mathbf{M}$  とそこでの bijective なる乗法  $\circ$  が与えられたとき (つまり  $R_x y = y \circ x$  と置く時,  $R_x$  が bijective), 次の条件 1) と 2) を満たす  $(\mathbf{M}, \circ)$  を quandle と言います。

- 1)  $x \circ x = x$
  - 2)  $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$  for any  $x, y, z \in \mathbf{M}$ .
- 2) の条件は rack の条件です。これらは knot theory の用語です。

ここで  $x * y = y \circ x$  と new product を定義すると,

- 3)  $x * x = x$
- 4)  $x * (y * z) = (x * y) * (x * z)$

と書き直すことができます。そして  $S_x y = x * y$  と表すと。

- $S_x x = x$
- $S_x S_y = S_{S_x y} S_x$  ( $S_x$  が自己同型写像を表す関係式)

となり,  $(M, S_x)$  は  $s$ -mainifold と関連します。この  $\{S_x\}$  を  $s$ -map,  $M$  を  $s$ -set と呼ぶことにします (すなわち, これは generalized symmetric space の代数的概念とも一脈通じます)。勿論,  $M$  と  $S_x$  の多様体としての条件等を付け加えての議論ですが, ここでは詳しい議論には進みませんが, 微分幾何学的な事柄とも関連することに留意してください。

一方 homogeneous presystem  $\eta(x, y, z)$  の概念で  $\eta(x, x, y) = S_x y = x * y$  とすると,  $\eta(a, b, \eta(x, y, z)) = \eta(\eta(a, b, x), \eta(a, b, y), \eta(a, b, z))$  が自己同型写像の概念となり, homogeneous presystem と  $S_x$  の理論とが関係します. これらについて詳しくは後述の参考文献 [K-S.1], [K-S.2] を参照して下さい.

この小論では 1) と 2) は 3) と 4) と同値ですので, 3) と 4) を満たす乗法  $*$  をもつ代数系で考察します. つまり, 乗法をもつある集合の中で,  $\lambda * \lambda = \lambda$  の元  $\lambda$  を見つけることです. 以上の事から 3) と 4) を満たす  $S_x$  を s-map,  $M$  を s-set と呼ぶことにしています (微分構造は仮定しません. 乗法のみ仮定した代数系を考えます).

## §2. Results (主要定理)

$1 < q < r < p$ ,  $p$  を素数,  $q, r$  を自然数,  $qr \equiv 1 \pmod{p}$  かつ  $q$  と  $r$  のいずれも平方数でないとする. 例えば  $p = 5$ ,  $q = 2$ ,  $r = 3$ ,  $p = 7$ ,  $q = 3$ ,  $r = 5$ ,  $p = 11$ ,  $q = 7$ ,  $r = 8$  等の対  $(p, q, r)$  を考える. そして, 有限体  $\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/(p)$  上の  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  を考察する (以下この条件で考えます). 積は  $xy = (m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r})(m' + n'\sqrt{q} + l'\sqrt{r})$ , 共役元は  $\bar{x} = m - n\sqrt{q} - l\sqrt{r}$  if  $x = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$  です (この積を standard product と呼ぶことにします).

ここで内積 (ノルム) を次の様に定義します.

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ and } \langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}).$$

勿論有限体  $\mathbf{Z}_p$  上での 2 次代数です. つまり  $1, x, x^2$  が 1 次従属であり, つまり  $xx - (x + \bar{x})x + \bar{x}x = 0$  となります. 又合成代数の性質  $\|xy\| = \|x\| \|y\|$  も成立します. しかしここで  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x\bar{x} \in \mathbf{Z}_p$  です. つまり  $\langle xy, xy \rangle = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ ,  $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  です.

これらの準備のもとで, 以下の議論の為に

$$M_2(p, q, r) := \left\{ \begin{pmatrix} m & nq + l \\ n + lr & m \end{pmatrix} \mid m, n, l \in \mathbf{Z}_p \right\}$$

$$GL(M_2(p, q, r)) := \{A \in M_2(p, q, r) \mid \det A \neq 0\},$$

$$SL(M_2(p, q, r)) := \{A \in M_2(p, q, r) \mid \det A = 1\},$$

$$N(p, q, r) := \{x \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] \mid \|x\| = 1\}$$

なる記号を導入し, 用いることにします.

