

階乗級数とその応用

京大 数研 河野實彦

1. 微分方程式系

階乗級数の応用例として、常微分方程式や差分方程式の解の、階乗級数による展開がある。特に、差分方程式においては、常微分方程式における巾級数と同じ役割をし、解の行動を調べるのに用いられて来た。常微分方程式においては、解の行動を調べるのには、巾級数が多く用いられ、例えば、不確定特異点近傍の解の行動の研究においては、発散巾級数による解の漸近表示の研究が、主であった。これは、不確定特異点近傍においては、一般に、解の存在は言えても、確定特異点近傍の解と同じように、収束する巾級数によって、解を展開する事が出来なからである。ところが、階乗級数を用いれば、不確定特異点近傍の解も、展開表示する事が出来る。この事を簡単な微分方程式系を用いて、説明する。

次の、原点に確定特異点、無限大に、rank 1 の不確定特異点を持つ、微分方程式系を考える。

$$(1) \quad \frac{dX}{dt} = \left(B + \frac{A}{t} \right) X$$

ここで、 A, B は $n \times n$ -行列で、 B は特に

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

で、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ は、0 でない相異なる数と考える。

この微分方程式系は、不確定特異点近傍で、次の形式解を持つ。

$$(2) \quad X^k(t) \simeq e^{\lambda_k t} t^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) t^{-s}$$

いま、 $X^k(t) = e^{\lambda_k t} Y^k(t)$ とおくと、微分方程式系(1)は

$$(3) \quad \frac{dY^k}{dt} = \left(B - \lambda_k I + \frac{A}{t} \right) Y^k$$

となり、 $Y^k(t) = t^{a_{kk}} \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) t^{-s}$ を代入してみると、係数 $H^k(s)$ は

$$(4) \quad \begin{cases} (a_{kk} - s - A) H^k(s) = (B - \lambda_k I) H^k(s+1) \\ (B - \lambda_k I) H^k(0) = 0 \end{cases}$$

を満足す。

更に, $Y^k(t) = t^{-\beta} Z^k(t)$ の変換により, 微分方程式系 (3) は

$$(5) \quad \frac{dZ^k}{dt} = \left(B - \lambda_k I + \frac{A + qI}{t} \right) Z^k$$

と変換されるので, A の対角要素 a_{kk} の実部は任意の正の値と考えることもよい。

2. Laplace 変換

さて, 微分方程式系 (3) を満たす様な, Laplace 積分

$$(6) \quad Y^k(t) = \int_0^\infty W^k(x) e^{-tx} dx$$

を考える。積分路として, $x=0$ から, 無限大に向かう直線 $\arg x = \omega$ を送り, この上には $\lambda_j - \lambda_k$ ($j \neq k$) の点を含まないようにする。

この直線に沿って, x が無限大に行くと

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-tx} \int_0^x W^k(x) dx = 0$$

なる仮定の下に, Laplace 積分 (6) を, 微分方程式系 (3) に代入する事によって, $W^k(x)$ は下の積分方程式を満たさなければならぬ。

$$(8) \quad (x + B - \lambda_k) W^k(x) = -A \int_0^x W^k(x) dx$$

この両辺を微分すれば

$$(9) \quad (x + B - \lambda_k) \frac{dW^k}{dx} = (-A - I) W^k$$

を得る。

と置く。Laplace 積分 $\gamma^k(t)$ として、漸近級数

$$(10) \quad \gamma^k(t) \cong \sum_{s=0}^{\infty} H^k(s) t^{-s+a_{kk}}$$

を接するものとする。 $W^k(x)$ としては、次の Borel 函数とすればよい。

$$(11) \quad W^k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-a_{kk}) H^k(s)}{\Gamma(s-a_{kk})} x^{s-a_{kk}-1}$$

実際、この函数は微分方程式系(9)を形式的に満足してゐる。

$$\begin{aligned} & x \frac{dW^k}{dx} + (B - \lambda_k) \frac{dW^k}{dx} + (A + I) W^k \\ &= \Gamma(-a_{kk}) \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H^k(s)}{\Gamma(s-a_{kk})} x^{s-a_{kk}-1} + (B - \lambda_k) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H^k(s)}{\Gamma(s-a_{kk}-1)} x^{s-a_{kk}-1} \right. \\ & \quad \left. + (A + I) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{H^k(s)}{\Gamma(s-a_{kk})} x^{s-a_{kk}-1} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \Gamma(-a_{kk}) \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{(s-a_{kk}+A)H^k(s) + (B-\lambda_k)H^k(s+1)}{\Gamma(s-a_{kk})} \right] \lambda^{s-a_{kk}-1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

と $n=3$ が，形式解の係数 $H^k(s)$ を差分式 (4) を使って評価すれば，

$$(12) \quad \|H^k(s)\| \leq \frac{\|H^k(0)\|}{|\lambda - \lambda_k|^s} \frac{\Gamma(s + \|A\| + |a_{kk}|)}{\Gamma(\|A\| + |a_{kk}|)}$$