**定理 1** (行列式とノルムの関係) 上記の記号のもとで

$$\phi: \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] \rightarrow M_2(p, q, r) \text{ (as algebra, } \phi \text{ is a homomorphism)}$$

$$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]^\times \cong GL(M_2(p, q, r)) \text{ (as group)}$$

$$N(p, q, r) \cong SL(M_2(p, q, r)) \text{ (as group)}$$

が成り立つ.

$$\text{証明 } x = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r} \text{ と } A = \begin{pmatrix} m & nq + l \\ n + lr & m \end{pmatrix} \text{ が } \mathbf{Z}_p \text{ 上準同型, そして}$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = m^2 - n^2q - l^2r - 2nl = \det A$$

が成り立つので,  $\|x\| = 1$  と  $\det A = 1$  の同値性が示せます. 勿論  $\langle x, x \rangle \geq 0$  の為に, 標数  $p$  で考え, well-defined は仮定します.  $\square$

**Remark.**  $\exists (n, l) \in \mathbf{Z}_p \times \mathbf{Z}_p$ , s.t.  $nq + l \equiv 0 \pmod{p}$  and  $n + lr \equiv 0 \pmod{p}$  が  $\text{Ker } \phi$  の元を生成します ( $m = 0$  のとき).  $nq + l$  と  $(nq + l)r$  より  $\dim \text{Ker } \phi = 1$ .

**Remark.**  $SL(M_2(p, q, r)) \triangleleft GL(M_2(p, q, r))$ . (正規部分群)

$$\tilde{Q}(N(p, q, r)) := \{\lambda \in N(p, q, r) | \lambda\lambda = \bar{\lambda}, \lambda \text{ is invertible}\},$$

と  $\tilde{Q}(N(p, q, r))$  を定義します (weak quandle の原型です).

$$x * y = \overline{xy}$$

によって new product を導入すると, この積  $*$  で  $\lambda\lambda = \bar{\lambda}$  は  $\lambda * \lambda = \lambda$  と表せます.

**Remark**  $(\sqrt{\langle \lambda, \lambda \rangle})^2 = \|\lambda\|^2 = \lambda\bar{\lambda}$  なので  $\tilde{Q}(N(p, q, r)) \ni \lambda$  が invertible iff  $\|\lambda\| \neq 0$ .  
つまり  $\lambda \frac{\bar{\lambda}}{\langle \lambda, \lambda \rangle} = 1$  if  $\langle \lambda, \lambda \rangle \neq 0$  より  $\lambda$  は invertible です. 更に  $\lambda^2 = \bar{\lambda}$  より  $\|\lambda^2\| = \|\lambda\|$  かつ  $\|\lambda\| \neq 0$  ならば,  $\|xy\| = \|x\| \|y\|$  が  $\forall x, y \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  で成り立つので,  $\|\lambda\|^2 = \|\lambda\| \|\lambda\|$  から  $\|\lambda\|^2 = \|\lambda\|$  より  $\|\lambda\| \neq 0$  のとき,  $\|\lambda\| = 1$ . これらより,  $\lambda$  が invertible, かつ  $\lambda^2 = \bar{\lambda}$  のとき, ノルム 1 の元で,  $\tilde{Q}(N(p, q, r))$  を考えることが可能です. ここで,  $\lambda$  が 0 でなくても  $\|\lambda\| = 0$  となるノルム 0 の元  $\lambda$  が存在することに留意して下さい (内積  $\langle, \rangle$  が非退化とは限りません). 単位元も存在しません ( $1 * x = \bar{x}$ ). つまり, 次の集合が定義可能です.

$$\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]) := \{\lambda \in \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}] | \lambda * \lambda = \lambda, \lambda : \text{invertible}\}.$$

これを  $\tilde{Q}$  と略して weak quandle と呼ぶ. 一般にこれは  $*$  の乗法で閉じていません.

次に  $Q_\lambda := \{\lambda \in \tilde{Q} | 1, \lambda, \bar{\lambda}\}$  と  $Q_\lambda$  を定義する. ただし  $Q_\lambda$  の  $\lambda$  は 1 つ固定する. 以上の記号のもとで, 次の事が成り立つ.

**定理 2.** (カンドルの構成)  $Q_\lambda$  は quandle であり,  $\tilde{Q} = \cup_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda$  (つまり  $(\lambda * \lambda = \lambda)$  を満たす  $\lambda$  により定義される  $Q_\lambda$  達の和集合) が成り立つ. 勿論,  $\cap_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda = \{1\}$  (共通集合は 1 のみです).

(証明)  $Q_\lambda \ni \forall \lambda$  に対して

$$\lambda * \lambda = \lambda, \bar{\lambda} * \bar{\lambda} = \bar{\lambda}, 1 * 1 = 1, \lambda * (\lambda * \lambda) = (\lambda * \lambda) * (\lambda * \lambda),$$

and

$$\bar{\lambda} * (\lambda * \lambda) = (\bar{\lambda} * \lambda) * (\bar{\lambda} * \lambda), 1 * (\lambda * \lambda) = (1 * \lambda) * (1 * \lambda)$$

これらの関係式より  $1, \lambda, \bar{\lambda}$  のそれぞれが, カンドルの性質 3) と 4) を満たすことを示せばよいのです. そして  $\tilde{Q}$  は  $\lambda * \lambda = \lambda$  なる  $\lambda$  の元より, この様な  $\lambda$  は standard 積では  $\lambda\lambda = \bar{\lambda}$  となり,  $\|\lambda\| = 1$  を用いて  $\lambda\bar{\lambda} = 1$  ( $\bar{\lambda} = \lambda\lambda$ ) から  $\lambda\lambda\lambda = 1$  です. この  $\lambda$  は  $Q_\lambda$  の元です.  $\square$

**Remark.**  $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}], *)$  の任意の元  $x$  は

$$x * x - (x + \bar{x}) * x + x * \bar{x} = 0$$

を満たします (para quadratic algebra と呼びます).  $1 * x = \bar{x}$  (para unit).

これは単位元をもたない 2 次代数を変形した代数  $(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}], *)$  で特に  $(\tilde{Q}(N(p, q, r)), *)$  の乗法  $*$  は非結合的 (nonassociative) です. つまり  $(x * y) * z \neq x * (y * z)$  となり, standard product の記号で表すと,  $\overline{(xy)}z \neq x\overline{(yz)}$  を意味するので, 非結合的乗法  $*$  を持つ代数系です (ここで  $-$  は共役です. しかし  $x * (y * x) = (x * y) * x = \langle x, x \rangle y$  を満たします). quasi symmetric composition algebra の導入です.

以上よりこの様な代数系が weak カンドルの例になると考えます. { ノルム 1 かつ巾等元 (idenpotent) が weak quandle (弱い) カンドルを生成します }.  $1 * 1 = 1$  ですが  $1 * \lambda = \bar{\lambda}$  です.  $\tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, [\sqrt{r}]])$  の  $\forall x, y$  に対して一般に  $x * y \in \tilde{Q}(\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}])$  とは限りません. しかし  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$  が体のときは  $\tilde{Q} = Q_\lambda$  です.

### §3.Examples (実例について)

$\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  において, 特に素数  $p$  が小さい時の weak quandle の例を以下に列挙します.

$\cdot \mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}]; \quad \lambda * \lambda = \lambda$  の元 (勿論  $\lambda \neq 0$ ).

$(m, n, l) : \lambda = m + n\sqrt{q} + l\sqrt{r}$  とおく.

$$\begin{array}{lll} (1, 0, 0) & (2, 0, 1), & (2, 0, 4). \\ (2, 1, 2), & (2, 1, 4), & (2, 2, 0), \\ (2, 2, 2) & (2, 3, 0), & (2, 3, 3) \\ (2, 4, 1) & (2, 4, 3) \end{array}$$

これらは 11 個存在します.  $\lambda = 2 + \sqrt{3}$  ならば  $\bar{\lambda} = 2 + 4\sqrt{3}$  です.