となるので， $W^k(x)$ の右辺は， $|x| \leq |\lambda - \lambda_k| = \min_{j \neq k} |\lambda_j - \lambda_k| > 0$ まで収束することがわかる。よって， $W^k(x)$ は，微分方程式系 (9) の，原点（確定特異点）近傍の一つの特殊解である。

さて，ここで $W^k(x)$ が exponential type 函数であることを示そう。即ち， G を充分大きい正の数とし， $\rho_k(>1)$ を ω に関係して決まる正の数とすれば

$$(13) \quad |W^k(x)| < G e^{\rho_k |x|}$$

が成立つ。実際，積分方程式 (8) を componentwise に書いて

$$(14) \quad (x + \lambda_k - \lambda_k) W_i^k(x) = - \sum_{j=1}^n a_{ij} \int_0^x W_j^k(x) dx$$

ある扇形領域 S の, $|x| \leq R$ なる部分では, $|w_{i'}^k(x)| < G e^{h|x|}$ が成立つが, $|x| > R$ で, ある ω' に対して上の不等式が成立しないと仮定する。この時の $|x|$ の下界を R' とすると, $i=i'$, $\omega = \omega'$ において $|w_{i'}^k(x)| = G e^{h|x|}$ となる。

一方, $|x| \leq R'$ においては $|w_j^k(x)| \leq G e^{h|x|}$ であるので, 上式 (14) より, $|x| = R'$, $i=i'$, $\omega = \omega'$ に対して

$$\begin{aligned} |x + \lambda_i - \lambda_k| |w_{i'}^k(x)| &\leq \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \int_0^{|x|} |w_j^k(x)| d|x| \\ &\leq \|A\| \int_0^{|x|} G e^{h|x|} d|x| \\ &\leq \frac{\|A\|}{h} G e^{h|x|} \end{aligned}$$

$$|w_{i'}^k(x)| = G e^{h|x|} \leq \frac{\|A\| G e^{h|x|}}{|x + \lambda_i - \lambda_k| h}$$

$$1 \leq \frac{\|A\|}{|x + \lambda_i - \lambda_k| h}$$

最後の式の右辺は $x=\infty$ のとき 0 に収束し, R を充分大きい値とすれば 1 より小さくなり, 矛盾する。よって, $w_{i'}^k(x)$, 即ち $w^k(x)$ は exponential type 函数である事がわかった。この事より, 次の定理が成立つ。

定理 Laplace 積分 (6) は 半平面 $\operatorname{Re}(te^{i\omega}) > h$ に
おいて 微分方程式系 (3) の解を表わす。

3. 階乗級数展開

Laplace 積分 (6) の階乗級数展開について説明しよう。

そのために、先づ、変数変換 $x = -\frac{1}{\lambda} \log z$, $z = e^{-\lambda x}$ を
行なう。 $z = z^*$, $\lambda = \gamma e^{-i\omega}$ として、絶対値 γ は適当に大き
く選ぶ。 即ち、 z -平面上の円 $|z-1| = 1$ の内部は、
 x -平面上のある領域 G に移され、 γ を大きくとれば、
領域 G は半直線 $\arg \lambda = \omega$ の近くの狭い扇形領域となり、
中に入るように出て、内部と境界上に、特異点 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$
を含みなり様にする事が出来る。

その時、

$$(15) \quad V^k(z) = W^k(-\frac{1}{\lambda} \log z) = \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) (1-z)^{m-a_m-1}$$

は、 $|z-1| < 1$ として収束し、円周上での特異性は $\lambda = \infty$ に対
応する $z = 0$ のみである。 $z = z^*$ とし、

$$|x| = \frac{1}{\gamma} |\log z| < -\frac{1}{\gamma} \log |z| (1+\varepsilon)$$

より、 $z = 0$ における $V^k(z)$ の特異性 (Hadamard の order)

は、 $W^k(x)$ に対する評価式 (13) より、

$$(16) \quad |V^k(z)| < C e^{-\frac{h}{r} \log |z| (1+\varepsilon)} = C |z|^{-\frac{h}{r} (1+\varepsilon)}$$

を得る。この事は、 $V^k(z)$ の円周 $|z|=1$ 上での order が、高々 $\frac{h}{r}$ 以下である事を示し、充分大きい m に対して

$$(17) \quad |B^k(m)| < m^{\frac{h}{r} - 1 + \varepsilon}$$

が成立つ。

さて、ここで、次の級数が収束する事を示そう。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} |B^k(m)| \int_0^1 |(1-z)^{m-a_{kk}-1} z^{\frac{1}{r}-1}| dz \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} |B^k(m)| \int_0^1 (1-z)^{-\operatorname{Re}(a_{kk})+m-1} z^{\operatorname{Re}(\frac{1}{r})-1} dz \\ &= \Gamma(\operatorname{Re}(\frac{1}{r})) \sum_{m=0}^{\infty} |B^k(m)| \frac{\Gamma(m - \operatorname{Re}(a_{kk}))}{\Gamma(\operatorname{Re}(\frac{1}{r}) + m - \operatorname{Re}(a_{kk}))} \end{aligned}$$