$\cdot$  standard product においては  $\lambda\lambda = \bar{\lambda}$  を満たします. 従って  $\mathbf{Z}_5[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$  においては, weak quandle  $\tilde{Q}$  を具体的に求められます.

$$\begin{array}{ll} \lambda = 2 + \sqrt{3} \text{ のとき} & Q_\lambda = \{1, \lambda, \bar{\lambda}\} \\ \mu = 2 + 2\sqrt{2} \text{ のとき} & Q_\mu = \{1, \mu, \bar{\mu}\} \\ \nu = 2 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \text{ のとき} & Q_\nu = \{1, \nu, \bar{\nu}\} \\ \kappa = 2 + \sqrt{2} + 4\sqrt{3} \text{ のとき} & Q_\kappa = \{1, \kappa, \bar{\kappa}\} \\ \xi = 2 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} \text{ のとき} & Q_\xi = \{1, \xi, \bar{\xi}\}. \end{array}$$

これらの 5 個の  $Q_\lambda, Q_\mu, Q_\nu, Q_\kappa, Q_\xi$  がそれぞれ quandle であり, weak quandle  $\tilde{Q}$  は  $\tilde{Q} = Q_\lambda \cup Q_\mu \cup Q_\nu \cup Q_\kappa \cup Q_\xi$  ( $\tilde{Q}$  は 11 個の要素の集合), そして  $\cap_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda = \{1\}$  (共通集合は 1 のみ) です.  $(2 + \sqrt{3}) * (2 + 2\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} \notin \tilde{Q}$ .  $\tilde{Q}$  は閉じていません.

$\|\lambda\| = 1$  の元の個数は 30 個.  $\kappa^6 = 1$  と  $\mu^5 = 1$  の元の積が  $\lambda$  の元です.

$\cdot \mathbf{Z}_{11}[\sqrt{7}, \sqrt{8}]; \quad \lambda * \lambda = \lambda$  の元.

$(m, n, l) :$

(1,0,0), (5,0,5), (5,0,6) (5,1,9),  
 (5,1,10) (5,2,2), (5,2,3), (5,3,6),  
 (5,3,7), (5,4,0), (5,4,10), (5,5,3),  
 (5,5,4), (5,6,7), (5,6,8), (5,7,0)  
 (5,7,1), (5,8,4), (5,8,5), (5,9,8)  
 (5,9,9), (5,10,1), (5,10,2)

これらは 23 個存在します。  $\tilde{Q}$  は 11 個のカンドルの和集合です。  $\tilde{Q}$  の元の個数は 23 個です。

$\|\lambda\|=1$  の元の個数は 132 個。  $\kappa^{12}=1$  と  $\mu^{11}=1$  の元の積が  $\lambda$  の元です。

$\cdot \mathbf{Z}_{17}[\sqrt{5}, \sqrt{7}]; \quad \lambda * \lambda = \lambda$  の元。

$(m, n, l):$

(1,0,0), (8,0,3), (8,0,14),  
 (8,1,9), (8,1,15), (8,2,4),  
 (8,2,10), (8,3,5), (8,3,16),  
 (8,4,0), (8,4,11), (8,5,6),  
 (8,5,12), (8,6,1), (8,6,7),  
 (8,7,2), (8,7,13), (8,8,8),  
 (8,8,14), (8,9,3), (8,9,9),  
 (8,10,4), (8,10,15), (8,11,10),  
 (8,11,16), (8,12,5), (8,12,11),  
 (8,13,0), (8,13,6), (8,14,1),  
 (8,14,12), (8,15,7), (8,15,13),  
 (8,16,2), (8,16,8)

これらは 35 個存在します。  $\tilde{Q}$  は 17 個のカンドル  $Q_\lambda$  の和集合です。  $\tilde{Q}$  の元の個数は 35 個です。

$\|\lambda\|=1$  の元の個数は 306 個。  $\kappa^{18}=1$  と  $\mu^{17}=1$  の元の積が  $\lambda$  の元です。

**Remark**  $\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{7}, \sqrt{11}]$  においては,  $2 \times 19 + 1$  個の  $\lambda * \lambda = \lambda$  なる元が存在します。そして  $\|\lambda\|=1$  の元の個数が  $18 \times 19$  個です。  $\mathbf{Z}_{19}[\sqrt{3}, \sqrt{13}]$  のときは  $\lambda * \lambda = \lambda$  なる元は  $\lambda = 1$  の 1 個。  $\|\lambda\|=1$  の元は  $19 \times 20$  個です。

**Remark**  $\mathbf{Z}_7[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$  においては  $\|\lambda\|=1$  の元は 56 個ですが,  $\lambda * \lambda = \lambda$  の元は 1 個です。  $p, q, r$  の値によって  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  は, weak カンドルの個数が異なります。

**Remark** 上記の方法で,  $2p+1$  個の元をもつ weak カンドルが構成できると思います。

**Remark**  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  の  $p, q, r$  の選び方により,  $\lambda * \lambda = \lambda$  の元は 1 個の場合も存在します。しかし  $\|\lambda\|=1$  の元は,  $p(p+1)$  又は  $p(p-1)$  の様です (予想)。

**Remark**  $\mathbf{Z}_3[\sqrt{2}], \mathbf{Z}_5[\sqrt{2}]$  等における  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$   $0 < q < p$  が体のとき,  $\lambda * \lambda = \lambda$  なる元は多くても 3 個です。  $\tilde{Q} = Q_\lambda = \{1, \lambda, \bar{\lambda}\}$  です。従って例としては興味が持てません。

しかし少しだけ述べますと、2 次代数  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}](p \neq 2)$  については

(a)  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$  が体  $\iff$  ノルム 1 の元の個数が  $p+1$  個

(b)  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$  が体でない  $\iff$  ノルム 1 の元の個数が  $p-1$  個

a) のとき、 $p+1$  が 3 の倍数ならば、 $\lambda\lambda = \bar{\lambda}$  の元  $\lambda \neq 1$  が存在する。

b) のとき、 $p-1$  が 3 の倍数ならば、 $\lambda\lambda = \bar{\lambda}$  の元  $\lambda \neq 1$  が存在する。そして  $\text{Aut}_* \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}] \cong S_3$  (if  $\exists \lambda \neq 1, \lambda * \lambda = \lambda$ )。それ以外は  $\mathbf{Z}_2$  です。ただし  $x * y = \overline{xy}$  の積のもとです。

以上の  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$  の結果は unpublished paper (in preprint [2017]) ですが、解明しました (Tsukuba Univ. の A.Masuoka 氏との共同研究)。ここに記録の為に記しておきます。

**Remark**  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}](qr \equiv 1 \pmod{p})$  における  $\lambda * \lambda = \lambda$  の元の性質と  $\|\lambda\| = 1$  なる元の個数についても、予想が可能です。 $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}]$  と  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{r}]$  が両方とも体でないことが、 $p(p-1)$  個である必要十分条件です (予想です)。

#### §4. Generalizations (一般化について)

前章までに  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  における weak quandle の例を述べましたが、そこでの idea は、次の様に一般化できると考えます。

$A$  を associative, commutative involutive  $(\overline{xy} = \bar{y} \bar{x})$  algebra とする。ここで  $x * y = \overline{xy}$  で new product を定義する。 $A$  はベクトル空間としては同じですが、代数構造が異なる  $xy$  と  $x * y$  の積が存在します。

$$\tilde{Q}(A) := \{x \in A \mid x * x = x, x \text{ is invertible}\}, Q(A) = \{\lambda \in \tilde{Q}(A) \mid \lambda = \mu * \kappa, \forall \mu, \kappa \in \tilde{Q}(A)\}$$

と定義すると、 $(\lambda * \mu) * (\lambda * \kappa) = \lambda * (\mu * \kappa)$ ,  $\mu * \kappa \in Q(A)$  が成り立つので、 $\tilde{Q}(A)$  は weak quandle の構造を持ちます。ただし、 $x * y$  は非結合的な乗法  $*$  を持つ代数系、そして乗法の単位元を持たない、つまり  $1 * x = \bar{x}$  です。この様な  $\tilde{Q}(A)$  と  $Q(A)$  を研究するのも、将来への課題です (巾等元の構造を調べる)。特に代数系  $(x * y) * x = x * (y * x) = \langle x, x \rangle y$  を考える (quasi symmetric composition alg. の研究)。

#### §5. Conclusions and References (あとがきと文献)

この小論では予備知識をほとんど仮定しませんので、参考文献は多くは挙げません。ここで述べた  $\mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  等の 2 次代数は、symmetric composition algebra の variation (ある種の一般化) です。内積  $\langle, \rangle$  が非退化でない場合で考えています。

symmetric composition algebra の性質、つまり  $\|xy\| = \|x\| \|y\|$  なる関係式を満たす代数系と、自己同型群の拡張の三対原理 (triality of groups and algebras) については、次の文献が役に立つと思います。

[K-O]; N.Kamiya and S.Okubo, Algebras and groups satisfying triality relations, Monograph (Book), Aizu Univ., (2015).