となり、充分大きい m に対して

$$\begin{aligned} |B^k(m)| \left| \frac{\Gamma(m - \operatorname{Re}(a_{kk}))}{\Gamma(m + \operatorname{Re}(\frac{1}{r}) - \operatorname{Re}(a_{kk}))} \right| &< m^{\frac{h}{r} - 1 + \varepsilon - \operatorname{Re}(\frac{1}{r})} \\ &= m^{-\frac{1}{r} (\operatorname{Re}(te^{i\omega}) - h) - 1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

となり、 $\operatorname{Re}(te^{i\omega}) > h + 2\varepsilon r$ 、即ち、 ε は任意の小さい数であらう、 $\operatorname{Re}(te^{i\omega}) > h$ に対して、上の級数は収束する事

がわかった。この事実から、巾級数 (15) を Laplace 積分 (6) に代入して、項別積分する事が許される。

$$\begin{aligned}
 (18) \quad Y^k(t) &= \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) (1-z)^{m-a_{kk}-1} z^{\frac{t}{\lambda}-1} dz \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) \int_0^1 (1-z)^{m-a_{kk}-1} z^{\frac{t}{\lambda}-1} dz \\
 &= \frac{1}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) \frac{\Gamma(m-a_{kk}) \Gamma(\frac{t}{\lambda})}{\Gamma(\frac{t}{\lambda}+m-a_{kk})} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(\frac{t}{\lambda}) \Gamma(-a_{kk})}{\Gamma(\frac{t}{\lambda}-a_{kk})} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) \frac{(m-1-a_{kk})(m-2-a_{kk}) \cdots (-a_{kk})}{(\frac{t}{\lambda}+m-1-a_{kk}) \cdots (\frac{t}{\lambda}-a_{kk})}
 \end{aligned}$$

この右辺は、半平面 $\operatorname{Re}(te^{i\theta}) > h$ で絶対収束する。

4. ニュートン級数展開

もう一つの級数展開と、先の階乗級数展開との関連について述べてよう。いま、 $s > \frac{h}{\rho} - 1$ なる数 s を選んで、Laplace 積分 (6) を次の形に書き直す。

$$(19) \quad Y^k(t) = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 V^k(z) z^s z^{\frac{t}{\lambda}-s-1} dz$$

$|1-z| < 1$ に対して

$$z^{\frac{t}{\lambda}-s-1} = (1-(1-z))^{\frac{t}{\lambda}-s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{t}{\lambda}-s-1}{n} (1-z)^n$$

が成立つから、これ互上に代入して、形式的に項別積分すれば、

$$(20) \quad Y^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C^k(n) \binom{\frac{x}{k}-s-1}{n}$$

$$(21) \quad C^k(n) = \frac{(-1)^n}{x} \int_0^1 V^k(z) z^s (1-z)^n dz$$

を得る。こゝで、項別積分の正当性と、ニュートン級数(20)の収束性の証明には、評価式(16)を使つて、

$$\begin{aligned} |C^k(n)| &< \frac{C}{x} \int_0^1 z^{s-\frac{k}{x}-\delta} (1-z)^n dz \quad \left(\delta = \frac{k}{x} \varepsilon \right) \\ &= \frac{C}{x} \frac{\Gamma(s+1-\frac{k}{x}-\delta) \Gamma(n+1)}{\Gamma(s+n+2-\frac{k}{x}-\delta)} \end{aligned}$$

$$\binom{\frac{x}{k}-s-1}{n} = \frac{(\frac{x}{k}-s-1) \cdots (\frac{x}{k}-s-n)}{n!} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-\frac{x}{k}+s+1)}{\Gamma(s+1-\frac{x}{k}) \Gamma(n+1)}$$

$(\frac{x}{k}-s-1) \neq \text{non negative integer}$ と仮定すれば、

$$\left| C^k(n) \binom{\frac{x}{k}-s-1}{n} \right| < \frac{C}{x} \left| \frac{\Gamma(s+1-\frac{k}{x}-\delta)}{\Gamma(s+1-\frac{x}{k})} \right| n^{-\operatorname{Re}(\frac{x}{k})+\frac{k}{x}-1+\delta}$$

より、半平面 $\operatorname{Re}(te^{i\omega}) > k$ 上、ニュートン級数(20)は収束する事がわかる。

同様の考え方で、関係式 (21) に $V^k(z)$ の巾級数 (15) を代入し、項別積分すれば、ニュートン級数の係数 $C^k(n)$ と階乗級数の係数 $B^k(m)$ の間に次の様な関係式が成立する。

$$C^k(n) = \frac{(-1)^n}{\lambda} \int_0^1 \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) (1-z)^{n-a_{kk}-1} z^s (1-z)^n dz$$

$$= \frac{(-1)^n}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) \int_0^1 z^s (1-z)^{m+n-a_{kk}-1} dz$$

$$= \frac{(-1)^n}{\lambda} \sum_{m=0}^{\infty} B^k(m) \frac{\Gamma(s+1) \Gamma(m+n-a_{kk})}{\Gamma(m+n+s+1-a_{kk})}$$