又、次の文献も quandles の応用としてヤング・バクスター方程式との関連で、役に立つと思いますので挙げておきます。

[K-S.1]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps associated with homogeneous presystems, J.Gen. Lie theory, (2011) Art ID,G110116.

[K-S.2]; N.Kamiya and Y.Shibukawa, Dynamical Yang-Baxter maps and weak Hopf algebras with quandles, Proc.the Meeting for Study of Number Theory, Hopf Algebras and related topics, to appear, (Yokohama Publisher) 収録論文.

特に [K-S.2] はカンドルとヤング・バクスター方程式, そしてホップ代数が関係することを特徴づける論文です.

何故このようなことを考えたのかの motivation の理由を簡単に述べます.

複素数  $(\mathbf{C}, *)$ ,  $(x * y = \overline{xy})$  において考える. つまり new product  $x * y$  を定義する

$$Q(\mathbf{C}, *) = \{\lambda | \lambda * \lambda = \lambda\} = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, 1 \right\}$$

と置くと, これは quandle の例であり, そして weak quandle の例でもあります.

一般に  $A$  を共役元を持つある代数系として

$$\tilde{Q}(A) = \{\lambda \in A | \lambda * \lambda = \lambda, \lambda \text{ is invertible}\}$$

と置くとき, この  $\tilde{Q}$  は一般に  $*$  で閉じていません. しかし  $Q_\mu(A) = \{\mu \in \tilde{Q} | 1, \mu, \bar{\mu}\}$ , ただし  $\bar{\mu}$  は  $\mu$  の共役元と置くと, この  $Q_\mu$  はカンドルの例です.  $\tilde{Q}(A) = \cup_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda$  (和集合) が成り立ち, そして  $\cap_{\lambda * \lambda = \lambda} Q_\lambda = \{1\}$  (共通集合は  $\{1\}$  のみ) です. これらの自己同型群とその一般化の三対群を研究したいのです (triality relations の研究です).  $\mathbf{Z}_p$  上の 4 元数, 8 元数については結果が出来つつありますので, 別の機会に述べたいと思います.

繰り返しになる部分もありますが, この小論の  $\mathbf{Z}[\sqrt{q}], \mathbf{Z}_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$  を一般化したものを考察すると, 種々の 2 次代数ではないが, その変形である para unit ( $1 * x = \bar{x}$ ) を持つ quasi symmetric composition algebra と呼ぶべき概念が導入できます. 例えば para quadratic algebra 等. 将来の研究課題です. 我田引水ですが, (初等) 数理代数学の夜明けです. 数理論理学における Gell-Mann の pseudo octonion algebra の標数  $p$  版を研究することが目標です. 代数学と物理学の融合した研究分野だと考えています.

$$\boxed{\text{非結合的代数}} + \boxed{\text{計算機科学}} = \boxed{\text{他分野への応用}}$$

初期段階として, この様なスキームを夢見ながら記述させていただきました (計算機科学の応用). 更なる夢見として

$$\boxed{\text{数理科学}} + \boxed{\text{代数学}} = \boxed{\text{数理代数学}}$$

なる未来の研究方向を目指しています.

最後に, 堀田修功君 (神奈川大学理学部情報科学科大学院生 (2018 年当時)) に計算機科学により, recheck をして頂いたことに感謝の意を表したいと思います.

**Acknowledgement;** This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, a Joint Usage/Research Center located Kyoto University.

**Current address;** Noriaki Kamiya, e-mail; shigekamiya@outlook.jp  
CHIGASAKI CITY, CHIGASAKI 1-2-47-201 JAPAN, 253-0041

追記 by N.Kamiya ( $\|\lambda\|=1$  in  $Z_p[\sqrt{q}, \sqrt{r}]$ )

$p=5, q=2, r=3$  のとき,

$(m, n, l) =$

(1,0,0), (1,1,3), (1,2,1), (1,3,4), (1,4,2), (2,0,1), (2,0,4), (2,1,2),  
 (2,1,4), (2,2,0), (2,2,2), (2,3,0), (2,3,3), (2,4,1), (2,4,3), (3,0,1),  
 (3,0,4), (3,1,2), (3,1,4), (3,2,0), (3,2,2), (3,3,0), (3,3,3), (3,4,1),  
 (3,4,3), (4,0,0), (4,1,3), (4,2,1), (4,3,4), (4,4,2)

全部で 30 個.

$p=7, q=3, r=5$  のとき,

$(m, n, l) =$

(0,0,2), (0,0,5), (0,1,2), (0,1,6), (0,2,3), (0,2,6), (0,3,0), (0,3,3),  
 (0,4,0), (0,4,4), (0,5,1), (0,5,4), (0,6,1), (0,6,5), (1,0,0), (1,1,4),  
 (1,2,1), (1,3,5), (1,4,2), (1,5,6), (1,6,3), (2,0,3), (2,0,4), (2,1,0),  
 (2,1,1), (2,2,4), (2,2,5), (2,3,1), (2,3,2), (2,4,5), (2,4,6), (2,5,2),  
 (2,5,3), (2,6,0), (2,6,6), (5,0,3), (5,0,4), (5,1,0), (5,1,1), (5,2,4),  
 (5,2,5), (5,3,1), (5,3,2), (5,4,5), (5,4,6), (5,5,2), (5,5,3), (5,6,0),  
 (5,6,6), (6,0,0), (6,1,4), (6,2,1), (6,3,5), (6,4,2), (6,5,6), (6,6,3)

全部で 56 個.

$p=11, q=7, r=8$  のとき,

$(m, n, l) =$

(0,0,2), (0,0,9), (0,1,2), (0,1,6), (0,2,6), (0,2,10), (0,3,3), (0,3,10),  
 (0,4,3), (0,4,7), (0,5,0), (0,5,7), (0,6,0), (0,6,4), (0,7,4), (0,7,8),  
 (0,8,1), (0,8,8), (0,9,1), (0,9,5), (0,10,5), (0,10,9), (1,0,0), (1,1,4),  
 (1,2,8), (1,3,1), (1,4,5), (1,5,9), (1,6,2), (1,7,6), (1,8,10), (1,9,3),  
 (1,10,7), (3,0,1), (3,0,10), (3,1,3), (3,1,5), (3,2,7), (3,2,9), (3,3,0),  
 (3,3,2), (3,4,4), (3,4,6), (3,5,8), (3,5,10), (3,6,1), (3,6,3), (3,7,5),  
 (3,7,7), (3,8,0), (3,8,9), (3,9,2), (3,9,4), (3,10,6), (3,10,8), (5,0,5),  
 (5,0,6), (5,1,9), (5,1,10), (5,2,2), (5,2,3), (5,3,6), (5,3,7), (5,4,0),  
 (5,4,10), (5,5,3), (5,5,4), (5,6,7), (5,6,8), (5,7,0), (5,7,1), (5,8,4),  
 (5,8,5), (5,9,8), (5,9,9), (5,10,1), (5,10,2), (6,0,5), (6,0,6), (6,1,9),  
 (6,1,10), (6,2,2), (6,2,3), (6,3,6), (6,3,7), (6,4,0), (6,4,10), (6,5,3),  
 (6,5,4), (6,6,7), (6,6,8), (6,7,0), (6,7,1), (6,8,4), (6,8,5), (6,9,8),  
 (6,9,9), (6,10,1), (6,10,2), (8,0,1), (8,0,10), (8,1,3), (8,1,5), (8,2,7),  
 (8,2,9), (8,3,0), (8,3,2), (8,4,4), (8,4,6), (8,5,8), (8,5,10), (8,6,1),  
 (8,6,3), (8,7,5), (8,7,7), (8,8,0), (8,8,9), (8,9,2), (8,9,4), (8,10,6),  
 (8,10,8), (10,0,0), (10,1,4), (10,2,8), (10,3,1), (10,4,5), (10,5,9), (10,6,2),  
 (10,7,6), (10,8,10), (10,9,3), (10,10,7)

全部で 132 個.